Math. Ann. 197, 137—170 (1972)

Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren

GÜNTER SCHEJA und UWE STORCH*

Herrn Professor Wolfgang Rothstein gewidmet

Einleitung

In dieser Arbeit werden noethersche Algebren über einem Körper k untersucht, die eine universell-endliche k-Derivation besitzen. Solche Algebren treten vor allem in der algebraischen und der analytischen Geometrie auf. In der Hauptsache geht es um die differentiellen Eigenschaften der Lokalisierungen der Algebren des genannten Typs, die wegen des in der algebraischen und der analytischen Geometrie gültigen Prinzips der Korrespondenz zwischen den Eigenschaften der Lokalisierungen einerseits und den lokalen Eigenschaften der algebraischen bzw. analytischen Varietäten andererseits interessieren.

Im einzelnen ist zum Inhalt der Arbeit folgendes zu sagen. In § 1 werden grundlegende differentielle Begriffe kurz beschrieben und Zusammenhänge zwischen ihnen dargelegt, wie beispielsweise die Gleichheit von universell-präfiniten, universell-endlichen und universell-separierten Derivationen in gewissen Fällen. Einige Hilfssätze über analytische k-Algebren werden in § 2 zusammengestellt. Ferner werden in § 2 semi-analytische k-Algebren eingeführt, das sind Restklassenringe gewisser Divisionserweiterungen von Polynomringen über analytischen k-Algebren; dabei ist die Nenneraufnahme bei den Divisionserweiterungen so getroffen, daß die semi-analytischen k-Algebren universell-endliche k-Derivationen besitzen.

Eine Lokalisierung einer universell-endlichen Derivation ist im allgemeinen nicht universell-endlich. In § 3 wird beschrieben, wie man hingegen bei semi-analytischen Algebren durch eine Erweiterung des Grundkörpers die universelle Eigenschaft gewinnen kann. Dieses

* Beide Verfasser wurden bei der Vorbereitung dieser Arbeit gefördert durch den Schweizerischen Nationalfonds, Vertrag Nr. 5123.2, der zweitgenannte Verfasser außerdem durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Lokalisierungsverfahren, das in den weiteren Beweisen vielfach verwendet wird, dient zunächst in § 4 und § 5 zur Herleitung von Abschätzungen bzw. Gleichungen für die Erzeugendenzahlen des Wertemoduls der lokalisierten Derivation (des lokalisierten Differentialmoduls also), s. Satz (4.4) und Satz (5.1). Hierbei spielen separable Algebren eine Rolle. Spezialfälle der Ergebnisse finden sich auch in [2].

In § 6 wird zunächst der gewöhnliche Begriff des Ranges von Moduln erweitert. Es werden Bedingungen hergeleitet, unter denen lokalisierte Differentialmoduln einen solchen verallgemeinerten Rang besitzen. Dies führt zu Reduziertheitskriterien, die in § 7 auf die Komplettierungen der Lokalisierungen ausgedehnt werden. Zudem ergeben sich Aussagen über die Existenz reduzierter Hauptklassenideale in allgemeiner Lage.

In den beiden letzten Abschnitten der Arbeit, nämlich in § 8 und § 9, wird ausschließlich der Fall behandelt, daß der Grundkörper k die Charakteristik 0 hat. Für noethersche Algebren über einem solchen Grundkörper k mit universell-endlicher k-Derivation kann man die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte ohne störende Voraussetzungen erhalten. Sie sind immer ausgezeichnete Ringe. Für ihre Lokalisierungen wird das Hauptergebnis aus [17] über ganz-algebraische Abhängigkeit von Idealen bei differentieller Abhängigkeit verallgemeinert. Dies wird in § 9 benutzt, ein von Zariski und Lipman herrührendes Problem aus [11] über freie Moduln von Derivationen für lokale Hyperflächenringe zu lösen.

Zum Schluß sei noch auf einige *Bezeichnungen* aufmerksam gemacht. Sei A ein (kommutativer) Ring (mit Einselement). Wir bezeichnen den Durchschnitt der maximalen Ideale (das Jacobson-Radikal) von A mit $\mathfrak{m}_A$ und den Restering $A/\mathfrak{m}_A$ mit k_A. Ein Homomorphismus $\varphi: A \to B$ von Ringen heißt lokal, wenn $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteqq \mathfrak{m}_B$ ist. Für einen A-Modul M bezeichnet $\mu_A(M)$ oder kurz $\mu(M)$ die Minimalanzahl von Erzeugenden von M und $\mathrm{dh}_A M$ die homologische Dimension (auch projektive Dimension genannt) von M. Ist A Integritätsring, so schreiben wir $\operatorname{rang} M$ für den gewöhnlichen Rang von M; siehe aber auch § 6.

Ein Teilkörper k eines semilokalen Ringes A, über dem die Restklassenkörper nach den maximalen Idealen (Restekörper) endlich erzeugt sind, heißt Koeffizientenkörper von A; sind die Restekörper kanonisch isomorph zu k, dann heißt k ein voller Koeffizientenkörper von A.

Für einen lokalen Ring A bezeichnet $\operatorname{Dim} A$ die Einbettungsdimension $\mu(\mathfrak{m}_A)$ von A (während $\dim A$ die Krulldimension von A angibt). Ist $M \neq 0$ ein endlicher A-Modul, so sei $\operatorname{codh} M = \operatorname{codh}_A M$ die homologische Kodimension (auch: Tiefe oder profondeur) von M.

§ 1. Universell-endliche Derivationen

Im folgenden betrachten wir nur kommutative Ringe mit Einselement. Alle Moduln und Ringhomomorphismen seien unitär. Ist k ein Ring, so verstehen wir unter einer k-Algebra A einen Ring A zusammen mit einem Homomorphismus $\varphi : k \longrightarrow A$. Sind $a \in k$ und $x \in A$, so schreiben wir ax statt $\varphi(a)x$. k-Algebra-Homomorphismen werden wir k-Homomorphismen nennen.

Ist A eine k-Algebra, so bezeichnen wir mit $d_k^\infty : A \longrightarrow D_k^\infty(A)$ die universelle k-Derivation von A. Eine k-Derivation $A \longrightarrow M$ nennen wir *endlich*, wenn M endlicher A-Modul ist. Eine endliche k-Derivation $d_k : A \longrightarrow D_k(A)$ heißt *universell-endlich*, wenn es zu jeder endlichen k-Derivation $\delta : A \longrightarrow M$ einen eindeutig bestimmten A-Homomorphismus $h : D_k(A) \longrightarrow M$ mit $\delta = hd_k$ gibt. Eine solche Derivation d_k existiert nicht immer. Im Fall der Existenz sind d_k und $D_k(A)$ im wesentlichen eindeutig bestimmt. Es ist dann $D_k(A) = Ad_kA$. $D_k(A)$ heißt der *universell-endliche k-Differentialmodul* von A. Zu diesen Begriffen sei allgemein auf [1], [2] und [16] verwiesen.

Schwierigkeiten, die mit der Existenz universell-endlicher Derivationen zusammenhängen, lassen sich durch Einführung präfiniter Derivationen umgehen [1]. Ist A ein Ring, so heißt ein A-Modul M *präfinit*, wenn sich je zwei verschiedene Elemente von M durch einen Homomorphismus von M in einen endlichen A-Modul trennen lassen. Endliche Moduln sind präfinit. Direkte Produkte und Untermoduln von präfiniten Moduln sind wieder präfinit. Jeder präfinite Modul ist Untermodul eines direkten Produkts von endlichen Moduln. Eine Derivation $A \longrightarrow M$ heißt *präfinit*, wenn M präfinit ist. Ist A eine k-Algebra, so existiert die universell-präfinite k-Derivation, und man erhält sie als Komposition von d_k^∞ mit der kanonischen Projektion von $D_k^\infty(A)$ auf den präfiniten Modul $D_k^\infty(A)/N$, wobei N der Durchschnitt der Kerne aller Homomorphismen von $D_k^\infty(A)$ in endliche A-Moduln ist (vgl. [6]). Ist $D_k^\infty(A)/N$ endlich, so ist die universell-präfinite k-Derivation auch universell-endlich. Und umgekehrt:

(1.1). *Existiert die universell-endliche k-Derivation d_k, so ist sie universell-präfinit.*

Beweis. Sei $\delta : A \longrightarrow M$ eine präfinite k-Derivation. Ist $\iota : M \longrightarrow N$ eine Einbettung von M in den Modul N und gibt es einen Homomorphismus $h : D_k(A) \longrightarrow N$ mit $hd_k = \iota\delta$, so gilt wegen $D_k(A) = Ad_kA$ offenbar $h(D_k(A)) \subseteq \iota(M)$, so daß sich δ ebenfalls über d_k faktorisieren läßt. Für N

[1] Auf die Nützlichkeit dieses Begriffs insbesondere im Hinblick auf seine funktoriellen Eigenschaften machte uns Herr H. Kleisli aus Fribourg aufmerksam, dem wir für diesen Hinweis herzlich danken.

wähle man, um (1.1) zu erhalten, ein direktes Produkt von endlichen Moduln, und für $\iota\delta$ ist die Faktorisierung dann direkt zu erhalten.

Im folgenden bezeichnen wir die universell-präfinite k-Derivation von A mit $d_k: A \to D_k(A)$. Wegen (1.1) kollidiert dies nicht mit der Bezeichnung für universell-endliche Derivationen. –

Sei A eine noethersche k-Algebra. Mit $\mathfrak{m}_A$ bezeichnen wir den Durchschnitt der maximalen Ideale von A. Ein A-Modul M heißt *separiert*, wenn $\bigcap_{i \geqq 0} \mathfrak{m}_A^i M = 0$ ist. Endliche Moduln sind separiert (Krullscher Durchschnittssatz). Eine k-Derivation $\delta: A \to M$ heißt *separiert*, wenn M separierter A-Modul ist. Die universell-separierte k-Derivation d_k^s von A existiert stets. Man erhält sie als Komposition von d_k^∞ mit der kanonischen Projektion von $D_k^\infty(A)$ auf den separierten Modul $D_k^s(A) := D_k^\infty(A)/\cap \mathfrak{m}_A^i D_k^\infty(A)$.

Sei außerdem B eine K-Algebra und $\varphi: A \to B$ ein (k, K)-Homomorphismus. Eine K-Derivation $\eta: B \to N$ zusammen mit einem A-Homomorphismus $h: M \to N$ heißt eine K-Ausdehnung von δ nach B, wenn $\eta\varphi = h\delta$ ist. Faktorisiert η alle K-Ausdehnungen von δ nach B eindeutig, so heißt η *universelle K-Ausdehnung*. Ist $M = A\delta A$, so existiert eine solche universelle Ausdehnung stets. Man vergleiche hierzu [1]. Entsprechend definiert man universell-separierte, universell-endliche usw. Ausdehnungen.

Ist $\varphi: A \to B$ ein Homomorphismus von k-Algebren mit $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteqq \mathfrak{m}_B$, so heiße φ lokal.

(1.2). *In diesem Fall gibt es einen eindeutig bestimmten A-Homomorphismus $D_k^s(\varphi): D_k^s(A) \to D_k^s(B)$, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle d_k^s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_k^s} \\ D_k^s(A) & \xrightarrow{D_k^s(\varphi)} & D_k^s(B) \end{array}$$

kommutativ macht. Ferner ist $d_k^s: B \to D_k^s(B)$ die universell-separierte Ausdehnung von $d_k^s: A \to D_k^s(A)$.

Beweis. $D_k^s(B)$ ist wegen $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteqq \mathfrak{m}_B$ ein separierter A-Modul. Die k-Derivation $d_k^s\varphi$ läßt sich deshalb über $d_k^s: A \to D_k^s(A)$ faktorisieren. Der Zusatz über universelle Ausdehnungen ist klar.

Wenn A semilokal ist, fallen separierte und präfinite Derivationen zusammen. Es gilt nämlich:

(1.3) Lemma. *Ist A semilokal, so stimmen die präfiniten A-Moduln mit den separierten überein.*

Beweis. Sei M präfinit, $x \in \cap \mathfrak{m}_A^i M$ und $h: M \to N$ ein Homomorphismus in einen endlichen A-Modul N. Wir haben zu zeigen: $h(x)=0$. Es ist aber $h(x) \in \cap \mathfrak{m}_A^i N = 0$. (Diese Richtung benutzt nicht, daß A semilokal ist.) Sei umgekehrt M separiert. Wegen $\cap \mathfrak{m}_A^i M = 0$ genügt es offenbar zu zeigen, daß $M/\mathfrak{m}_A^i M$ für jedes $i \geqq 1$ präfiniter $(A/\mathfrak{m}_A^i)$-Modul ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei deshalb A artinsch. Da sich jeder Modul in einen injektiven Modul einbetten läßt, können wir M als injektiv annehmen. Dann ist M aber direkte Summe unzerlegbarer injektiver A-Moduln, die endlich sind, da A artinsch ist [13].

(1.4) Korollar. *Ist A semilokale k-Algebra, so ist die universell-präfinite k-Derivation von A auch universell-separiert.*

Wir bemerken, daß aus dem Korollar folgt, daß für eine artinsche k-Algebra die universell-endliche k-Derivation genau dann existiert, wenn d_k^∞ bereits endlich ist.

(1.5) Korollar. *Ist $\varphi: A \to B$ ein lokaler Homomorphismus von k-Algebren und ist A semilokal, so gibt es einen eindeutig bestimmten A-Homomorphismus $D_k(\varphi): D_k(A) \to D_k(B)$, der das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle d_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_k} \\ D_k(A) & \xrightarrow{D_k(\varphi)} & D_k(B) \end{array}$$

kommutativ macht.

A sei semilokale k-Algebra. Jede k-Derivation δ von A in einen A-Modul M ist stetig bezüglich der $\mathfrak{m}_A$-adischen Topologien. Deshalb läßt sich δ zu einer k-Derivation der Komplettierung $\hat{A}$ von A in die Komplettierung $\hat{M}$ von M fortsetzen.

(1.6) Korollar. *Sei A semilokale k-Algebra und $d_k: A \to D_k(A)$ die universell-präfinite k-Derivation von A. Dann ist $\hat{d}_k: \hat{A} \to D_k(A)\hat{}$ die universell-präfinite k-Derivation von $\hat{A}$. Die Einbettung $D_k(A) \to D_k(A)\hat{}$ identifiziert sich mit $D_k(\iota)$ zur Einbettung $\iota: A \to \hat{A}$.*

Ist d_k endlich, so ist auch $\hat{d}_k$ endlich, und es ist $D_k(\hat{A}) \cong D_k(A)\hat{}$ $\cong D_k(A) \otimes_A \hat{A}$.

Beweis. Aus dem Beweis von (1.1) ist ersichtlich, daß es genügt, die universelle Eigenschaft von $\hat{d}_k$ für endliche k-Derivationen zu zeigen. Sei M endlicher $\hat{A}$-Modul und $\delta: \hat{A} \to M$ eine k-Derivation. M ist ein kompletter und separierter A-Modul. Nach (1.4) gibt es einen A-Homomorphismus $h: D_k(A) \to M$ mit $hd_k = \delta | A$. Offenbar gilt dann $\hat{h}\hat{d}_k = \delta$. Die weiteren Behauptungen verstehen sich jetzt von selbst.

(1.7) Korollar. *Sei $\varphi: A \to B$ ein lokaler Homomorphismus von k-Algebren, wobei A semilokal ist. Ist die universell-separierte Ausdehnung d'_k von $d_k: A \to D_k(A)$ endlich, so ist d'_k universell-endliche k-Derivation von B.*

Der Beweis folgt aus (1.4) und dem Zusatz von (1.2).

Auf die folgende Bemerkung macht uns Herr Bingener aufmerksam.

(1.8). *Es sei A eine noethersche k-Algebra und $d: A \to D$ eine endliche k-Derivation. d ist genau dann universell-endlich, wenn die Ausdehnungen $d_{\mathfrak{m}}: A_{\mathfrak{m}} \to D_{\mathfrak{m}}$ durch Nenneraufnahme für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von A universell-endliche k-Derivationen sind.*

Beweis. Sei d universell-endlich. $\mathfrak{m}$ sei ein maximales Ideal von A. $d_{\mathfrak{m}}$ ist die universelle Ausdehnung von d. Sei $\delta: A_{\mathfrak{m}} \to M$ eine endliche k-Derivation von $A_{\mathfrak{m}}$. M läßt sich auf natürliche Weise in das direkte Produkt der $M/\mathfrak{m}^i M$, $i \geqq 1$, einbetten, da $A_{\mathfrak{m}}$ lokal ist. $M/\mathfrak{m}^i M$ ist endlicher Modul über $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^i A_{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}^i$, also endlicher A-Modul; folglich ist M präfiniter A-Modul. Nach (1.1) ist somit δ faktorisierbar über d. Dann ist δ auch über $d_{\mathfrak{m}}$ faktorisierbar (Nenneraufnahme).

Seien umgekehrt alle $d_{\mathfrak{m}}$ universell-endlich. Mittels der Quotientenregel sieht man sofort, daß $D_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}\, dA$ ist; folglich ist $D = A\,dA$. Sei jetzt $\delta: A \to N$ eine endliche k-Derivation. Seien $a_i, b_i \in A$ mit $\Sigma_i b_i\, d a_i = 0$. Offenbar ist dann $\Sigma_i b_i \delta_{\mathfrak{m}} a_i = 0$ in $N_{\mathfrak{m}}$, da sich $\delta_{\mathfrak{m}}$ über $d_{\mathfrak{m}}$ faktorisieren läßt. Da dies für alle $\mathfrak{m}$ gilt, hat man $\Sigma_i\, b_i \delta a_i = 0$. Das bedeutet aber genau, daß sich δ über d faktorisieren läßt.

§ 2. Analytische und semi-analytische Algebren

Im folgenden sei k ein (trivial oder nichttrivial) bewerteter Körper. Unter einer *analytischen k-Algebra* verstehen wir eine k-Algebra, die endlich über einem konvergenten Potenzreihenring $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\rangle$ in endlich vielen Unbestimmten X_i über k ist. Jede analytische Algebra ist (endliches) direktes Produkt von lokalen analytischen k-Algebren, deren Restekörper endlich über k sind. Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so gibt es lokale analytische k-Algebren, die nicht Restklassenringe von Potenzreihenringen sind. Übrigens wird vielfach der Begriff „analytische k-Algebra" für diese Restklassenringe reserviert.

Unter einem *analytischen Homomorphismus* zwischen analytischen k-Algebren verstehen wir einen k-Algebra-Homomorphismus. Analytische Homomorphismen sind lokal.

(2.1) Lemma. *Sind $f_1, \ldots, f_r$ Elemente des Jacobson-Radikals $\mathfrak{m}_A$ der analytischen k-Algebra A, so gibt es genau einen k-Homomorphismus*

$k\langle\langle X_1, \ldots, X_r\rangle\rangle \to A$ mit $X_i \to f_i$, $1 \leqq i \leqq r$. Das Bild dieses Homomorphismus sei mit $k\langle\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\rangle$ bezeichnet.

Wir skizzieren den *Beweis*. Sei $R := k\langle\langle Y_1, \ldots, Y_s\rangle\rangle$ und $\varphi: R \to A$ eine endliche Darstellung von A. Offenbar dürfen wir annehmen, daß A lokal ist. Dann ist $\varphi(R)[f_1, \ldots, f_r]$ ein lokaler Unterring von A mit Restklassenkörper k. Wir dürfen weiterhin annehmen, daß A dieser Ring ist. Dann ist $A = R[Z_1, \ldots, Z_r]/\mathfrak{a} = k\langle\langle Y_1, \ldots, Y_s, Z_1, \ldots, Z_r\rangle\rangle/\mathfrak{a}^e$, wobei $\mathfrak{a}^e$ das Erweiterungsideal von $\mathfrak{a}$ ist (Weierstraßscher Vorbereitungssatz). A ist also Restklassenring eines Potenzreihenringes. Für solche Ringe ist die Aussage aber bekannt. Daß es nur einen Homomorphismus der angegebenen Art gibt, ist klar.

Man folgert aus diesem Lemma, daß quasi-endliche Homomorphismen endlich sind, indem man dies auf die entsprechende Aussage für Restklassenringe von Potenzreihenringen zurückführt (Serresche Formulierung des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes. Vgl. [4]).

Ist A ein semilokaler Ring der Dimension r, so versteht man unter einem *Parametersystem* von A eine Menge von r Elementen aus $\mathfrak{m}_A$, die ein Ideal erzeugen, dessen Radikal $\mathfrak{m}_A$ ist. Ist A eine analytische k-Algebra der Dimension r und $f_1, \ldots, f_r$ ein Parametersystem von A, so ist A endlich über $k\langle\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\rangle$ und $k\langle\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\rangle$ ist aus Dimensionsgründen isomorph zur regulären Algebra $k\langle\langle X_1, \ldots, X_r\rangle\rangle$.

Neben den analytischen Algebren sind noch Algebren zu betrachten, die durch Lokalisierung aus Algebren endlichen Typs über Potenzreihenringen entstehen.

Sei zunächst R ein beliebiger lokaler Ring und $P = R[U_1, \ldots, U_m]$ ein Polynomring über R. Mit M bezeichnen wir das multiplikative System der Polynome aus P, die bei der kanonischen Abbildung von P auf $(R/\mathfrak{m}_R)[U_1, \ldots, U_m]$ auf Einheiten abgebildet werden. Für P_M schreiben wir $R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$. Es gibt eine kanonische Abbildung von $R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ auf $(R/\mathfrak{m}_R)[U_1, \ldots, U_m]$ mit eindeutiger Entsprechung der maximalen Ideale; ihr Kern ist $\mathfrak{m}_R \cdot R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$, das Jacobsonradikal von $R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$. Die maximalen Ideale von $R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ erhält man also genau durch Erweitern derjenigen maximalen Ideale von P, die $\mathfrak{m}_R P$ umfassen.

Ist $h: R \to S$ ein lokaler Homomorphismus von lokalen Ringen, dann kann man jede Fortsetzung von h zu einem Homomorphismus $\tilde{h}$ von $R[U_1, \ldots, U_m]$ in $S[V_1, \ldots, V_n]$ auch zu einem Homomorphismus h' von $R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ in $S\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ fortsetzen.

(2.2). *Ist dabei $\tilde{h}$ endlich, so ist h quasi-endlich, und h' ist ebenfalls endlich.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß h quasi-endlich ist. Dazu kann man offenbar annehmen, daß $\tilde{h}$ eine Abbildung von $R[U_1, \ldots, U_m]$ in S ist. Da S endlich über dem lokalen Ring Bild $\tilde{h}$ ist, dürfen wir sogar annehmen, daß Bild $\tilde{h} = S$ ist. Dann ist aber $S/\mathfrak{m}_R S$ endlich über $(R/\mathfrak{m}_R)[U_1, \ldots, U_m]$. Daraus folgt, daß $S/\mathfrak{m}_R S$ endliche $(R/\mathfrak{m}_R)$-Algebra ist.

Mit M bezeichnen wir das multiplikative System $R^* + \mathfrak{m}_R[U_1, \ldots, U_m]$; ebenso sei $N := S^* + \mathfrak{m}_S[V_1, \ldots, V_n]$. Es ist $h(M) \subseteq N$. Mit $\tilde{h}$ ist auch die Lokalisierung $\tilde{h}_M : R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle \to S[V_1, \ldots, V_n]_{h(M)}$ endlich. Es genügt zu zeigen, daß $S[V_1, \ldots, V_n]_{h(M)}$ mit $S\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ übereinstimmt. Sei $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal in $S[V_1, \ldots, V_n]_{h(M)}$. Wir haben zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ ein echtes Ideal in $S\langle V_1, \ldots, V_n\rangle$ erzeugt. Das ist genau dann der Fall, wenn $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{m}_S[V_1, \ldots, V_n]$. Da $\tilde{h}_M$ endlich ist, folgt $\mathfrak{p} \supseteq h(\mathfrak{m}_R)$. Da aber $h(\mathfrak{m}_R)\, S[V_1, \ldots, V_n]$ primär zu $\mathfrak{m}_S[V_1, \ldots, V_n]$ ist (h quasi-endlich), folgt die Behauptung.

Definition. k sei ein bewerteter Körper. Eine k-Algebra A heißt *semi-analytisch*, wenn sie endlich über einer Algebra $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle \cdot \langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ ist. Der Quotient $k_A := A/\mathfrak{m}_A$ heißt der *Restering* von A. Unter einem *(semi-analytischen) Homomorphismus* zwischen semi-analytischen k-Algebren verstehen wir einen k-Algebra-Homomorphismus.

k_A ist eine k-Algebra endlichen Typs. Die Restekörper von k_A und damit von A sind also endlich algebraisch über k. Offenbar sind die analytischen k-Algebren genau die semi-lokalen semi-analytischen k-Algebren.

k-Algebra-Homomorphismen mit Werten in einer k-Algebra, deren Restekörper endlich algebraisch über k sind, sind lokal. *Daher sind semi-analytische Homomorphismen lokal.*

(2.3). *Jede semi-analytische k-Algebra A ist Restklassenalgebra einer Algebra $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$.*

Beweis. Sei $\varphi : R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \to A$ ein endlicher Homomorphismus mit $R = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$. φ läßt sich über einen surjektiven Homomorphismus $\psi : R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle[U_{r+1}, \ldots, U_m] \to A$ faktorisieren. Da φ endlich und somit lokal ist, läßt sich ψ zu einem Homomorphismus von $R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ auf A erweitern.

Es ist im allgemeinen nicht möglich, A als endliche Erweiterung einer *Teilalgebra* der Form $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle\langle U_1, \ldots, U_m\rangle$ darzustellen. Ein Beispiel ist $A := k\langle\langle X_1, X_2\rangle\rangle\langle U\rangle/(X_1 + X_2 U)$. Ferner ist in diesem Beispiel die natürliche Abbildung von $B := k\langle\langle X_2\rangle\rangle\langle U\rangle$ in A nicht endlich, während die induzierte Abbildung $B/\mathfrak{m}_B \to A/\mathfrak{m}_B A$ nichts anderes ist als der Isomorphismus $k[U] \xrightarrow{\text{id}} k[U]$; quasi-endliche Homomorphismen semi-analytischer Algebren sind also nicht notwendig endlich.

Aus (2.3) folgt direkt, daß in einer nullteilerfreien semi-analytischen k-Algebra alle maximalen Ideale dieselbe Kodimension haben.

(2.4). *Für jede semi-analytische k-Algebra A gibt es eine endliche Darstellung $\varphi: R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \to A$, wobei φ auf $R = k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle$ injektiv ist.*

Beweis. Sei $\psi: S\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \to A$ ein endlicher Homomorphismus mit $S = k\langle\!\langle Y_1, \ldots, Y_m\rangle\!\rangle$. Sei $\mathfrak{a} := S \cap \operatorname{Kern} \psi$, $\bar{S} := S/\mathfrak{a}$ und

$$\bar{\psi}: \bar{S}\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \to A$$

der von ψ induzierte endliche Homomorphismus. Es gibt einen endlichen injektiven Homomorphismus h von einem Potenzreihenring $R := k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle$ in $\bar{S}$, der sich nach (2.2) zu einem endlichen Homomorphismus h' von $R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ in $\bar{S}\langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ fortsetzt. Nun nimmt man $\varphi := \bar{\psi} h'$.

Grundlegend für die Strukturaussagen über semi-analytische Algebren ist der folgende Satz.

(2.5) Satz. *Es sei A eine nullteilerfreie semi-analytische k-Algebra und $\varphi: R\langle U_1, \ldots, U_m\rangle \to A$ eine endliche Darstellung mit $R := k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle$. Ist S eine analytische Unteralgebra von A, so gibt es eine analytische Unteralgebra R' von A, die endlich über $\varphi(R)$ ist und S enthält.*

Beweis. Nach (2.3.12) aus [2] sind alle Elemente von S ganz über $\varphi(R)$. Sei etwa $\mathfrak{m}_S = (f_1, \ldots, f_r)S$. Wir setzen $T := \varphi(R)[f_1, \ldots, f_r]$. Da A nullteilerfrei ist, ist T lokale analytische Algebra. Wegen $\mathfrak{m}_T \subseteq \mathfrak{m}_A$ und $\mathfrak{m}_S \subseteq \mathfrak{m}_A$ sind $f_1, \ldots, f_r$ Elemente von $\mathfrak{m}_T$, $k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\!\rangle \subseteq T$ ist wohldefiniert und stimmt mit $k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\!\rangle \subseteq S$ überein. Es ist

$$S = k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\!\rangle [g_1, \ldots, g_s].$$

Nun braucht man nur noch $R' := T[g_1, \ldots, g_s]$ zu setzen.—

Sei A eine nullteilerfreie semi-analytische k-Algebra. Die Vereinigung aller analytischen k-Algebren von A heiße der *analytische Bestandteil* von A. Dieser ist eine quasi-lokale k-Algebra $\mathscr{A}(A)$ endlicher Dimension r. Sind $g_1, \ldots, g_s$ Elemente des maximalen Ideals von $\mathscr{A}(A)$, so läßt sich $k\langle\!\langle g_1, \ldots, g_s\rangle\!\rangle$ nach (2.5) in eindeutiger Weise bilden. Die Elemente $g_1, \ldots, g_s$ heißen ein *Parametersystem* von A, wenn $s = r$ ist und $\mathscr{A}(A)$ ganz über $k\langle\!\langle g_1, \ldots, g_s\rangle\!\rangle$ ist.

Sei A eine semi-analytische k-Algebra und $\varphi: R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle \to A$ eine endliche Darstellung mit $R = k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\!\rangle$. R besitzt eine universell-endliche k-Derivation d_1. Die universelle Ausdehnung d_2 von d_1 nach $R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ ist wieder endlich und nach (1.7) die universell-endliche k-Derivation von $R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle$, da die Einbettung $R \to R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ lokal ist. $D_k(R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle)$ ist frei mit der Basis $d_2 X_1, \ldots, d_2 X_n$, $d_2 U_1, \ldots,$

$d_2 U_r$. Weil A endlich über $R\langle U_1, \ldots, U_r\rangle$ ist, ist die universelle Ausdehnung von d_2 universell-endliche k-Derivation von A.

(2.6). *Jede semi-analytische k-Algebra besitzt eine universell-endliche k-Derivation d.*

Wegen der universellen Eigenschaften von d läßt sich d aus jeder endlichen Darstellung der Algebra auf die oben beschriebene Weise gewinnen.

Ist A eine analytische k-Algebra und K ein bewerteter Oberkörper von k, so definiert man in bekannter Weise das analytische Tensorprodukt $A \hat{\otimes}_k K$. Dies ist eine treu-flache Erweiterung von A. Überdies gilt

(2.7). *Es ist* $D_K(A \hat{\otimes}_k K) \cong D_k(A) \otimes_A (A \hat{\otimes}_k K)$.

Beweis. A ist endliche Algebra über einem Potenzreihenring $R = k\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$. Sei $S := K\langle\langle X_1, \ldots, X_n\rangle\rangle$. Dann ist $B := A \hat{\otimes}_k K = A \otimes_R S$ und $D_k(A) \otimes_A B = D_k(A) \otimes_R S$.

Die Behauptung des Satzes ist klar für $A = R$ (konkrete Konstruktion). Der allgemeine Fall ergibt sich durch Ausdehnung von R nach A und S nach B. Hierbei erweist sich $B \to D_k(B)$ als universell-endliche K-Ausdehnung von $A \to D_k(A)$.

§ 3. Lokalisierung und universelle Ausdehnung

Es sei A ein semilokaler Ring.

Definition. Ein Körper $k \subsetneqq A$ heißt ein *Koeffizientenkörper* von A, wenn die Restekörper von A endlich erzeugte Körpererweiterungen von k sind, und ein *voller Koeffizientenkörper*, wenn die Restekörper von A kanonisch isomorph zu k sind.

Im folgenden wollen wir für Lokalisierungen semi-analytischer k-Algebren Koeffizientenkörper konstruieren, über denen universell-endliche Derivationen existieren.

Sei A eine semi-analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Unter einem *Bezugssystem* $\mathfrak{S}$ in A für $\mathfrak{p}$ verstehen wir eine Menge in A mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gibt eine endliche Darstellung $\varphi: R\langle U_1, \ldots, U_n\rangle \to A$, R analytische k-Algebra, mit $\mathfrak{S} \subsetneqq \varphi(\mathfrak{m}_R)$.

2. $\mathfrak{S}$ wird von der kanonischen Abbildung $A \to A/\mathfrak{p}$ bijektiv auf ein Parametersystem von $A/\mathfrak{p}$ (im analytischen Bestandteil von $A/\mathfrak{p}$ nämlich) abgebildet.

Bezugssysteme in A für $\mathfrak{p}$ existieren stets; vgl. (2.5) und die anschließenden Bemerkungen.

Sei $\mathfrak{S}=\{f_1,\ldots,f_r\}$ ein Bezugssystem in A für das Primideal $\mathfrak{p}$. $\varphi: R\langle U_1,\ldots,U_n\rangle \to A$ sei eine endliche Darstellung mit einer analytischen k-Algebra R derart, daß $\mathfrak{S}\subseteq\varphi(\mathfrak{m}_R)$ ist. Mit B bezeichnen wir die analytische k-Algebra $k\langle\!\langle f_1,\ldots,f_r\rangle\!\rangle\subseteq\varphi(R)\subseteq A$. Sei $\bar{A}:=A/\mathfrak{p}$ und $\pi: A\to\bar{A}$ die kanonische Projektion. B wird von π bijektiv auf die (reguläre) k-Algebra $\bar{B}:=k\langle\!\langle \pi f_1,\ldots,\pi f_r\rangle\!\rangle$ abgebildet. Es folgt $\mathfrak{p}\cap B=0$. Daher enthält die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ den Quotientenkörper K von B. Sei $\bar{L}$ der Quotientenkörper von $\bar{A}$. π läßt sich zu einem Homomorphismus $\pi_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$ auf $\bar{L}$ fortsetzen, dessen Kern gerade $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ ist. $\pi_\mathfrak{p}$ bildet K auf den Quotientenkörper $\bar{K}$ von $\bar{B}$ ab.

$\bar{A}$ ist Restklassenalgebra einer Algebra $\bar{B}\langle V_1,\ldots,V_m\rangle$ nach einem Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}\cap\bar{B}=0$. Daher ist $\bar{L}$ endlich erzeugt über $\bar{K}$, und man hat $\dim\bar{A}=\dim\bar{B}+\operatorname{trgrad}(\bar{L}:\bar{K})$. Insbesondere ist K ein Koeffizientenkörper für $A_\mathfrak{p}$.

Sei $d: A\to D_k(A)$ die universell-endliche k-Derivation von A. Mit $d_\mathfrak{p}: A_\mathfrak{p}\to D_k(A)_\mathfrak{p}$ bezeichnen wir die universelle Ausdehnung (durch Nenneraufnahme) von d nach $A_\mathfrak{p}$ und mit d_K die Komposition von $d_\mathfrak{p}$ mit der Restklassenabbildung von $D_k(A)_\mathfrak{p}$ auf $D_K:=D_k(A)_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}d_\mathfrak{p}\mathfrak{S}$. Es ist $A_\mathfrak{p}d_\mathfrak{p}\mathfrak{S}=A_\mathfrak{p}(A\,d\,\mathfrak{S})=A_\mathfrak{p}\,dB=A_\mathfrak{p}d_\mathfrak{p}K$. Folglich ist d_K eine K-Derivation. *Nach Konstruktion ist d_K die universelle K-Ausdehnung der k-Derivation d nach $A_\mathfrak{p}$.*

Sei A' neben A eine weitere semi-analytische k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation d', $\mathfrak{p}'$ ein Primideal in A' und $\mathfrak{S}'$ ein Bezugssystem in A' für $\mathfrak{p}'$. Analog zum Vorstehenden konstruieren wir B', K', $d'_{K'}$, $D_{K'}$. Es sei $\varphi: A\to A'$ ein Homomorphismus derart, daß $\mathfrak{p}=\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ und $\mathfrak{S}'=\varphi(\mathfrak{S})$ ist und daß $(d', D(\varphi))$ universelle Ausdehnung von d ist. Der Homomorphismus $D(\varphi): D_k(A)\to D_k(A')$ läßt sich zu einem Homomorphismus $D_k(A)_\mathfrak{p}\to D_k(A')_{\mathfrak{p}'}$ erweitern, der einen Homomorphismus $\Phi: D_K\to D_{K'}$ induziert. Offenbar ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A_\mathfrak{p} \arrow[r] \arrow[d, "d_K"] & A'_{\mathfrak{p}'} \arrow[d, "d'_{K'}"] \\
D_K \arrow[r, "\Phi"] & D_{K'}
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Wegen der Voraussetzung über $(d', D(\varphi))$ gilt:

(3.1). *$(d'_{K'}, \Phi)$ ist die universelle K'-Ausdehnung von d_K.*

Die Voraussetzung, daß $(d', D(\varphi))$ universelle Ausdehnung von d ist, liegt immer dann vor, wenn es eine analytische k-Algebra R gibt und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R\langle U_1, \dots, U_n\rangle & \xrightarrow{\iota} & R\langle U_1, \dots, U_n, U_{n+1}, \dots, U_{n+m}\rangle \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} \\ A & \xrightarrow{\varphi} & A' \end{array}$$

wobei ι die kanonische Einbettung ist und α, α' endliche Darstellungen sind. Zum Beweis benutzt man die Funktorialität der universellen Ausdehnung. Deshalb können wir $\varphi = \iota$ annehmen. Jetzt folgt die Behauptung aus der speziellen Konstruktion universell-endlicher k-Derivationen von Ringen des Typs $R\langle U_1, \dots, U_n\rangle$.

(3.2) Satz. *Sei A eine semi-analytische k-Algebra, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, $\mathfrak{S} = \{f_1, \dots, f_r\}$ ein Bezugssystem in A für $\mathfrak{p}$ und K der Quotientenkörper von $k\langle\!\langle f_1, \dots, f_r\rangle\!\rangle$ in $A_\mathfrak{p}$. Dann gilt: K ist Koeffizientenkörper von $A_\mathfrak{p}$, und die universelle K-Ausdehnung $d_K: A_\mathfrak{p} \to D_K$ von $d: A \to D_k(A)$ ist eine universell-endliche K-Derivation von $A_\mathfrak{p}$.*

Beweis. Nach der Vorbemerkung zu diesem Satz und (3.1) dürfen wir annehmen, daß A analytisch ist. Seien $f_{r+1}, \dots, f_{r+s} \in \mathfrak{m}_A$ so gewählt, daß A endlich über $k\langle\!\langle f_1, \dots, f_{r+s}\rangle\!\rangle$ ist. Mit ψ bezeichnen wir den kanonischen k-Homomorphismus von $\tilde{A} := k\langle\!\langle X_1, \dots, X_{r+s}\rangle\!\rangle$ auf $k\langle\!\langle f_1, \dots, f_{r+s}\rangle\!\rangle$. Sei $\tilde{\mathfrak{p}} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. $A/\mathfrak{p}$ ist endlich über $\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Offenbar liefern $X_1, \dots, X_r$ ein Parametersystem in $\tilde{A}/\tilde{\mathfrak{p}}$. Daher ist $\tilde{A}X_1 + \cdots + \tilde{A}X_r + \tilde{\mathfrak{p}}$ ein $(\mathfrak{m}_{\tilde{A}})$-primäres Ideal, und es gibt $g_1, \dots, g_s$ aus $\tilde{\mathfrak{p}}$ derart, daß $X_1, \dots, X_r, g_1, \dots, g_s$ ein Parametersystem in $\tilde{A}$ ist. Sei

$$P := k\langle\!\langle X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s\rangle\!\rangle,$$

$\chi: P \to \tilde{A}$ der Homomorphismus mit $X_i \to X_i$, $Y_j \to g_j$ und schließlich $\varphi := \psi\chi$, $\mathfrak{q} := \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Dann ist φ endlich und $\mathfrak{q} = PY_1 + \cdots + PY_s$. Wegen (3.1) brauchen wir nur noch den Fall $A = P$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} = PY_1 + \cdots + PY_s$ und $\mathfrak{S} = \{X_1, \dots, X_r\}$ zu behandeln. $P_\mathfrak{q}$ ist ein regulärer lokaler Ring der Dimension s mit maximalem Ideal $P_\mathfrak{q}Y_1 + \cdots + P_\mathfrak{q}Y_s$. K ist ein voller Koeffizientenkörper von $P_\mathfrak{q}$. Es ist D_K frei mit der Basis $d_K Y_1, \dots, d_K Y_s$. Ist $\delta: P_\mathfrak{q} \to M$ eine endliche K-Derivation, dann gibt es einen Homomorphismus $h: D_K \to M$ mit $hd_K Y_j = \delta Y_j$; aus Stetigkeitsgründen gilt $hd_K = \delta$. Daher ist d_K universell-endlich.

Wir schreiben für D_K im folgenden auch $D_K(A_\mathfrak{p})$.

(3.3) Korollar. *Sei A eine analytische k-Algebra, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, $\mathfrak{S} = \{f_1, \dots, f_r\}$ ein Bezugssystem für $\mathfrak{p}$ in A und K der Quotientenkörper von $k\langle\!\langle f_1, \dots, f_r\rangle\!\rangle$ in $A_\mathfrak{p}$. Dann gilt: $\hat{A}_\mathfrak{p}$ (kurz für: $(A_\mathfrak{p})\hat{}$) ist komplette analytische K-Algebra, deren universell-endliche K-Derivation gerade die universell-endliche K-Ausdehnung $(d_K)\hat{}: (A_\mathfrak{p})\hat{} \to (D_K)\hat{}$ von $d: A \to D_k(A)$ ist.*

Der Beweis ergibt sich aus (3.2) mit (1.6).

§ 4. Separable analytische Algebren

Definition. Sei A eine nullteilerfreie analytische k-Algebra der Dimension q. Ein Parametersystem $f_1, \ldots, f_q$ in A heißt *separierend*, wenn der Quotientenkörper von A separabel algebraisch über dem Quotientenkörper von $k\langle\langle f_1, \ldots, f_q \rangle\rangle$ ist.

(4.1). *Sei A eine nullteilerfreie analytische k-Algebra der Dimension q. Dann gilt:*

(1) *Es ist* $\operatorname{rang} D_k(A) \geqq q$.

(2) *Es ist* $\operatorname{rang} D_k(A) = q$ *genau dann, wenn A ein separierendes Parametersystem besitzt.*

(3) *Ein Parametersystem $f_1, \ldots, f_q$ von A ist genau dann separierend, wenn $D_k(A)/(A\,df_1 + \cdots + A\,df_q)$ Torsionsmodul ist.*

Beweis. Sei $f_1, \ldots, f_q$ ein Parametersystem von A und $B := k\langle\langle f_1, \ldots, f_q \rangle\rangle$. Aus Stetigkeitsgründen ist $A\,df_1 + \cdots + A\,df_q = A\,dB$. Also ist $D_k(A)/(A\,df_1 + \cdots + A\,df_q) = D_B(A)$. Da A endlich über B ist, hat man $D_B(A) = D_B^\infty(A)$. Der universelle Differentialmodul ist mit Nenneraufnahme verträglich. Bezeichnet L bzw. K den Quotientenkörper von A bzw. B, so gilt also $D_B(A) \otimes_A L = D_K^\infty(L)$. Wegen $[L:K] < \infty$ ist $D_K^\infty(L) = 0$ genau dann, wenn L separabel über K ist. Das beweist (3).

Nehmen wir jetzt an, daß $f_1, \ldots, f_q$ separierendes Parametersystem ist. Dann lassen sich die partiellen Ableitungen von B zu k-Derivationen δ_i von L in sich fortsetzen. Da A endlich über B ist, gibt es ein $h \in A$, $h \neq 0$, mit $h\delta_i A \subseteqq A$. Daher sind $df_1, \ldots, df_q$ linear unabhängig über K, d. h. es ist $q = \operatorname{rang}(A\,df_1 + \cdots + A\,df_q) = \operatorname{rang} D_k(A)$.

Offensichtlich dürfen wir für den weiteren Beweis voraussetzen, daß $p := \operatorname{char} k > 0$ ist. Es bleibt für diesen Fall zu zeigen: Ist $r := \operatorname{rang} D_k(A) \leqq q$, so besitzt A ein separierendes Parametersystem. Da der Satz für $q = 0$ trivial ist, dürfen wir annehmen, daß es ein $x \in \mathfrak{m}_A$, $x \neq 0$, gibt. Es ist $D_k(A) = A\,dA$. Also gibt es $y_1, \ldots, y_r \in A$ mit $\operatorname{rang}(A\,dy_1 + \cdots + A\,dy_r) = r$. Dieselbe Bedingung erfüllen dann auch die Elemente $x^p y_1, \ldots, x^p y_r$, so daß wir annehmen können, daß die y_i in $\mathfrak{m}_A$ liegen. Durch Addieren von p-Potenzen kann man aus den y_i einen Teil eines Parametersystems mit linear unabhängigen Differentialen machen. So erhält man ein Parametersystem $z_1, \ldots, z_q$ mit $\operatorname{rang}(A\,dz_1 + \cdots + A\,dz_r) = \operatorname{rang} D_k(A)$. Nach (3) ist dann $z_1, \ldots, z_q$ separierend.

Der Beweis liefert noch folgenden

Zusatz. *Ist A nullteilerfreie analytische k-Algebra mit* $\dim A > 0$, *so ist* $\operatorname{rang} A\,d\mathfrak{m}_A = \operatorname{rang} D_k(A)$.

Die Aussagen (1) und (2) können auch mit dem Rang des Derivationenmoduls $\operatorname{Der}_k(A, A) = \operatorname{Hom}_A(D_k(A), A)$ formuliert werden. Die folgende

Definition stimmt daher mit der entsprechenden Definition in [14], § 47 überein.

Definition. Sei A eine analytische k-Algebra. Ein Primideal $\mathfrak{p}$ in A heißt *separabel*, wenn $D_k(A/\mathfrak{p})$ den $(A/\mathfrak{p})$-Rang $\dim A/\mathfrak{p}$ hat. A heißt *separabel*, wenn A reduziert ist und wenn jedes minimale Primideal von A separabel ist.

(Wir werden denselben Begriff der Separabilität von § 6 an auch für semi-analytische Algebren verwenden.)

Bei $\operatorname{char} k = 0$ ist jede reduzierte analytische k-Algebra separabel. Allgemeiner gilt:

(4.2). *Ist k vollkommen, so ist jede reduzierte analytische k-Algebra separabel.*

Beweis. Wir können $p := \operatorname{char} k > 0$ annehmen. Sei A nullteilerfreie analytische k-Algebra und $f_1, \ldots, f_q$ ein Parametersystem von A. Sei $B := k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_q \rangle\!\rangle$ und L bzw. K der Quotientenkörper von A bzw. B. Da k vollkommen ist, hat man $D_k(A) = D_k^\infty(A)$ und $D_k(B) = D_k^\infty(B)$. Es ist $\operatorname{rang} D_k(A) = \dim_L D_k^\infty(L)$ und $\dim_K D_k^\infty(K) = \operatorname{rang} D_k(B) = q$. Da k vollkommen ist und $[L:K] < \infty$, hat man bekanntlich $\dim_L D_k^\infty(L) = \dim_K D_k^\infty(K)$.

Ist $\mathfrak{p}$ in A ein separables Primideal, so brauchen Primideale $\mathfrak{q}$ in A mit $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{q}$ nicht separabel zu sein. Beispielsweise sind die maximalen Ideale separabler Algebren im allgemeinen nicht separabel über k.

Definition. Es sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\delta: A \to M$ eine Derivation. Eine Familie $\{x_i : i \in I\}$, $x_i \in A$, heißt *δ-frei*, wenn die Familie $\{\delta x_i : i \in I\}$ in M linear unabhängig über A ist.

Definition. Es sei A eine analytische k-Algebra, $\mathfrak{p} \subsetneqq A$ ein Primideal und $\mathfrak{S}$ ein Bezugssystem in A für $\mathfrak{p}$. Wir nennen $\mathfrak{S}$ *frei*, wenn $\mathfrak{S}$ in $A/\mathfrak{p}$ frei ist bezüglich der universell-endlichen k-Derivation von $A/\mathfrak{p}$. Wir nennen $\mathfrak{S}$ *separierend*, wenn S in $A/\mathfrak{p}$ ein separierendes Parametersystem ist.

Separierende Bezugssysteme sind stets frei.

(4.3). *Sei A eine analytische k-Algebra, $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A und $\mathfrak{S} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ ein freies Bezugssystem in A für $\mathfrak{p}$. K sei der Quotientenkörper von $k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_r \rangle\!\rangle$ in $A_\mathfrak{p}$ und $D_K := D_k(A)_\mathfrak{p} / A_\mathfrak{p}\, df_1 + \cdots + A_\mathfrak{p}\, df_r$. Dann gilt: $\mu(D_k(A)_\mathfrak{p}) = \mu(D_K) + \dim A/\mathfrak{p}$.*

Dabei bezeichnet $\mu_R(M)$ oder kurz $\mu(M)$ die Minimalzahl von Erzeugenden des Moduls M über dem Ring R.

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß $df_1, \ldots, df_r$ Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $D_k(A)_\mathfrak{p}$ ist. Seien etwa $g_1, \ldots, g_r \in A_\mathfrak{p}$ mit $g_1\, df_1 + \cdots + g_r\, df_r \in \mathfrak{p} D_k(A)_\mathfrak{p}$; man hat zu beweisen: $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$. Man kann offenbar annehmen, daß $g_1, \ldots, g_r \in A$ und $g_1\, df_1 + \cdots + g_r\, df_r \in \mathfrak{p} D_k(A)$ gilt. Daraus folgt, da $\mathfrak{S}$ frei ist, sofort $g_1, \ldots, g_r \in \mathfrak{p}$.

Für einen lokalen Ring R bezeichnet $\operatorname{Dim} R$ die *Einbettungsdimension* $\dim_{k_R}(\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2)$ von R.

(4.4) Satz. *Es sei A eine analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein separables Primideal in A. Dann gilt:*

$$\mu(D_k(A)_\mathfrak{p}) = \operatorname{Dim} A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p}\,.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{S}$ ein separierendes Bezugssystem in A für $\mathfrak{p}$. B, K, $d_K: A_\mathfrak{p} \to D_K(A_\mathfrak{p})$ seien wie üblich konstruiert (vgl. § 3). Nach (4.3) ist $\mu(D_k(A)_\mathfrak{p}) = \mu(D_K(A_\mathfrak{p})) + \dim A/\mathfrak{p}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mu(D_K(A_\mathfrak{p})) = \operatorname{Dim} A_\mathfrak{p}$ ist. Sei $\mathfrak{p} A_\mathfrak{p} = A_\mathfrak{p} x_1 + \cdots + A_\mathfrak{p} x_s$, $s = \operatorname{Dim} A_\mathfrak{p}$. Nach dem weiter unten folgenden Hilfssatz (4.5) ist $D_K(A_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p} d_K x_1 + \cdots + A_\mathfrak{p} d_K x_s$. Wäre etwa $D_K(A_\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p} d_K x_1 + \cdots + A_\mathfrak{p} d_K x_{s-1}$, dann hätte die K-Algebra $R = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} := A_\mathfrak{p} x_1 + \cdots + A_\mathfrak{p} x_{s-1}$ einen trivialen universell-endlichen K-Differentialmodul $D_K(R) = D_K(A_\mathfrak{p})/A_\mathfrak{p} d_K \mathfrak{a}$ (hier wird Satz (3.2) benutzt!). Dann wäre aber, wie man leicht sieht, R ein Körper. (k_R ist separabel über K.) Widerspruch.

Bemerkung. Zum Primideal $\mathfrak{p}$ gehört die exakte Sequenz

$$\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 A_\mathfrak{p} \xrightarrow{h} D_k(A)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} D_k(A)_\mathfrak{p} \to D_k(A/\mathfrak{p})_{(0)} \to 0$$

von $(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} A_\mathfrak{p})$-Homomorphismen, wobei h von d induziert wird. Ist $\mathfrak{p}$ separabel, so ist die Gültigkeit der Formel in (4.4) offenbar äquivalent mit der Injektivität von h (vgl. [2], 3.1). Übrigens gibt es auch nichtseparable Primideale, für die die Formel aus (4.4) gilt; z. B. gilt sie für alle Primideale in Potenzreihenalgebren.

Für den allgemeinen Fall hat man statt (4.4) eine beidseitige Abschätzung für $\mu(D_k(A)_\mathfrak{p})$, die wir im nächsten Paragraphen herleiten.

(4.5). *Sei R ein lokaler Ring mit $\mathfrak{m}_R = Rx_1 + \cdots + Rx_s$. K sei ein Teilkörper von R derart, daß k_R separabel algebraisch über K ist. Ist $\delta: R \to M$ eine endliche K-Derivation, so ist $R\delta R = R\delta x_1 + \cdots + R\delta x_s$.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $M = R\delta R$ ist und δ auf $x_1, \ldots, x_s$ verschwindet, und haben dann zu zeigen, daß $M = 0$ ist. Es ist $\delta \mathfrak{m}_R \subseteqq \mathfrak{m}_R M$ wegen $\delta x_i = 0$. Also induziert δ eine K-Derivation δ' von k_R in $M' := M/\mathfrak{m}_R M$ mit $k_R \delta' k_R = M'$. Weil k_R separabel algebraisch über K ist, ist $\delta' = 0$. Aus $M' = 0$ folgt $M = 0$.

§ 5. Abschätzung von Erzeugendenzahlen

Sei A ein lokaler Ring mit Koeffizientenkörper k (vgl. die Definition in § 3). $D_k(A)$ existiere, ferner sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Allgemeiner als in (4.4) gilt dann folgende Aussage.

(5.1) Satz. *Es ist*

$$\operatorname{Dim} A_\mathfrak{p} + \operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{p}) \geqq \mu(D_k(A)_\mathfrak{p}) \geqq \operatorname{Dim} A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{trgrad}_k(k_A).$$

Beweis. Zunächst reduzieren wir die Behauptung auf den Fall, daß k_A endlich algebraisch über k ist. Sei $\operatorname{trgrad}_k(k_A) > 0$. Dann gibt es ein $x \in A$, dessen Restklasse in $A/\mathfrak{p}$ von der universell-endlichen k-Derivation auf ein Element in $D_k(A/\mathfrak{p})$ abgebildet wird, das kein Torsionselement ist und dessen Restklasse modulo $\mathfrak{m}_A$ transzendent über k ist. Für den Beweis dieser Behauptung können wir $\mathfrak{p} = 0$ annehmen. Es gibt ein $y \in A$, dessen Restklasse modulo $\mathfrak{m}_A$ transzendent über k ist. Bei $\mathfrak{m}_A = 0$ sei y außerdem so gewählt, daß $d_k y \neq 0$ ist. Sei daher nun $\dim A > 0$. Ist $A d_k \mathfrak{m}_A \subseteqq D_k(A)$ kein Torsionsmodul, so gibt es ein $z \in \mathfrak{m}_A$ mit $A d_k z \cong A$. Dann ist y oder $y + z$ ein Element der gewünschten Art. Es bleibt zu zeigen, daß $A d_k \mathfrak{m}_A$ kein Torsionsmodul ist. Angenommen, es gäbe ein $f \in A$, $f \neq 0$, mit $f d_k \mathfrak{m}_A = 0$. f ist Nichtnullteiler in der Komplettierung $\hat{A}$ von A, und es gilt $0 = f \hat{d}_k \mathfrak{m}_{\hat{A}} \subseteqq D_k(\hat{A})$, vgl. (1.6). Weil wir modulo eines minimalen Primideals rechnen können, nehmen wir an, daß $\hat{A}$ nullteilerfrei ist. Das heißt aber, wir können annehmen, A ist komplett. Es gibt einen Teilkörper $\tilde{k}$, der eine rein-transzendente Erweiterung von k ist und über dem k_A endlich algebraisch ist. Erst recht gilt $f d_{\tilde{k}} \mathfrak{m}_A = 0$. A ist eine analytische $\tilde{k}$-Algebra. Der Zusatz zu (4.1) liefert einen Widerspruch.

Ersetzen wir k durch $k' := k(x)$, so ist $\operatorname{trgrad}_{k'}(k_A) = \operatorname{trgrad}_k(k_A) - 1$ und $\operatorname{rang} D_{k'}(A/\mathfrak{p}) = \operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{p}) - 1$. Ferner ist $\mu(D_{k'}(A)_\mathfrak{p}) = \mu(D_k(A)_\mathfrak{p}) - 1$; s. den Beweis von (4.3). Die Ungleichungen gelten deshalb für k genau dann, wenn sie für k' gelten. Wir können von nun an annehmen, daß k_A algebraisch über k ist.

Aus der kanonischen exakten Sequenz

$$\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 A_\mathfrak{p} \to D_k(A)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} D_k(A)_\mathfrak{p} \to D_k(A/\mathfrak{p})_{(0)} \to 0$$

folgt die erste Ungleichung.

Zum Beweis der zweiten Ungleichung betrachten wir $\hat{A}$. $\hat{A}$ ist eine komplette analytische k-Algebra. K sei ein vollkommener Oberkörper von k. $B := \hat{A} \hat{\otimes}_k K$ ist eine analytische K-Algebra. Die Erweiterung $A \to B$ ist als Komposition zweier treu-flacher Erweiterungen treu-flach. $A/\mathfrak{p}$ und $B/\mathfrak{p}B$ haben dieselbe Dimension. $\mathfrak{q}$ sei ein minimales assoziiertes Primideal von $\mathfrak{p}B$ mit $\dim B/\mathfrak{q} = \dim A/\mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. Die Erweiterung

$A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ ist ebenfalls treu-flach und $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ ist primär zu $\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$. $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}^2 B_{\mathfrak{q}}$ ist freier $(B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}})$-Modul vom Rang $\operatorname{Dim} A_{\mathfrak{p}}$. Nach Theorem 2 aus [10] ist $\mu(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}) \leqq \operatorname{Dim} B_{\mathfrak{q}}$, deshalb auch $\operatorname{Dim} A_{\mathfrak{p}} \leqq \operatorname{Dim} B_{\mathfrak{q}}$.

Nach (2.7) und (1.6) ist weiterhin

$$D_K(B) = D_k(\hat{A}) \otimes_{\hat{A}} B = (D_k(A) \otimes_A \hat{A}) \otimes_{\hat{A}} B = D_k(A) \otimes_A B .$$

Daraus folgt wegen $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ auch $D_K(B)_{\mathfrak{q}} = D_k(A)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}$. Somit ist $\mu(D_K(B)_{\mathfrak{q}}) = \mu(D_k(A)_{\mathfrak{p}})$. Nach (4.4) ist $\mu(D_K(B)_{\mathfrak{q}}) = \operatorname{Dim} B_{\mathfrak{q}} + \dim B/\mathfrak{q}$. Daraus folgt die Behauptung.

Anmerkung. Der im Beweis verwendete Satz von Lech aus [10] läßt sich unter Verwendung homologischer Methoden erheblich kürzer beweisen. Etwas allgemeiner gilt sogar: *A sei ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A derart, daß $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ freier Modul über $A/\mathfrak{a}$ ist. Dann gilt* $\operatorname{rang} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \leqq \operatorname{Dim} A$. Zum Beweis kann man annehmen, daß A komplett und damit Restklassenring eines regulär lokalen Ringes R der Dimension $n := \operatorname{Dim} A$ nach einem Ideal $\mathfrak{r}$ ist. Sei $\mathfrak{b}$ das Ideal in R mit $\mathfrak{r} \subsetneqq \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\mathfrak{r}$. $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}/(\mathfrak{b}^2 + \mathfrak{r})$ ist Faktormodul von $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$; also enthält $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$, da $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ frei ist, diesen Modul als direkten Summanden über $R/\mathfrak{b} = A/\mathfrak{a}$. Nach einem bekannten Lemma von Kaplansky, das wir übrigens auch noch zum Beweis von (7.6) verwenden werden, gibt es dann in $\mathfrak{b}$ eine Primfolge der Länge $\operatorname{rang} \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$, die notwendigerweise $\leqq \dim R = n$ ist.

Wegen des Lokalisierungssatzes (1.8) hat (5.1) auch Bedeutung für beliebige noethersche k-Algebren mit universell-endlicher k-Derivation. Beispielsweise gilt:

(5.2) Korollar. *Ist A eine semi-analytische k-Algebra und $\mathfrak{p} \subsetneqq A$ ein Primideal, so ist*

$$\operatorname{Dim} A_{\mathfrak{p}} + \operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{p}) \geqq \mu(D_k(A)_{\mathfrak{p}}) \geqq \operatorname{Dim} A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p} .$$

Beweis. $\mathfrak{m} \subsetneqq A$ sei ein maximales Ideal mit $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{m}$. $A_{\mathfrak{m}}$ ist lokale k-Algebra, deren Restekörper algebraisch über k ist. Es ist $\dim A/\mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}}$, vgl. (2.3). Jetzt braucht man (5.1) nur noch auf $A_{\mathfrak{m}}$ anzuwenden.

§ 6. Reduzierte analytische Algebren

Um Sätze und Beweise bequemer formulieren zu können, besprechen wir zunächst einen auch allgemein nützlichen Rangbegriff.

Es sei im folgenden stets A ein noetherscher Ring. Ein A-Modul M heißt *Torsionsmodul*, wenn jedes Element von M von einem Nichtnullteiler aus A annulliert wird. Wir sagen, ein endlicher A-Modul M *besitzt einen Rang*, wenn es einen freien Untermodul F von M gibt derart, daß M/F Torsionsmodul ist.

Sei $A \to B$ eine flache Ringerweiterung von noetherschen Ringen. Besitzt der endliche A-Modul M einen Rang, so auch der B-Modul $M \otimes_A B$. Eine Umkehrung dieser Aussage ist beispielsweise dann möglich, wenn B Quotientenringerweiterung A_S von A nach einem multiplikativen System S ist, das nur aus Nichtnullteilern von A besteht. Insbesondere besitzt M genau dann einen Rang, wenn der A_S-Modul M_S frei ist, wobei S die Menge aller Nichtnullteiler von A ist; als $\operatorname{rang} M$ bezeichnet man dann den eindeutig bestimmten Rang von M_S.

(6.1). *Es sei A ein noetherscher Ring und M ein endlicher A-Modul. Äquivalent sind:*

(1) *M besitzt einen Rang.*

(2) *Die Moduln $M_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A$, sind frei und besitzen alle denselben Rang.*

(3) *$M^* = \operatorname{Hom}_A(M, A)$ besitzt einen Rang.*

Beweis. Sei S die Menge der Nichtnullteiler von A. Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A$, so ist $\mathfrak{p} \cap S$ leer, und $A_\mathfrak{p}$ ist eine Lokalisierung von A_S. Daher folgt (2) direkt aus (1).

Sei umgekehrt (2) erfüllt. Dann sind die Lokalisierungen von M_S nach maximalen Idealen von A_S, die sich in der Form $\mathfrak{p} A_S$, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A$ maximal, darstellen, freie Moduln eines festen Ranges. Dann ist auch M_S freier A_S-Modul; siehe etwa [5], Kapitel II, § 5, Theorem 1 und Proposition 5.

Dualisieren und Lokalisieren sind vertauschbar miteinander. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt dann daraus, daß über einem lokalen Ring der homologischen Kodimension 0 ein endlicher Modul genau dann frei ist, wenn sein Dual frei ist. (Man hat dann natürlich Ranggleichheit.) Zum Beweis der nichttrivialen Richtung kann man beispielsweise die Methode aus dem Beweis von (9.1) verwenden.

(6.2). *Es sei A ein noetherscher Ring und*

$$0 \to M_n \to \cdots \to M_1 \to 0$$

eine exakte Sequenz von endlichen A-Homomorphismen. Besitzen $n-1$ der M_i einen Rang, dann besitzen alle M_i einen Rang, und es ist $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{rang} M_i = 0$.

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall $n = 3$ zu betrachten. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A$. Zu zeigen ist nur, daß die exakte Sequenz

$$0 \to (M_3)_\mathfrak{p} \to (M_2)_\mathfrak{p} \to (M_1)_\mathfrak{p} \to 0$$

eine Sequenz von freien $A_\mathfrak{p}$-Moduln ist. Dies ist nur dann nicht trivial, wenn man zunächst nur weiß, daß $(M_3)_\mathfrak{p}$ und $(M_2)_\mathfrak{p}$ frei sind. In diesem Fall hat aber $(M_1)_\mathfrak{p}$ endliche homologische Dimension über $A_\mathfrak{p}$, und das maximale Ideal von $A_\mathfrak{p}$ besteht ganz aus Nullteilern; eine bekannte, einfache Überlegung zeigt dann, daß auch $(M_1)_\mathfrak{p}$ frei ist.

Eine direkte Folgerung von (6.2) ist übrigens das folgende Resultat von Auslander u. Buchsbaum in Ann. Math. **68** (1958), cor. 6.3 (sic!):

(6.3). *Es sei A ein noetherscher Ring, M ein endlicher A-Modul und*

$$0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

eine exakte Sequenz mit endlichen freien A-Moduln F_i. Dann ist äquivalent:

(1) $\operatorname{Ann} M \neq 0$.

(2) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \operatorname{rang} F_i = 0$.

(3) $\operatorname{Ann} M$ *enthält einen Nichtnullteiler.*

Kehren wir nun zu analytischen Algebren und ihren Differentialmoduln zurück. Eine semi-analytische k-Algebra A heißt *quasi-ungemischt*, wenn die minimalen Primideale von A sämtlich dieselbe Dimension haben. Ist A quasi-ungemischt, so sind, da A Restklassenring eines Macaulayringes ist und da die maximalen Ideale einer nullteilerfreien semi-analytischen k-Algebra alle dieselbe Kodimension haben, die Lokalisierungen von A nach beliebigen Primidealen quasi-ungemischte lokale Ringe im üblichen Sinne [14].

Der Bequemlichkeit halber führen wir folgende Redeweise ein, die die Definition separabler analytischer Algebren aus § 4 erweitert. Sei A eine semi-analytische k-Algebra. Ein Primideal $\mathfrak{q}$ von A heißt *separabel*, wenn $\operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{q}) = \dim A/\mathfrak{q}$ ist. A heißt *separabel*, wenn A reduziert ist und wenn jedes minimale Primideal von A separabel ist.

(6.4) Satz. *Sei A eine semi-analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A derart, daß $A_\mathfrak{p}$ quasi-ungemischt ist. Dann sind äquivalent:*

(1) *$D_k(A)_\mathfrak{p}$ besitzt einen Rang, und es ist $\operatorname{rang} D_k(A)_\mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p}$.*

(2) *$A_\mathfrak{p}$ ist reduziert, und die in $\mathfrak{p}$ enthaltenen minimalen Primideale von A sind separabel.*

Beweis. Sei $\mathfrak{a}$ der Kern der kanonischen Abbildung von A in $A_\mathfrak{p}$. Offenbar darf man bei der Lokalisierung A durch $A/\mathfrak{a}$ ersetzen. Wir dürfen also annehmen, daß A selbst quasi-ungemischt ist und daß $\mathfrak{p}$ alle minimalen Primideale von A enthält. Dann ist $q := \dim A = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p}$.

Sei jetzt (1) erfüllt. Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} A$, $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$. Es ist $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A_\mathfrak{p}$. Folglich ist $D_k(A)_\mathfrak{q}$ frei vom Rang q. Nach (5.2) ist $q \geqq \operatorname{Dim} A_\mathfrak{q} + \dim A/\mathfrak{q} \geqq \dim A_\mathfrak{q} + \dim A/\mathfrak{q} = q$; man beachte, daß A quasi-ungemischt ist. Es folgt $\operatorname{Dim} A_\mathfrak{q} = \dim A_\mathfrak{q}$. $A_\mathfrak{q}$ ist also regulär. $A_\mathfrak{p}$ ist demnach reduziert. Wegen $D_k(A)_\mathfrak{q} \cong D_k(A/\mathfrak{q})_{(0)}$ ist $\mathfrak{q}$ separabel in A.

Sei umgekehrt (2) erfüllt. Ist $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} A$, $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$, so ist $D_k(A)_\mathfrak{q} \cong D_k(A/\mathfrak{q})_{(0)}$ nach (2) frei vom Rang q. Nach (6.1) besitzt $D_k(A)_\mathfrak{p}$ dann den Rang q.

Bei $\operatorname{char} k = 0$ kann man (6.4) verschärfen; s. (8.8).

Ist $M \neq 0$ ein endlicher Modul über einem lokalen Ring A, so sei mit $\operatorname{codh} M = \operatorname{codh}_A M$ die *homologische Kodimension* (auch *Tiefe* oder *profondeur* genannt) bezeichnet.

Als Anwendung von (6.4) zeigen wir noch einen Satz über Existenz separabler Primideale und reduzierter Hauptklassenideale. Zunächst ein Hilfssatz:

(6.5). *Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlicher A-Modul, der einen Rang besitzt. Ferner sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A, $\mathfrak{a} \neq A$.*

(1) *Ist $\operatorname{Ass} A/\mathfrak{a} \subseteqq \operatorname{Frei} M$, so besitzt $M/\mathfrak{a}M$ einen Rang über $A/\mathfrak{a}$, und zwar denselben Rang wie M über A.*

(2) *Seien $f, g \in A$. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A mit $g \notin \mathfrak{p}$, so sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Frei} M$; ferner sei g, f eine Primfolge in A. Dann ist $\operatorname{Ass} A/Af \subseteqq \operatorname{Frei} M$, und M/fM besitzt einen Rang über A/Af, der gleich dem von M über A ist.*

Beweis. (1) ist trivial wegen (6.1), (2). Um (2) zu beweisen, sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A/Af$. Bei $g \in \mathfrak{p}$ wäre $\{g, f\}$ und damit $\{f, g\}$ eine Primfolge in $A_\mathfrak{p}$; Widerspruch! Also ist $g \notin \mathfrak{p}$, so daß $M_\mathfrak{p}$ frei ist. Der Rest der Behauptung ergibt sich jetzt aus (1).

(6.6) Satz. *Es sei A eine reindimensionale separable lokale analytische k-Algebra. Ist s eine ganze Zahl mit $1 \leqq s \leqq \operatorname{codh} A$, dann gibt es eine Primfolge $f_1, \ldots, f_s$ in A derart, daß $Af_1 + \cdots + Af_s$ Durchschnitt von endlich vielen separablen Primidealen und einem $\mathfrak{m}_A$-primären Ideal ist. (Bei $s < \operatorname{codh} A$ ist $Af_1 + \cdots + Af_s$ notwendig reduziert.)*

Beweis. Es genügt offenbar, den Fall $s = 1$ zu behandeln. Sei $r := \dim A$. Nach (6.4) besitzt $D_k(A)$ den Rang r. Eine einfache Überlegung (Spezialfall von Hilfssatz (7.2)) zeigt, daß es ein Parametersystem $g_1, \ldots, g_r$ in A gibt dergestalt, daß $F := Adg_1 + \cdots + Adg_r$ ein freier Untermodul des Ranges r von $D_k(A)$ ist. Es gibt einen Nichtnullteiler $g \in \mathfrak{m}_A$ mit $gD_k(A) \subseteqq F$. Bei $r = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei daher jetzt $r \geqq 2$. $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ seien die von $\mathfrak{m}_A$ verschiedenen Primideale aus $\operatorname{Ass} A/Ag$. Wir betrachten die reguläre analytische k-Algebra $S := k\langle\langle g_1, \ldots, g_r\rangle\rangle \subseteqq A$. A ist endlich über S, und daher gibt es Elemente $h_1, \ldots, h_r$ in S mit $\mathfrak{m}_S = Sh_1 + \cdots + Sh_r$ und $h_1 \notin \mathfrak{p}_i$, $1 \leqq i \leqq m$. Es ist $F = AdS = Adh_1 + \cdots + Adh_r$. Daher sind auch die $dh_1, \ldots, dh_r$ linear unabhängig über A, und es gilt: $gD_k(A) \subseteqq Adh_1 + \cdots + Adh_r$.

Wir behaupten: $f := h_1$ genügt den Anforderungen des Satzes. Da $B := A/Af$ quasi-ungemischt ist, genügt es nach (6.4), folgendes zu zeigen: Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus A mit $f \in \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}_A$ besitzt $D_k(B)_{\mathfrak{p}/Af}$ den Rang $\dim B = r - 1$. Sei $M := (D_k(A)/Adf)_\mathfrak{p}$. Dieser Modul besitzt den Rang $r-1$ über $A_{\mathfrak{p}}$. Es ist $D_k(B)_{\mathfrak{p}/Af} = M/fM$. Es ist gM enthalten in einem freien Modul des Ranges $r-1$. Ist $g \in \mathfrak{p}$, so ist nach Konstruktion g, f eine Primfolge in $A_{\mathfrak{p}}$. Nach (6.5) ergibt sich nun das Gewünschte.

Schließlich geben wir noch zwei Sätze an, die als Regularitätskriterien verwendet werden können.

Sei A eine semi-analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Ist $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ frei vom Rang $\dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p}$, so ist $\operatorname{Dim} A_{\mathfrak{p}} = \dim A_{\mathfrak{p}}$ nach (5.2); $A_{\mathfrak{p}}$ ist dann also regulär. Wegen (6.4) gilt somit beispielsweise:

(6.7) Satz. *Sei A eine semi-analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A derart, daß $A_{\mathfrak{p}}$ reduziert und reindimensional ist; die in $\mathfrak{p}$ enthaltenen minimalen Primideale von A seien separabel. Ist $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ frei, so ist $A_{\mathfrak{p}}$ regulär.*

Umgekehrt hat man:

(6.8) Satz. *Sei A eine semi-analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein separables Primideal in A derart, daß $A_{\mathfrak{p}}$ regulär ist. Dann ist $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ frei vom Rang $q := \dim A_{\mathfrak{p}} + \dim A/\mathfrak{p}$. Überdies ist das in $\mathfrak{p}$ enthaltene minimale Primideal $\mathfrak{q}$ von A separabel.*

Es ist nämlich $\mu(D_k(A)_{\mathfrak{p}}) \leqq \operatorname{Dim} A_{\mathfrak{p}} + \operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}} + \operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{p}) = q \leqq \operatorname{rang} D_k(A)_{\mathfrak{q}} = \operatorname{rang} D_k(A)_{\mathfrak{p}}$.

Zur späteren Verwendung notieren wir noch den folgenden wohlbekannten Satz (s. [2]).

(6.9). *Sei A eine analytische k-Algebra, wobei* $\operatorname{char} k = 0$ *ist, und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Genau dann ist $A_{\mathfrak{p}}$ regulär, wenn $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ freier Modul über $A_{\mathfrak{p}}$ ist.*

Mit der Konstruktion von § 3 reduziert man die Aussage übrigens sofort auf den Fall: $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_A$, A komplett. Man kann dann auch annehmen, daß k voller Koeffizientenkörper von A ist, A also Restklassenalgebra eines formalen Potenzreihenringes über k ist. Dann ist (6.9) aber trivial.

§ 7. Komplettierung von Lokalisierungen

Es sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\delta: A \to M$ eine Derivation.

Mit $T(A)$ sei im folgenden die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet, die kein Vielfaches von $\operatorname{char} A$ sind. Man sieht leicht:

(7.1). *A sei Integritätsring. Sind $x, y \in A$, x δ-frei, dann ist $x^t + y$ δ-frei für fast alle $t \in T(A)$.*

(7.2) Hilfssatz. *Es seien A ein Ring, A_j Integritätsringe, $h_j: A \to A_j$ Homomorphismen und $\delta_j: A_j \to M_j$ Derivationen, $j = 1, \ldots, m$. Es sei R eine unter Addition und Multiplikation abgeschlossene Teilmenge von A derart, daß* $\operatorname{rang} A_j \delta_j h_j(R) \geqq s$ *ist. Dann gilt:*

(1) *Es gibt Elemente* $x_1, \ldots, x_s \in R$ *derart, daß* $\{h_j(x_1), \ldots, h_j(x_s)\}$ δ_j*-frei ist,* $j = 1, \ldots, m$.

(2) *Ist A semilokal,* $R = \mathfrak{m}_A$*, sind die* A_j *endlich über A und ist* $s \geqq \dim A_j$ *für* $j = 1, \ldots, m$*, so können die* x_i *außerdem so gewählt werden, daß* $\{h_j(x_1), \ldots, h_j(x_s)\}$ *Teil eines Parametersystems von* A_j *ist,* $j = 1, \ldots, m$.

Beweis. Sei zunächst $s = 1$. Wir führen Induktion über m. Der Schluß von m auf $m+1$ wird wie folgt geführt. Sei $x \in R$, $h_j(x)$ δ_j-frei für $j = 1, \ldots, m$, $y \in R$, $h_{m+1}(y)$ frei bezüglich δ_{m+1}. Nach (7.1) gibt es ein $t \in T := T(A_1) \cap \cdots \cap T(A_{m+1})$ derart, daß $h_j(x^t + y)$ δ_j-frei ist für $j = 1, \ldots, m$. Die Bedingungen von (2) sind automatisch erfüllt, da ja $h_j(x) \neq 0$ ist. Man kann aber in diesem Fall x auch noch so wählen, daß $h_j(x)$ in A_j endlich viele vorgegebene nicht-maximale Primideale vermeidet. Ist nämlich $z \in \mathfrak{m}_A$ so gewählt, daß $h_j(z)$ die besagten Primideale sämtlich vermeidet, $j = 1, \ldots, m$, dann sind auch $h_j(x + z^t)$ δ_j-frei und vermeiden die Primideale für fast alle $t \in T$. Damit ist dann auch der ansonsten triviale Induktionsschluß von s auf $s+1$ gesichert.

(7.3) Satz. *Sei A eine analytische k-Algebra und* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal in A.* $A_\mathfrak{p}$ *sei reduziert, und die in* $\mathfrak{p}$ *enthaltenen minimalen Primideale von A seien separabel. Dann gibt es ein Bezugssystem* $\mathfrak{S}$ *in A für* $\mathfrak{p}$ *derart, daß* $\hat{A}_\mathfrak{p}$ *bezüglich des Koeffizientenkörpers K, der mit Hilfe von* $\mathfrak{S}$ *wie in § 3 konstruiert wird, eine separable analytische Algebra ist.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß A lokal und separabel ist und daß alle minimalen Primideale $\mathfrak{q}_i$ von A in $\mathfrak{p}$ enthalten sind. Nach (7.2) gibt es ein freies Bezugssystem $\mathfrak{S} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ in A für $\mathfrak{p}$, das zudem frei ist bezüglich der universell-endlichen k-Derivationen der Ringe $A/\mathfrak{q}_i$. Sei $B := k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_r \rangle\!\rangle$ und K der Quotientenkörper von B in $A_\mathfrak{p}$. Dieses K hat die gewünschten Eigenschaften.

Zum Beweis betrachten wir die Restklassenabbildungen $A \to A/\mathfrak{q}_i$. Da das Nullideal in $\hat{A}_\mathfrak{p}$ die Darstellung $0 = \bigcap_i \mathfrak{q}_i \hat{A}_\mathfrak{p}$ hat, genügt es zu zeigen, daß $\hat{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_i \hat{A}_\mathfrak{p}$ separabel bezüglich K ist. Wegen $\hat{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_i \hat{A}_\mathfrak{p} = (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_i A_\mathfrak{p})^\wedge = ((A/\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_i})^\wedge$ und der Verträglichkeit der Konstruktion von K mit Restklassenbildung (vgl. (3.1) und die Vorbemerkungen dazu) können wir also annehmen, daß A sogar nullteilerfrei ist.

Nach Konstruktion ist $A\,d f_1 + \cdots + A\,d f_r \cong A^r$. Deshalb ist $D_K(A_\mathfrak{p}) = (D_k(A)/A\,d f_1 + \cdots + A\,d f_r)_\mathfrak{p}$ ein Modul vom Rang $\dim A - r = \dim A_\mathfrak{p}$. $D_K(A_\mathfrak{p})^\wedge$ ist der universell-endliche K-Differentialmodul von $\hat{A}_\mathfrak{p}$ nach (3.2) und (1.6); dieser Modul über $\hat{A}_\mathfrak{p}$ besitzt offenbar den Rang $\dim A_\mathfrak{p}$. Bekanntlich ist $\hat{A}_\mathfrak{p}$ quasi-ungemischt (etwa [14], 34.9). Nach (6.4) ist $\hat{A}_\mathfrak{p}$ daher separabel.

(7.4) Korollar. *Sei A eine separable analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Dann ist $A_\mathfrak{p}$ analytisch unverzweigt.*

Anmerkung. Unter Verwendung anderer Methoden läßt sich (7.4) allgemeiner für beliebige separable semi-analytische k-Algebren A beweisen: Sei zunächst $\mathfrak{p}$ maximal. Wir dürfen annehmen, daß A nullteilerfrei ist. $\hat{A}_\mathfrak{p}$ ist dann eine analytische k-Algebra, deren Differentialmodul $(D_k(A)_\mathfrak{p})^\wedge$ den Rang $\dim \hat{A}_\mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p}$ besitzt. Nach (6.4) ist $\hat{A}_\mathfrak{p}$ reduziert. Sei jetzt $\mathfrak{p}$ beliebig und $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A mit $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{m}$. Nach dem Vorstehenden ist $\hat{A}_\mathfrak{m}$ reduziert. Nach einer Konstruktion wie im Beweis zu (8.9) genügt es zu zeigen, daß die Lokalisierungen von $\hat{A}_\mathfrak{m}$ analytisch unverzweigt sind. Dies ist aber (32.1) und (36.4) in [14].

(7.2) garantiert die Existenz von Bezugssystemen, die modulo gewisser vorgegebener Primideale frei sind. Unter anderem läßt sich damit folgendes Ergebnis anwenden.

(7.5) Satz. *Sei A eine analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A derart, daß $A_\mathfrak{p}$ reduziert ist. Sei $\mathfrak{S} = \{f_1, \ldots, f_r\}$ ein freies Bezugssystem in A für $\mathfrak{p}$, das auch frei bezüglich der universell-endlichen k-Derivationen von $A/\mathfrak{q}_i$ ist, wobei $\mathfrak{q}_i$ die in $\mathfrak{p}$ enthaltenen minimalen Primideale von A durchläuft. Sei K der Quotientenkörper von $k\langle\!\langle f_1, \ldots, f_r\rangle\!\rangle$ in $A_\mathfrak{p}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{dh}_{A_\mathfrak{p}} D_k(A)_\mathfrak{p} = \mathrm{dh}_{\hat{A}_\mathfrak{p}} D_K(\hat{A}_\mathfrak{p}) .$$

Beweis. Sei $R := A_\mathfrak{p}$. Nach (3.3) ist $\hat{R}$ analytische K-Algebra. Ferner ist $D_K(\hat{R}) = D_K(R)^\wedge$, und $D_K(R)$ und $D_K(\hat{R})$ haben dieselbe homologische Dimension. Betrachten wir nun die exakte Sequenz

$$0 \to F_\mathfrak{p} \to D_k(A)_\mathfrak{p} \to D_K(R) \to 0 ,$$

wobei $F := A\,df_1 + \cdots + A\,df_r$ ist. Nach Voraussetzung über $\mathfrak{S}$ und die in $\mathfrak{p}$ enthaltenen minimalen Primideale von A ist $F_\mathfrak{p} \cong R^r$. Da $\mathfrak{S}$ frei ist, sind nach (4.3) die Basiselemente von $F_\mathfrak{p}$ Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $D_k(A)_\mathfrak{p}$. Jetzt ist die Behauptung klar.

(7.6) Satz. *A sei eine analytische k-Algebra und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A derart, daß $A_\mathfrak{p}$ reduziert ist. $\mathfrak{p}$ und die in $\mathfrak{p}$ enthaltenen minimalen Primideale von A seien separabel. Dann sind äquivalent:*

(1) *$A_\mathfrak{p}$ ist vollständiger Durchschnitt.*

(2) *Es ist* $\mathrm{dh}_{A_\mathfrak{p}} D_k(A)_\mathfrak{p} \leqq 1$.

Den entsprechenden Satz in der algebraischen Geometrie findet man bei [8] und [18]. Zum Begriff des abstrakten vollständigen Durchschnitts, den wir hier verwenden, sei z. B. auf [17], § 1, verwiesen. Für Verallgemeinerungen von (7.6) brauchte man den Begriff des relativen vollständigen Durchschnitts.

Nun zum *Beweis.* Wegen (7.3), (7.5) und der Komplettierungsinvarianz von (1) und (2) können wir annehmen, daß A komplett und $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}_A$ ist. A besitzt dann einen k umfassenden vollen Koeffizientenkörper, den wir wieder mit k bezeichnen. A ist jetzt Restklassenalgebra einer Potenzreihenalgebra P über k, $A = P/\mathfrak{a}$. Man sieht sofort, daß $\mathrm{dh}_A D_k(A) \leqq 1$ genau dann gilt, wenn der $(A/\mathfrak{a})$-Modul $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ einen freien direkten Summanden des Ranges $\dim P - \dim A$ besitzt. Dieses wiederum bedeutet nach einem Lemma von Kaplansky, daß $\mathfrak{a}$ von einer Primfolge erzeugt wird (man verwendet zum Beweis dieses Lemmas (6.3)), d. h. daß A ein vollständiger Durchschnitt ist. Der vorstehende Beweis ist in den Einzelheiten in [16] ausgeführt.

Anmerkung. Die Sätze (6.4), (6.6) und (7.6) gelten bei sinngemäßer Abänderung ohne Separabilitätsvoraussetzungen, wenn $[k : k^p] = p^e$ endlich ist und k vollständig bewertet ist. Statt $D_k(A)$ verwendet man $D^\infty(A) = D(A)$; bei Rangbetrachtungen ist e zu berücksichtigen. Einzelheiten findet man in [16]. Die Methode, bei $[k : k^p] < \infty$ den Modul $D(A)$ statt des Moduls $D_k(A)$ zu verwenden, ist schon in [2] beschrieben (z. B. Regularitätskriterien ohne Separabilitätsvoraussetzungen).

§ 8. Charakteristik Null

In diesem Paragraphen sei k ein Körper der Charakteristik 0. Wir untersuchen noethersche k-Algebren mit universell-endlicher k-Derivation.

(8.1). *Sei A eine lokale k-Algebra. Sei $\tau := \mathrm{trgrad}_k(k_A)$. Besitzt A eine universell-endliche k-Derivation $d : A \to D_k(A)$, dann ist τ endlich, und es gilt:* $\mu(D_k(A)) = \mathrm{Dim}\, A + \tau$.

Beweis. Als Restklassenalgebra von A besitzt auch k_A eine universell-endliche k-Derivation. Bekanntlich bilden dann die Differentiale einer Transzendenzbasis von k_A über k eine k_A-Basis von $D_k(k_A)$. Daher ist τ endlich. Seien $a_1, \ldots, a_\tau$ Elemente von A, die modulo $\mathfrak{m}_A$ eine Transzendenzbasis von k_A über k ergeben. Sei k' der Quotientenkörper von $k[a_1, \ldots, a_\tau]$. Offenbar ist $k' \subsetneqq A$ und k_A algebraisch über k'. Die Differentiale da_i sind Teil eines minimalen Erzeugendensystems von $D_k(A)$, da dies sogar für $D_k(k_A)$ gilt. Es ist $D_{k'}(A) = D_k(A)/A\,da_1 + \cdots + A\,da_\tau$. Wir können deshalb $\tau = 0$ annehmen.

Sei also jetzt k_A algebraisch über k. Wir haben zu zeigen: $\mu(D_k(A)) = \mathrm{Dim}\, A$. Es ist $\mu(D_k(A/\mathfrak{m}_A^2)) = \mu(D_k(A))$ und $\mathrm{Dim}\, A/\mathfrak{m}_A^2 = \mathrm{Dim}\, A$. Wir dürfen also $\mathfrak{m}_A^2 = 0$ annehmen. Es gibt dann einen vollen Koeffizientenkörper K in A, der k umfaßt. Da d auf K verschwindet, ist $D_k(A) = D_K(A)$. A ist komplette analytische K-Algebra. Ein trivialer Fall von (4.4) liefert das Gewünschte.

(8.2) Hilfssatz. *A sei nullteilerfreie lokale k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation. Dann ist $\hat{A}$ reduziert und reindimensional.*

Beweis. Nach einer Konstruktion wie im Beweis zu (8.1) können wir annehmen, daß k_A algebraisch über k ist. Es ist $D_k(\hat{A}) = D_k(A)^{\hat{}}$. In $\hat{A}$ gibt es einen vollen Koeffizientenkörper K mit $k \subsetneqq K$. $\hat{A}$ ist komplette analytische K-Algebra und es ist $D_K(\hat{A}) = D_k(\hat{A})$. Da $D_k(A)$ einen Rang q besitzt, gilt dies auch für $D_K(\hat{A})$. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} \hat{A}$. Dann ist $D_K(\hat{A})_\mathfrak{p}$ frei vom Rang q. Nach (6.9) ist $\hat{A}_\mathfrak{p}$ regulär, also ein Körper. Es folgt, $\hat{A}$ ist reduziert. Nach (4.4) ist $q = \mu(D_K(\hat{A})_\mathfrak{p}) = \operatorname{Dim} \hat{A}_\mathfrak{p} + \dim \hat{A}/\mathfrak{p} = \dim \hat{A}/\mathfrak{p}$.

(8.3) Satz. *Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation. Dann ist A universeller Kettenring.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß jede endlich erzeugte A-Algebra dem Kettensatz für Primideale genügt. Dazu braucht man nur Polynomalgebren $P = A[X_1, \ldots, X_n]$ zu betrachten. Es genügt, den Kettensatz für Lokalisierungen $P_\mathfrak{m}$ nach maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ von P zu beweisen. Offenbar darf man dann A nach einem $\mathfrak{m} \cap A$ enthaltenden maximalen Ideal lokalisieren. Wir nehmen also an, daß A lokal ist. Da die minimalen Primideale von P gerade die Erweiterungen der minimalen Primideale von A sind, können wir A auch nullteilerfrei annehmen. Nach (8.2) ist A quasi-ungemischt. Die Behauptung folgt jetzt aus:

(8.4) Lemma. *Jeder quasi-ungemischte lokale Ring ist ein universeller Kettenring.*

Man beweist dieses Lemma etwa mit [15], Lemma 2.7 und [14], (34.5).

(8.5) Satz. *Sei A eine lokale k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p} \subsetneqq A$ ein Primideal. Sei $\tau := \operatorname{trgrad}_k(k_A)$. Dann ist $\mu(D_k(A)_\mathfrak{p}) = \operatorname{Dim} A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} + \tau$.*

Beweis. Nach (8.2) gibt es in der Komplettierung $\hat{A}$ von A ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\dim \hat{A}/\mathfrak{q} = \dim A/\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}\hat{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\hat{A}_\mathfrak{q}$. Aus der zweiten Gleichung folgt, da $A_\mathfrak{p} \to \hat{A}_\mathfrak{q}$ eine treu-flache Erweiterung ist, daß $\operatorname{Dim} \hat{A}_\mathfrak{q} = \operatorname{Dim} A_\mathfrak{p}$ ist. Wegen $D_k(\hat{A})_\mathfrak{q} = D_k(A)_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \hat{A}_\mathfrak{q}$ ist auch $\mu(D_k(\hat{A})_\mathfrak{q}) = \mu(D_k(A)_\mathfrak{p})$. Wir können also annehmen, daß A komplett ist. Durch eine Konstruktion wie zu Beginn des Beweises von (5.1) reduziert man das Problem auf den Fall $\tau = 0$. Dann gibt es einen vollen Koeffizientenkörper K in $\hat{A}$ mit $k \subsetneqq K$, so daß K algebraisch über k ist. Wegen $D_k(\hat{A}) = D_K(\hat{A})$ ist die Aussage dann nichts anderes als (4.4).

(8.6) Korollar. *Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation. Dann besitzt A eine endliche Krulldimension, die durch die Minimalanzahl von Erzeugenden von $D_k(A)$ beschränkt ist.*

Zum Beweis zieht man neben (8.5) noch (1.8) heran.

(8.7) Regularitätskriterium. *Es sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Genau dann ist $A_\mathfrak{p}$ regulär, wenn $D_k(A)_\mathfrak{p}$ frei ist.*

Beweis. Wegen (1.8) können wir annehmen, daß A lokal ist. Wie im Beweis zu (8.5) reduziert man das Problem auf den Fall, daß A komplett ist. Sei $\tau := \operatorname{trgrad}_k(k_A)$.

Sei $A_\mathfrak{p}$ regulär und $\mathfrak{q}$ das in $\mathfrak{p}$ enthaltene minimale Primideal von A. Da A die Kettenbedingung erfüllt, ist $\dim A/\mathfrak{q} = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p}$. Nach (8.5) ist $\operatorname{rang} D_k(A)_\mathfrak{p} = \mu(D_k(A)_\mathfrak{q}) = \dim A/\mathfrak{q} + \tau = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} + \tau = \mu(D_k(A)_\mathfrak{p})$. Daher ist $D_k(A)_\mathfrak{p}$ frei.

Sei umgekehrt $D_k(A)_\mathfrak{p}$ frei. Durch eine Konstruktion wie zu Beginn des Beweises von (5.1) reduziert man das Problem auf den Fall $\tau = 0$ und dann wie üblich darauf, daß k ein voller Koeffizientenkörper ist. Es bleibt übrig, (6.9) anzuwenden.

Bemerkung. Unter unserer Voraussetzung $\operatorname{char} k = 0$ gilt allgemeiner als in (7.6) folgender Satz: *Es sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p} \subsetneqq A$ ein Primideal. $A_\mathfrak{p}$ ist genau dann (abstrakter) reduzierter vollständiger Durchschnitt, wenn $D_k(A)_\mathfrak{p}$ die homologische Dimension $\leqq 1$ über $A_\mathfrak{p}$ hat.* Die Aussage wird mit schon vielfach benutzten Schlüssen (Komplettieren, Methode von (7.5), Grundkörper zum vollen Koeffizientenkörper erweitern) auf (7.6) zurückgeführt; außerdem wird (8.7) benutzt, um aus der Bedingung über die homologische Dimension die Reduziertheit von $A_\mathfrak{p}$ zu gewinnen.

(8.8) Satz. *Sei A eine lokale k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Es sei $\tau := \operatorname{trgrad}_k(k_A)$. Genau dann besitzt $D_k(A)_\mathfrak{p}$ einen Rang, wenn $A_\mathfrak{p}$ reduziert und reindimensional ist. In diesem Fall ist $\operatorname{rang} D_k(A)_\mathfrak{p} = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p} + \tau$.*

Beweis. $D_k(A)_\mathfrak{p}$ besitze einen Rang q. Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} A$, $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} A_\mathfrak{p}$, und folglich ist $D_k(A)_\mathfrak{q}$ frei vom Rang q. Nach (8.7) ist $A_\mathfrak{q}$ regulär, also ein Körper. $A_\mathfrak{p}$ ist also reduziert. Nach (8.5) ist ferner $q = \operatorname{Dim} A_\mathfrak{q} + \dim A/\mathfrak{q} + \tau = \dim A/\mathfrak{q} + \tau$. Jedes in $\mathfrak{p}$ enthaltene minimale Primideal besitzt also die Dimension $q - \tau$. Nach (8.2) und (8.3) ist $A_\mathfrak{p}$ reindimensional, und man kann weiter schreiben: $q - \tau = \dim A_\mathfrak{p} + \dim A/\mathfrak{p}$.

Sei umgekehrt $A_\mathfrak{p}$ reduziert und reindimensional. Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Ass} A$, $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$. $D_k(A)_\mathfrak{q}$ ist ein Vektorraum über $A_\mathfrak{q}$ und hat nach (8.5) die Dimension $\dim A/\mathfrak{q} + \tau$. Da $A_\mathfrak{p}$ reindimensional ist, folgt mit (8.3), daß $\dim A/\mathfrak{q} + \tau$ konstant ist. Nach (6.1) besitzt daher $D_k(A)_\mathfrak{p}$ einen Rang.

In Verallgemeinerung von (8.2) läßt sich nun beweisen:

(8.9) Satz. *Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Ist $A_{\mathfrak{p}}$ reduziert und reindimensional, so gilt dasselbe für die Komplettierung von $A_{\mathfrak{p}}$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß A lokal ist. Sei $A_{\mathfrak{p}}$ reduziert und reindimensional. Offenbar dürfen wir weiter annehmen, daß $A_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist, und daher sogar, daß A selbst nullteilerfrei ist (Restklassenbildung nach dem Kern von $A \to A_{\mathfrak{p}}$). Nach (8.2) ist dann $B := \hat{A}$ reduziert und reindimensional; ferner gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ in B mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p} B_{\mathfrak{q}}$ primär zu $\mathfrak{q} B_{\mathfrak{q}}$. B ist bezüglich eines k umfassenden vollen Koeffizientenkörpers eine analytische Algebra. Nach (7.4) ist $(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge}$ reduziert; außerdem ist dieser Ring reindimensional, da $B_{\mathfrak{q}}$ reindimensional und Restklassenring eines Macaulayringes ist. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A_{\mathfrak{p}})^{\wedge} & \longrightarrow & (B_{\mathfrak{q}})^{\wedge} \end{array}$$

von natürlichen Homomorphismen, die sämtlich treu und flach sind. Daß dabei der untere horizontale Homomorphismus flach ist, sieht man z. B. mit [14], (18.8). Es folgt zunächst, daß $(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$ reduziert ist. Sei $\mathfrak{r} \in \operatorname{Ass}(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$. Dann gibt es eine Einbettung von $(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge}/\mathfrak{r}$ in $(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$ und folglich eine Einbettung von $(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge}/\mathfrak{r}(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge}$ in $(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge}$. Somit ist $\dim(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge}/\mathfrak{r}(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge} = \dim(B_{\mathfrak{q}})^{\wedge}$ und daher $\dim(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge}/\mathfrak{r} = \dim(A_{\mathfrak{p}})^{\wedge}$.

Satz (8.9) folgt bekanntlich auch aus dem folgenden Satz.

(8.10) Satz. *Jede noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation ist ausgezeichnet.*

Der *Beweis* ergibt sich fast unmittelbar mit (8.3) und (8.7). Zum Begriff der ausgezeichneten Ringe sei auf [9] verwiesen. Einen anderen Beweis von (8.10) gibt Bingener in [3] an.

Zur späteren Verwendung leiten wir in Verallgemeinerung des Satzes (5.1) aus [17] ein differentielles Kriterium für algebraische Abhängigkeit von Idealen her.

Definition. Sei A ein Ring, M ein A-Modul und $\delta: A \to M$ eine Derivation mit $M = A\delta A$. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien zwei Ideale in A. Wir nennen $\mathfrak{b}$ *differentiell abhängig* von $\mathfrak{a}$ bezüglich δ (kurz: *δ-abhängig*), wenn $\delta\mathfrak{b} \subseteq A\delta\mathfrak{a} + \mathfrak{b}M$ ist.

Wegen der Produktregel gilt übrigens $\mathfrak{a}M \subseteq A\delta\mathfrak{a}$. Ist E eine Teilmenge von A, so ist $\mathfrak{a} + AE$ genau dann δ-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn $\delta E \subseteq A\delta\mathfrak{a} + EM$ ist. Insbesondere ist $\mathfrak{b}$ genau dann δ-abhängig von $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ δ-abhängig von $\mathfrak{a}$ ist.

Sei $\varphi: A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\eta: B \to N$ eine Ausdehnung von δ mit $N = B\eta B$. *Ist das Ideal* $\mathfrak{b} \subseteq A$ δ*-abhängig von* $\mathfrak{a} \subseteq A$, *so ist* $\mathfrak{b}B$ η*-abhängig von* $\mathfrak{a}B$.

(8.11) Satz. *Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation d. Sei* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal in A und* $d_{\mathfrak{p}}$ *die universelle Ausdehnung von d nach der Lokalisierung* $A_{\mathfrak{p}}$. *Sind* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zwei von* $A_{\mathfrak{p}}$ *verschiedene Ideale in* $A_{\mathfrak{p}}$ *und ist* $\mathfrak{b}$ $d_{\mathfrak{p}}$*-abhängig von* $\mathfrak{a}$, *so ist* $\mathfrak{b}$ *ganz-algebraisch über* $\mathfrak{a}$; *insbesondere ist* $\mathfrak{b}$ *im Radikal von* $\mathfrak{a}$ *enthalten.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ annehmen. $\mathfrak{b}$ ist genau dann ganz-algebraisch über $\mathfrak{a}$, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^n = \mathfrak{b}^{n+1}$. Dieser Begriff ist somit invariant unter treu-flachen Erweiterungen.

Nach (1.8) können wir annehmen, daß A lokal ist. In der Komplettierung von A gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$. $\hat{A}$ ist analytische K-Algebra bezüglich eines Koeffizientenkörpers, der k umfaßt. Die universell-endliche K-Derivation δ von $\hat{A}$ ist eine Ausdehnung von $\hat{d}$. $\{f_1, \ldots, f_r\}$ sei ein Bezugssystem in $\hat{A}$ für $\mathfrak{q}$. L sei der Quotientenkörper von $K[\![f_1, \ldots, f_r]\!]$ in $B := \hat{A}_{\mathfrak{q}}$. Die universell-endliche L-Ausdehnung η von δ nach $\hat{B}$ ist eine Ausdehnung von $d_{\mathfrak{p}}$, da man sie als eine Ausdehnung der universellen Ausdehnung von δ nach B auffassen kann. $\hat{B}$ ist treuflach über $A_{\mathfrak{p}}$, und η ist nach (3.2) universell-endliche L-Derivation von $\hat{B}$. Es genügt deshalb, den Satz für die analytische L-Algebra $\hat{B}$ zu kennen. Da $\hat{B}$ einen L umfassenden Koeffizientenkörper besitzt, ist dies aber genau Satz (5.1) in [17].

Zum Schluß wollen wir die Lokalisierungstheorie von § 3 für k-Algebren beschreiben, die nicht notwendig semi-analytisch sind. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz.

(8.12). *A sei lokale reduzierte reindimensionale k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation d. Ist* $f_1, \ldots, f_r$ *ein Parametersystem in A, so ist* $A\,df_1 + \cdots + A\,df_r \cong A^r$.

Beweis. Nach (1.6) und (8.9) können wir annehmen, daß A komplett ist. Es gibt dann einen vollen Koeffizientenkörper $K \subseteq A$, der k umfaßt. Da $D_K(A)$ Faktormodul von $D_k(A)$ ist, dürfen wir gleich $k = K$ annehmen. Ferner genügt es zu zeigen, daß $df_1, \ldots, df_r$ in $D_k(A/\mathfrak{q})$ frei ist, wobei $\mathfrak{q}$ alle minimalen Primideale von A durchläuft. Wir dürfen also auch annehmen, daß A nullteilerfrei ist. Das gewünschte Resultat ergibt sich dann direkt aus (4.1).

Im weiteren sei B eine reguläre noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation, deren Restekörper bezüglich der maximalen Ideale algebraisch über k sind. A sei eine endliche B-Algebra. (Beispiel für diese Situation: A sei semi-analytische k-Algebra.) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A und $r := \dim A/\mathfrak{p}$. (Es ist $r < \infty$ nach (8.6).) Es seien $f_1, \ldots, f_r$ Elemente aus A, die in $A/\mathfrak{p}$ ein (echtes) Ideal der Kodimension r erzeugen. Sei $R := k[f_1, \ldots, f_r] \subseteqq A_\mathfrak{p}$. A besitzt eine universell-endliche k-Derivation d. Offenbar existiert die universell-endliche R-Ausdehnung d_R von d nach $\hat{A}_\mathfrak{p}$.

(8.13) Satz. *Es gibt einen vollen Koeffizientenkörper K in $\hat{A}_\mathfrak{p}$ derart, daß $R \subseteqq K$ ist und d_R universell-endliche K-Derivation von $\hat{A}_\mathfrak{p}$ ist.*

Beweis. Es gibt Unbestimmte $X_1, \ldots, X_m$, so daß A Restklassenalgebra von $P := B[X_1, \ldots, X_m]$ ist. Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in A, das sowohl $\mathfrak{p}$ als auch $f_1, \ldots, f_r$ umfaßt. $\mathfrak{M}$ sei das Urbild von $\mathfrak{m}$ in P. Es ist $\mathfrak{M} \cap B$ ein maximales Ideal von B, da A endlich über B ist. $P_\mathfrak{M}$ ist eine reguläre lokale k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation nach (1.8) und (1.7). Da es uns nur auf $A_\mathfrak{p}$ ankommt, dürfen wir A durch $A_\mathfrak{m}$ ersetzen. $f_1, \ldots, f_r$ ist in $A_\mathfrak{m}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}$ ein Parametersystem. $F_1, \ldots, F_r$ seien Urbilder der $f_1, \ldots, f_r$ und $\mathfrak{q}$ das Urbild von $\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}$ in $P_\mathfrak{M}$. Es genügt offenbar, den Satz für $k[F_1, \ldots, F_r]$ und $\mathfrak{q}$ zu beweisen und dann mit der Restklassenabbildung nach $\hat{A}_\mathfrak{p}$ zu gehen. Wir können also gleich annehmen, daß A regulär lokal von der Dimension $r+s$ ist. Nach (8.7) und (8.5) ist $D_k(A)$ frei vom Rang $r+s$. Sei $g_1, \ldots, g_s$ ein beliebiges reguläres Parametersystem in $A_\mathfrak{p}$. Dann ist $df_1, \ldots, df_r, dg_1, \ldots, dg_s$ eine Basis von $D_k(A)_\mathfrak{p}$ über $A_\mathfrak{p}$. Dies folgt aus der exakten Sequenz

$$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 A_\mathfrak{p} \to D_k(A)_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}D_k(A)_\mathfrak{p} \to D_k(A/\mathfrak{p})_{(0)} \to 0$$

unter Benutzung der Tatsache, daß $df_1, \ldots, df_r$ nach (8.12) eine Basis von $D_k(A/\mathfrak{p})_{(0)}$ bilden. Sei $D_R := D_k(A)_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{p}\, df_1 + \cdots + A_\mathfrak{p}\, df_r$, $C := A_\mathfrak{p}$ und δ die von d induzierte R-Derivation von C in D_R. Es ist $\hat{\delta} = d_R$. Es gilt $\hat{D}_R = \hat{C} d_R g_1 + \cdots + \hat{C} d_R g_s \cong \hat{C}^s$. Nach [11], Theorem 2, ist $\hat{C}$ freier formaler Potenzreihenring in den Elementen $g_1, \ldots, g_s$ über einem Körper K, der den Kern von d_R umfaßt. Es ist also insbesondere $K \supseteqq R \supseteqq k$. Wir haben zu zeigen, daß $K = \operatorname{Kern} d_R$ ist. Dann ist notwendigerweise d_R die universell-endliche K-Derivation von $\hat{C}$. Seien die R-Derivationen δ_i von C in sich durch die Gleichung $\delta f = (\delta_1 f)\delta g_1 + \cdots$ $\cdots + (\delta_s f)\delta g_s$ definiert. Nach dem Beweis des zitierten Satzes in [11] ist $K = \operatorname{Kern} d_R$, wenn die $\hat{\delta}_i$ kommutieren. Es genügt also zu zeigen, daß die δ_i kommutieren.

Zu der universell-endlichen k-Derivation von A gehört nach dem unten folgenden Hilfssatz der kanonische Komplex

$$0 \to A \xrightarrow{d} D_k(A) \xrightarrow{d} \bigwedge^2 D_k(A) \xrightarrow{d} \cdots.$$

Durch Lokalisieren entsteht daraus wieder ein Komplex

$$0 \to A_{\mathfrak{p}} \to D_k(A)_{\mathfrak{p}} \to \bigwedge^2 D_k(A)_{\mathfrak{p}} \to \cdots$$

und durch Restklassenbildung nach $A_{\mathfrak{p}} dR$ der Komplex

$$0 \to A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\delta} D_R \xrightarrow{\delta} \bigwedge^2 D_R \to \cdots .$$

Sei nun $f \in A_{\mathfrak{p}}$. Dann ist $0 = \delta\delta f = \sum_{i<j} (\delta_i \delta_j f - \delta_j \delta_i f)\ \delta g_i \wedge \delta g_j$. Da die $\delta g_i \wedge \delta g_j$ eine Basis bilden, folgt $\delta_i \delta_j f = \delta_j \delta_i f$ wie gewünscht.

(8.14) Hilfssatz. *A sei noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation $d: A \to D$. Dann existiert der kanonische Komplex*

$$0 \to A \xrightarrow{d} D \xrightarrow{d} \bigwedge^2 D \to \cdots .$$

Beweis. Der kanonische Komplex existiert für die universelle k-Derivation $d^\infty: A \to D^\infty$. Es ist $\bigwedge^n D = \bigwedge^n D^\infty / \left(U \wedge \bigwedge^{n-1} D^\infty\right)$, wobei U der Kern der kanonischen Abbildung $D^\infty \to D$ ist. Die gewünschte Sequenz wird von d^∞ induziert, falls $d^\infty U \subseteq (U \wedge D^\infty)$ ist (Produktregel). Dies ist ein lokales Problem wegen (1.8). Wir nehmen daher nun an, daß A lokal ist. Dann ist U der Durchschnitt aller $\mathfrak{m}_A^i D^\infty$, da d universell separiert ist. $d^\infty U$ ist im Durchschnitt V der $\mathfrak{m}_A^i \bigwedge^2 D^\infty$ enthalten (Produktregel). Es genügt also zu zeigen: $V \subseteq (U \wedge D^\infty)$. Das ist aber trivial, da $\bigwedge^2 D^\infty / (U \wedge D^\infty) = \bigwedge^2 D$ ein endlicher und damit separierter A-Modul ist.

Bemerkung. Wir wissen nicht, ob (8.13) sich auf den Fall verallgemeinern läßt, in dem die Restekörper von A nicht mehr algebraisch über k sind.

§ 9. Freie Derivationenmoduln

In diesem Paragraphen sei k wie in § 8 ein beliebiger Körper der Charakteristik 0.

Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Nach (8.7) ist $A_{\mathfrak{p}}$ genau dann regulär, wenn $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ frei über $A_{\mathfrak{p}}$ ist. In diesem Falle ist auch der duale Modul $D_k(A)_{\mathfrak{p}}^* = (D_k(A)_{\mathfrak{p}})^* = \mathrm{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(D_k(A)_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}})$ frei. Die Frage ist, ob aus der Freiheit von $D_k(A)_{\mathfrak{p}}^*$ umgekehrt die Regularität von $A_{\mathfrak{p}}$ folgt. Dieses Problem wird für affine k-Algebren in [11] gestellt und sei deswegen hier als Zariski-Lipman-Problem bezeichnet.

In Verallgemeinerung von [11], Theorem 1, gilt:

(9.1) Satz. *Hat $D_k(A)^*_{\mathfrak{p}}$ endliche homologische Dimension über $A_{\mathfrak{p}}$, so ist $A_{\mathfrak{p}}$ normal.*

Beweis. Sei $\mathfrak{q}$ irgendein Primideal von A, das in $\mathfrak{p}$ enthalten ist, und $B := A_{\mathfrak{q}}$, $M := D_k(A)_{\mathfrak{q}}$. Es ist $\operatorname{dh}_B M^*$ endlich. Wir haben zu zeigen: Ist $\operatorname{codh} B \leqq 1$, so ist B regulär.

Es gibt eine exakte Sequenz

$$0 \to U \xrightarrow{h} F \to M \to 0$$

mit einem endlichen freien B-Modul F. Sei $G := \operatorname{Bild} h^* \subseteqq U^*$. Es ist $G = F^*/M^*$ und daher $\operatorname{dh}_B G$ endlich. Durch weiteres Dualisieren erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 & \\ F^{**} \arrow[r] & M^{**} \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1_B(G, B) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen und kanonischen Abbildungen. β ist bijektiv. Deshalb ist $\operatorname{Ext}^1_B(G, B)$ der Kokern von α.

Sei $\operatorname{codh} B = 0$. Dann sind alle Moduln endlicher homologischer Dimension über B frei. Insbesondere ist G frei und folglich α surjektiv. Da M^* frei ist, ist auch M^{**} frei. Somit ist $M = M^{**} \oplus N$ und $M^* = M^{***} \oplus N^*$. Aus Ranggründen ist $N^* = 0$ und daher auch $N = 0$. Also ist $M = M^{**}$ frei. Nach (8.7) ist $A_{\mathfrak{q}} = B$ regulär. Damit ist bereits bewiesen, daß $A_{\mathfrak{p}}$ reduziert ist.

Sei jetzt $\operatorname{codh} B = 1$. Da G Untermodul eines freien Moduls ist, gilt $\operatorname{codh}_B G = 1$ (bei $G \neq 0$). Bekanntlich ist dann $\operatorname{dh}_B G = \operatorname{codh} B - \operatorname{codh} G = 0$. Wieder ergibt sich, daß α surjektiv ist. Da $\operatorname{Kern} \alpha$ die Torsion $\mathrm{t}M$ ist (B ist reduziert), ist $M/\mathrm{t}M = M^{**}$ frei. Daß $A_{\mathfrak{q}}$ regulär ist, ergibt sich nun aus dem folgenden Satz, der (8.7) verschärft:

(9.2) Satz. *Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Ist $D_k(A)_{\mathfrak{p}}/\mathrm{t}\,D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ frei, so ist $A_{\mathfrak{p}}$ regulär.*

Beweis. Wegen (1.8) dürfen wir ohne weiteres annehmen, daß A lokal ist. Sei $B := A_{\mathfrak{p}}$, $M := D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ und $\mathrm{t}M$ der Torsionsbestandteil von M. Mit $d: B \to M$ bezeichnen wir die Extension der universell-endlichen k-Derivation $d_k: A \to D_k(A)$ nach B. Nach Voraussetzung ist $M/\mathrm{t}M \cong B^m$. Folglich besitzt M den Rang m. Nach (8.8) ist B reduziert und reindimensional und $m = r + s + \tau$ mit $r := \dim B$, $s := \dim A/\mathfrak{p}$ und $\tau := \operatorname{trgrad}_k(k_A)$. Sei $n := \operatorname{Dim} B$. Aus der kanonischen exakten Sequenz

$$\mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2 \xrightarrow{d} M/\mathfrak{m}_B M \to D_k(A/\mathfrak{p})_{(0)} \to 0$$

und $\operatorname{rang} D_k(A/\mathfrak{p}) = s + \tau$ (wegen (8.8)) erhält man, daß es ein Erzeugendensystem von M gibt, das aus Elementen $df_1, \ldots, df_n, \omega_1, \ldots, \omega_{s+\tau}$ besteht, wobei die f_i in $\mathfrak{m}_B$ liegen. Die kanonische Abbildung von M auf $M^{**} \cong B^m$ ist surjektiv. Es gibt daher wegen $m = r + s + \tau$ unter den f_i wenigstens r Elemente, etwa: $f_1, \ldots, f_r$, so daß $B\,df_1 + \cdots + B\,df_r \cong B^r$ ein direkter Summand von M ist. Es gibt dann also Derivationen $\delta_1, \ldots, \delta_r$ von B in sich mit $\delta_i f_j = \delta_{ij}$, $1 \leqq i, j \leqq r$. Nach [19], Theorem 1.5 ist B regulär. Die dort gemachte Voraussetzung über die Endlichkeit eindimensionaler Lokalisierungen der Restklassenringe von A ist etwa wegen (8.2) erfüllt. (Zu (9.2) vgl. auch [12].)

Ein lokaler Ring A heiße *Hyperflächenring*, wenn $\operatorname{Dim} A \leqq 1 + \dim A$ ist. Für Hyperflächenringe wird das Zariski-Lipman-Problem durch den folgenden Satz gelöst.

(9.3) Satz. *Sei A eine noethersche k-Algebra mit universell-endlicher k-Derivation und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A. Ist $A_\mathfrak{p}$ ein Hyperflächenring und ist $D_k(A)_\mathfrak{p}^*$ frei, so ist $A_\mathfrak{p}$ regulär.*

Beweis. Wegen (1.8) dürfen wir ohne weiteres annehmen, daß A lokal ist. Nach (8.2) gibt es in der Komplettierung $\hat{A}$ ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}\hat{A}_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\hat{A}_\mathfrak{q}$. Die Erweiterung $\hat{A}_\mathfrak{q}$ von $A_\mathfrak{p}$ ist längentreu-flach. Deshalb ist auch $\hat{A}_\mathfrak{q}$ ein Hyperflächenring und $D_k(\hat{A})_\mathfrak{q}^* = D_k(A)_\mathfrak{p}^* \otimes_{A_\mathfrak{p}} \hat{A}_\mathfrak{q}$ ist ebenfalls frei. $A_\mathfrak{p}$ ist genau dann regulär, wenn $\hat{A}_\mathfrak{q}$ regulär ist. Wir können also von nun an annehmen, daß A komplett ist. Ferner nehmen wir gleich an, daß $A_\mathfrak{p}$ nicht regulär ist. Sei $r := \dim A_\mathfrak{p}$, $s := \dim A/\mathfrak{p}$ und $\tau := \operatorname{trgrad}_k(k_A)$.

Da $A_\mathfrak{p}$ nach (9.1) normal ist, dürfen wir außerdem annehmen, daß A nullteilerfrei ist. Da A komplett ist, besitzt A einen Koeffizientenkörper $K \supseteq k$. Es gibt eine Darstellung $A = P/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ ein Primideal in dem formalen Potenzreihenring P über K ist. Wegen $\operatorname{Dim} A_\mathfrak{p} = r + 1$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{b} \subsetneqq \mathfrak{a}$ in P und ein Primideal $\mathfrak{q}$ in $B := P/\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{q}/(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) = \mathfrak{p}$ derart, daß $B_\mathfrak{q}$ regulär von der Dimension $r + 1$ ist. Für $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ wollen wir wieder $\mathfrak{a}$ schreiben. Da $\operatorname{trgrad}_k K$ endlich ist, gibt es eine universell-endliche k-Derivation in P und damit auch in B; diese bezeichnen wir mit $d: B \to D_k(B)$. Es gibt ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}_\mathfrak{q} = f B_\mathfrak{q}$. Nach (8.7) ist $F := D_k(B)_\mathfrak{q}$ frei vom Rang $m := r + 1 + s + \tau$. Es ist $D_k(A)_\mathfrak{p} = F/(fF + B_\mathfrak{q}\,df)$. Daher hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to A_\mathfrak{p}\langle f_1, \ldots, f_m\rangle \to A_\mathfrak{p}^m \to D_k(A)_\mathfrak{p} \to 0\,;$$

dabei ist $\langle f_1, \ldots, f_m\rangle$ das Tupel aus $F \cong B_\mathfrak{q}^m$, das df darstellt. (Restklassenbildung modulo f wird dabei in der Bezeichnung nicht wiedergegeben.) Sei $\mathfrak{c} := B_\mathfrak{q} f + B_\mathfrak{q} f_1 + \cdots + B_\mathfrak{q} f_m$ und $\bar{\mathfrak{c}} := \mathfrak{c}/B_\mathfrak{q} f$. Daß $D_k(A)_\mathfrak{p}^*$ frei ist, bedeutet nun, daß $\bar{\mathfrak{c}}$ eine homologische Dimension $\leqq 1$ hat. Ist $\mathfrak{r}$ ein Primideal in $A_\mathfrak{p}$, so gilt $\bar{\mathfrak{c}}(A_\mathfrak{p})_\mathfrak{r} = (A_\mathfrak{p})_\mathfrak{r}$ genau dann, wenn die

Lokalisierung von $D_k(A)_{\mathfrak{p}}$ nach $\mathfrak{r}$ frei ist, wenn also $(A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{r}}$ regulär ist. Daraus folgt $\bar{\mathfrak{c}} \neq A_{\mathfrak{p}}$ und wegen (9.1) darüber hinaus, daß $\bar{\mathfrak{c}}$ eine Primfolge der Länge 2 enthält. Dann stimmt nach dem unten folgenden Hilfssatz (9.4) das Ideal $\bar{\mathfrak{c}}$ mit seinem Fittingideal $\mathfrak{d}_1(\bar{\mathfrak{c}})$ überein. In $B_{\mathfrak{q}}$ bedeutet das: Es gibt eine $m \times (m-1)$-Matrix $\mathfrak{A}$ mit Elementen aus $B_{\mathfrak{q}}$, für deren maximale Unterdeterminanten $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ gilt: $\mathfrak{c} = B_{\mathfrak{q}} f + B_{\mathfrak{q}} \Delta_1 + \cdots + B_{\mathfrak{q}} \Delta_m$. Ferner ist $\operatorname{codim} \mathfrak{c} \geqq 3$ wegen $\operatorname{codim} \bar{\mathfrak{c}} \geqq 2$. Wegen $df \in \mathfrak{c} D_k(B)_{\mathfrak{q}}$ ist $\mathfrak{c}$ bezüglich $d_{\mathfrak{q}}: B_{\mathfrak{q}} \to D_k(B)_{\mathfrak{q}}$ differentiell abhängig von $\mathfrak{c}' := B_{\mathfrak{q}} \Delta_1 + \cdots + B_{\mathfrak{q}} \Delta_m$. Nach (8.11) folgt deshalb, daß f im Radikal von $\mathfrak{c}'$ liegt, woraus sich dann $\operatorname{codim} \mathfrak{c}' \geqq 3$ ergibt. Dieses ist aber ein Widerspruch, da nach Eagon-Northcott [7], § 6, Theorem 3 das Determinantenideal $\mathfrak{c}'$ höchstens die Kodimension 2 hat.

(9.4). *Es sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \neq A$ ein Ideal in A. Enthält $\mathfrak{a}$ eine Primfolge der Länge 2 und ist $\mathrm{dh}_A \mathfrak{a} \leqq 1$, dann stimmt $\mathfrak{a}$ mit dem 1. Fittingideal $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{a})$ des A-Moduls $\mathfrak{a}$ überein.*

Beweis. Es genügt, die Gleichheit für sämtliche Lokalisierungen zu zeigen. Dies ist für solche $A_{\mathfrak{p}}$ trivial, für die $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ ist. Wir können also gleich annehmen, daß A lokal ist. Dann ist $\mathfrak{a}$ von der Form A^n/U, wobei U von $n-1$ linear unabhängigen n-Tupeln $\langle a_{i1}, \ldots, a_{in} \rangle$, $i = 2, \ldots, n$, erzeugt wird. $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{a})$ wird von den n maximalen Unterdeterminanten der Matrix (a_{ij}) erzeugt. Der Homomorphismus $h: A^n \to A$ ordne dem n-Tupel $\langle a_{11}, \ldots, a_{1n} \rangle$ die Determinante $\det(a_{ij})_{1 \leqq i,j \leqq n}$ zu. Offenbar ist $\operatorname{Bild} h = \mathfrak{d}_1(\mathfrak{a})$. Wegen $h(U) = 0$ induziert h einen Homomorphismus g von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{a})$. Da es in $\mathfrak{a}$ eine Primfolge der Länge 2 gibt, ist $\operatorname{Ext}^1_A(A/\mathfrak{a}, A) = 0$. Deshalb läßt sich g zu einem A-Endomorphismus von A fortsetzen, ist also das Multiplizieren mit einem Element $e \in A$. Es ist daher $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{a}) = e\mathfrak{a}$. Wäre e keine Einheit, so wäre $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} \neq A_{\mathfrak{p}}$ aber $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ der Kodimension $\leqq 1$. Dies ist nicht möglich wegen $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{a})_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{d}_1(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{d}_1(A_{\mathfrak{p}}) = A_{\mathfrak{p}}$.

Literatur

1. Berger, R.: Ausdehnung von Derivationen und Schachtelung der Differenten. Math. Z. **78**, 97—115 (1962).
2. — Kiehl, R., Kunz, E., Nastold, H.-J.: Differentialrechnung in der analytischen Geometrie. Lect. Notes Math. **38**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
3. Bingener, R.: Über Steinsche Algebren und Moduln. Diplomarbeit Bochum SS 1971.
4. Bosch, S.: Endliche analytische Homomorphismen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Nat. Klasse, 41—49 (1967).
5. Bourbaki, N.: Algèbre commutative. Chap. 2. Paris: Hermann 1961.
6. Dieudonné, J., Grothendieck, A.: Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques. J. of Alg. **5**, 305—324 (1967).
7. Eagon, J. A., Northcott, D. G.: Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. Proc. Royal Soc. A. **269**, 188—204 (1962).

8. Ferrand, D.: Suites régulières et intersections complètes. C. R. Acad. Sc. Paris **264**, 427—428 (1967).
9. Kiehl, R.: Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. J.f.r.u.a.M. **234**, 89—98 (1969).
10. Lech, Ch.: Inequalities related to certain couples of local rings. Acta math. **112**, 69—89 (1964).
11. Lipman, J.: Free derivation modules on algebraic varieties. Am. J. Math. **87**, 874—898 (1965).
12. — On the Jacobian ideal of the module of differentials. Proc. Am. Math. Soc. **21**, 422—426 (1969).
13. Matlis, E.: Injective modules over noetherian rings. Pac. J. Math. **8**, 511—528 (1958).
14. Nagata, M.: Local rings. New York: Intersc. Publ. Math., 1962.
15. Ratliff, L. J., Jr.: On quasi-unmixed semi-local rings and the altitude formula. Am. J. Math. **87**, 278—284 (1965).
16. Scheja, G.: Differentialmoduln lokaler analytischer Algebren. Schriftenreihe Math. Inst. Fribourg **2** (1970).
17. — Storch, U.: Über differentielle Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren. Math. Z. **114**, 101—112 (1970).
18. Vasconcelos, W. V.: A note on normality and the module of differentials. Math. Z. **105**, 291—293 (1968).
19. — Derivations of commutative noetherian rings. Math. Z. **112**, 229—233 (1969).

Günter Scheja
Uwe Storch
Math. Institut
der Ruhr-Universität
D-4630 Bochum
Buscheystraße
Deutschland

(Eingegangen am 22. Juli 1971)