HUBER, H.
Math. Annalen 138, 1—26 (1959)

Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen

Von

HEINZ HUBER in Basel

1. Probleme und Ergebnisse

1.1. Es sei $\mathfrak{F}$ eine zweidimensionale, orientierbare und geschlossene analytische Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Gaußscher Krümmung -1, also eine hyperbolische Raumform im Sinne von FELIX KLEIN.

Unter einem geschlossenen Weg $\mathfrak{w}$ auf $\mathfrak{F}$ verstehen wir eine stetige Abbildung

$$\mathfrak{w} : p(t) , \quad 0 \leqq t \leqq 1 , \quad p(0) = p(1)$$

des Einheitsintervalles in die Fläche $\mathfrak{F}$. Zwei geschlossene Wege heißen homotop, wenn sie auf $\mathfrak{F}$ stetig ineinander deformierbar sind. Dieser Homotopiebegriff ist ein Äquivalenzbegriff in der Menge aller geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$ und bewirkt daher eine Einteilung dieser Menge in Homotopieklassen $\mathfrak{W}$. Es sei insbesondere $\mathfrak{O}$ die Klasse der in einen Punkt deformierbaren Wege, und $\mathfrak{W}^n$, $n \geqq 1$, diejenige Homotopieklasse, welche die n-fach durchlaufenen Wege der Klasse $\mathfrak{W}$ enthält. Eine Klasse $\mathfrak{P}$ heiße primitiv, wenn sie nicht als Potenz $\mathfrak{Q}^n$, $n > 1$, darstellbar ist. Wir werden übrigens sehen (5.5), daß jede Klasse $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}$ genau eine Darstellung $\mathfrak{W} = \mathfrak{P}^n$ besitzt, in welcher $n \geqq 1$ und $\mathfrak{P}$ primitiv ist. Die dadurch eindeutig bestimmte natürliche Zahl $\nu(\mathfrak{W}) = n$ heiße die Vielfachheit der Klasse $\mathfrak{W}$.

Jede Homotopieklasse $\mathfrak{W}$ enthält Wege $\mathfrak{w}$ von endlicher Länge $\int_{\mathfrak{w}} ds$. Wir definieren nun die Länge $\mu(\mathfrak{W})$ einer Klasse $\mathfrak{W}$ durch

$$\mu(\mathfrak{W}) = \inf_{\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}} \int_{\mathfrak{w}} ds .$$

In der vorliegenden Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, die asymptotische Verteilung der Längen $\mu(\mathfrak{W})$ und $\mu(\mathfrak{P})$ zu studieren. Im Verlaufe dieses Studiums werden sich interessante Beziehungen unserer Aufgabe zu einem gewissen Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene und zum Laplace-Beltramischen Eigenwertproblem $\Delta \varphi + \lambda \varphi = 0$ auf $\mathfrak{F}$ ergeben.

1.2. Zur Lösung unserer Aufgabe bedienen wir uns mit Vorteil des engen Zusammenhanges, der bekanntlich zwischen den hyperbolischen Raumformen und den diskontinuierlichen Bewegungsgruppen der hyperbolischen Ebene besteht. Sei $\mathfrak{H}$ universelle Überlagerungsfläche von $\mathfrak{F}$; wir denken uns die differentialgeometrische Struktur von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{H}$ durchgedrückt, so daß jeder Überlagerungsweg auf $\mathfrak{H}$ dieselbe Länge besitzt wie sein Grundweg auf $\mathfrak{F}$.

Dann ist $\mathfrak{H}$ ersichtlich eine einfach zusammenhängende, vollständige analytische Fläche konstanter Krümmung -1, also eine hyperbolische Ebene. Die zugehörige Decktransformationsgruppe Λ ist eine diskontinuierliche Gruppe von (eigentlichen) Bewegungen von $\mathfrak{H}$; da $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, besitzt sie einen kompakten meßbaren Fundamentalbereich[1]).

Wir ordnen jeder Homotopieklasse $\mathfrak{W}$ eine Klasse $\Phi_{\mathfrak{W}}$ konjugierter Elemente von Λ in folgender Weise zu: Ist

$$\mathfrak{w} : p(t)\,, \quad 0 \leqq t \leqq 1\,, \quad p(0) = p(1)$$

ein Weg der Klasse $\mathfrak{W}$ und $\bar{\mathfrak{w}}$ irgendeiner seiner Überlagerungswege auf $\mathfrak{H}$, so gibt es genau eine Bewegung $T \in \Lambda$, welche den Anfangspunkt von $\bar{\mathfrak{w}}$ in den Endpunkt von $\bar{\mathfrak{w}}$ überführt. Dann sei

$$\Phi_{\mathfrak{W}} = \{STS^{-1} | S \in \Lambda\}\,.$$

Die so definierte Klasse $\Phi_{\mathfrak{W}}$ ist unabhängig von der Wahl des Überlagerungsweges $\bar{\mathfrak{w}}$ von $\mathfrak{w}$ und unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}$. Die Zuordnung $\mathfrak{W} \to \Phi_{\mathfrak{W}}$ bildet die Menge aller Homotopieklassen $\mathfrak{W}$ umkehrbar eindeutig auf die Menge aller Klassen Φ konjugierter Elemente von Λ ab; insbesondere gilt $\Phi_{\mathfrak{O}} = \{E\}$, wenn E das Einselement von Λ ist[2]). Man erkennt nun leicht, daß für jedes $T \in \Phi_{\mathfrak{W}}$

$$\inf_{p \in \mathfrak{H}} \varrho(Tp, p) = \mu(\mathfrak{W})\,;$$

dabei ist $\varrho(p, q)$ die Distanz der Punkte $p, q \in \mathfrak{H}$, also die untere Grenze der Längen der Wege, die auf $\mathfrak{H}$ von p nach q führen. Somit gilt, wenn wir die Verschiebungslänge einer Bewegung T von $\mathfrak{H}$ durch

$$\mu(T) = \inf_{p \in \mathfrak{H}} \varrho(Tp, p) \tag{1}$$

definieren,

$$\mu(\mathfrak{W}) = \mu(T) \text{ für alle } T \in \Phi_{\mathfrak{W}}\,. \tag{2}$$

Weil $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, ist natürlich $\mu(\mathfrak{W}) > 0$ für $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}$. Daher ist $\mu(T) > 0$ für alle $T \in \Lambda - E$. Die einzigen Bewegungen von $\mathfrak{H}$ mit positiver Verschiebungslänge sind aber die hyperbolischen Translationen[3]). Somit ist Λ eine diskontinuierliche Translationsgruppe.

1.3. Die Gleichungen (1), (2) legen es einigermaßen nahe, zuerst die asymptotische Verteilung der Distanzen $\varrho(Tp, p)$ oder, allgemeiner, die Verteilung der Distanzen $\varrho(Tp, q)$, $T \in \Lambda$, zu untersuchen. Dazu betrachten wir die Dirichlet-Reihe

$$G_{\mathfrak{F}}(p, q; s) \doteq \sum_{T \in \Lambda} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q),\ s = \sigma + it,\ p, q \in \mathfrak{H}\,, \tag{3}$$

welche für $\sigma > 1$ absolut konvergiert (3.7). Wir werden in 3.8 und 3.9 beweisen:

Satz 1. *Für alle $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, und $q \in \mathfrak{H}$ gilt:*

(a) *$G_{\mathfrak{F}}(p, q; s)$ ist eine auf $\mathfrak{H}$ stetige und bezüglich Λ automorphe Funktion von p.*

---

[1]) Vgl. z. B. [8], pag. 148—149.

[2]) Vgl. hierzu [7], § 49.

[3]) Vgl. Abschnitt 2.8.

(b) $G_{\mathfrak{F}}(p, q; s)$ *ist zweimal stetig differenzierbar nach lokalen regulären Koordinaten von* p *und erfüllt die Funktionalgleichung*

$$\Delta_p G_{\mathfrak{F}}(p, q; s) + s(1-s)\, G_{\mathfrak{F}}(p, q; s) + s(1+s)\, G_{\mathfrak{F}}(p, q; s+2) = 0\,,$$

wenn Δ *der zu* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{H}$ *gehörige Laplace-Beltrami-Operator ist.*

1.4. Dieser Satz führt uns dazu, das Eigenwertproblem $\Delta\,\varphi + \lambda\,\varphi = 0$ auf $\mathfrak{F}$ zu betrachten: Die Zahl λ heiße *Eigenwert*, wenn es auf $\mathfrak{F}$ eine nicht überall verschwindende Funktion φ gibt, welche (nach lokalen regulären Koordinaten) zweimal stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung $\Delta\,\varphi + \lambda\,\varphi = 0$ erfüllt. Jede solche Funktion heiße eine zum Eigenwert λ gehörige *Eigenfunktion*. Da $\mathfrak{F}$ eine geschlossene analytische Mannigfaltigkeit ist, läßt sich dieses Eigenwertproblem im Rahmen klassischer Theorien behandeln[4]). Es ergeben sich bekanntlich folgende Tatsachen: Es gibt unendlich viele Eigenwerte; sie sind, abgesehen vom trivialen Eigenwert $\lambda = 0$, positiv und häufen sich nirgends im Endlichen. Wir können sie daher in folgender Weise numerieren:

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty\,. \tag{4}$$

Der lineare Raum der zum Eigenwert λ_n gehörigen Eigenfunktionen besitzt eine endliche Dimension $m_n \geqq 1$; insbesondere ist

$$m_0 = 1\,, \tag{5}$$

weil jede zum Eigenwert $\lambda_0 = 0$ gehörige Eigenfunktion offenbar harmonisch auf der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ und somit konstant ist. Die für alle $\lambda \geqq 0$ definierte Funktion

$$m_{\mathfrak{F}}(\lambda) = \begin{cases} m_n & \text{für } \lambda = \lambda_n \\ 0 & \text{für } \lambda \notin \{\lambda_n\} \end{cases} \tag{6}$$

nennen wir das *Eigenwertspektrum* von $\mathfrak{F}$. Unter der *Spektralfolge* $\{\lambda'_n | n \geqq 0\}$ verstehen wir diejenige nicht abnehmende Zahlenfolge, in der jeder Eigenwert λ_n genau m_n-mal auftritt. Offenbar gilt:

$$\lambda'_0 = 0 < \lambda'_1 = \lambda_1 \leqq \lambda'_2 \leqq \cdots \leqq \lambda'_n \leqq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda'_n = +\infty\,. \tag{7}$$

Wir führen gleich noch eine weitere mit den Eigenwerten verknüpfte Folge ein, die bald eine wichtige Rolle spielen wird: Definieren wir

$$\begin{aligned} s^+(\lambda) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[+]{1-4\lambda}, \quad s^-(\lambda) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[+]{1-4\lambda} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \lambda \leqq \frac{1}{4}, \\ s^+(\lambda) &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt[+]{4\lambda-1}, \quad s^-(\lambda) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt[+]{4\lambda-1} \quad \text{für} \quad \frac{1}{4} < \lambda < +\infty, \end{aligned} \tag{8}$$

so gilt

$$s^+(\lambda_0) = s^+(\lambda'_0) = 1\,, \quad s^-(\lambda_0) = s^-(\lambda'_0) = 0\,, \tag{9}$$

und die Punkte $s^+(\lambda_n)$, $s^-(\lambda_n)$ liegen symmetrisch in bezug auf den Punkt $s = \frac{1}{2}$ der komplexen $s = \sigma + it$-Ebene. Wenn $\lambda_1 \geqq \frac{1}{4}$, so liegt die Punktmenge

[4]) Vgl. z. B. [3] und insbesondere [6].

$\{s^+(\lambda_n), s^-(\lambda_n) | n \geqq 1\}$ auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$; wenn dagegen $0 < \lambda_1 < \frac{1}{4}$, so liegen endlich viele Punkte dieser Menge im offenen Intervall $0 < s < 1$, alle übrigen wieder auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$. Es gibt daher stets ein solches $\delta = \delta(\lambda_1)$, $0 < \delta \leqq \frac{1}{2}$, daß die Menge $\{s^+(\lambda_n), s^-(\lambda_n) | n \geqq 1\}$ in der Halbebene $\sigma \leqq 1 - \delta$ liegt.

1.5. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Spektralfolge $\{\lambda'_n\}$ ist seit den Untersuchungen von H. WEYL und anderen wohlbekannt[5]):

$$\sum_{\lambda'_n \leqq t} 1 = \sum_{\lambda \leqq t} m_{\mathfrak{F}}(\lambda) \sim \frac{t}{4\pi} \iint_{\mathfrak{F}} d\omega \qquad \text{für} \quad t \to +\infty .$$

Da $\mathfrak{F}$ die konstante Krümmung -1 besitzt, so ist nach dem Gaußschen Satz von der Curvatura integra

$$\iint_{\mathfrak{F}} d\omega = 4\pi(g_{\mathfrak{F}} - 1)\,, \tag{10}$$

wenn $g_{\mathfrak{F}} > 1$ das Geschlecht der orientierbaren geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ ist. Wir haben somit

$$g_{\mathfrak{F}} - 1 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \sum_{\lambda \leqq t} m_{\mathfrak{F}}(\lambda)\,. \tag{11}$$

1.6. Da die Eigenwerte reell sind, gibt es ein zur Spektralfolge $\{\lambda'_n\}$ gehöriges Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$ *reeller* Eigenfunktionen. Wir dürfen und wollen diese Eigenfunktionen als Funktionen auf der universellen Überlagerungsfläche $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{F}$ auffassen. Dann ist $\varphi_n(p)$, $n \geqq 0$, eine auf $\mathfrak{H}$ zweimal stetig differenzierbare und bezüglich Λ automorphe Lösung der Differentialgleichung $\Delta\varphi_n + \lambda'_n \varphi_n = 0$, und es gilt

$$\iint_{\mathfrak{B}} \varphi_m(p)\, \varphi_n(p)\, d\omega_p = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}, \tag{12}$$

wenn $d\omega_p$ das Flächenelement von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{B}$ irgendein meßbarer Fundamentalbereich der Translationsgruppe Λ ist. Da die normierte Eigenfunktion $\varphi_0(p)$ konstant ist, ergibt sich

$$\varphi_0(p) \equiv \Big(\iint_{\mathfrak{B}} d\omega_p\Big)^{-\frac{1}{2}} = \Big(\iint_{\mathfrak{F}} d\omega\Big)^{-\frac{1}{2}},$$

also wegen (10)

$$\varphi_0(p) \equiv (4\pi(g_{\mathfrak{F}} - 1))^{-\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

1.7. Das Orthonormalsystem $\{\varphi_n\}$ hat nun bekanntlich folgende Eigenschaften:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda'_n}\right)^2$ konvergiert, und $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathfrak{H}$.

---

[5]) Vgl. z. B. [6].

(b) Für jede auf $\mathfrak{H}$ zweimal stetig differenzierbare und bezüglich Λ automorphe Funktion $f(p)$ gilt

$$f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(p)\,, \quad a_n = \iint_{\mathfrak{B}} f(p)\, \varphi_n(p)\, d\omega_p\,.$$

1.8. Daher können wir jetzt auf Grund von Satz 1 die Funktion $G_{\mathfrak{F}}(p,q;s)$ für festes q und s in eine Fourier-Reihe nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(p)$ entwickeln. Dies gelingt dank der Funktionalgleichung von $G_{\mathfrak{F}}(p,q;s)$ in recht expliziter Weise; wir werden schließlich (4.17, 4.21) zu folgendem Ergebnis geführt:

Satz 2. *(a) Die Reihe*

$$H_{\mathfrak{F}}(p,q;s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda_n')}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda_n')}{2}\right) \varphi_n(p)\, \varphi_n(q)$$

konvergiert absolut für $s \notin P = \{s^+(\lambda_n) - 2l, s^-(\lambda_n) - 2l \mid n \geqq 1, l \geqq 0\}$ *und stellt eine in der ganzen s-Ebene meromorphe Funktion dar, deren Pole in der Punktmenge P enthalten sind.* $H_{\mathfrak{F}}(p,q;s)$ *besitzt im Punkte* $s^{\pm}(\lambda_n) - 2l \in P$ *denselben Hauptteil wie die Funktion*

$$\Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda_n)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda_n)}{2}\right) \sum_{\lambda_m' = \lambda_n} \varphi_m(p)\, \varphi_m(q)\,.$$

(b) In der Halbebene $\sigma > 1$ *gilt*

$$G_{\mathfrak{F}}(p,q;s) = \frac{1}{2(g_{\mathfrak{F}} - 1)} \frac{1}{s-1} + \sqrt{\pi}\, \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} H_{\mathfrak{F}}(p,q;s)\,.$$

Damit ist es uns gelungen, die nur in der Halbebene $\sigma > 1$ konvergente Dirichlet-Reihe $G_{\mathfrak{F}}(p,q;s)$ zu einer in der ganzen s-Ebene meromorphen Funktion analytisch fortzusetzen. Da P offenbar in der Halbebene $\sigma \leqq 1 - \delta$, $0 < \delta(\lambda_1) \leqq \frac{1}{2}$ liegt, so ergibt sich aus Satz 2: In der Halbebene $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_{T \in \Lambda} \mathrm{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) = \frac{1}{2(g_{\mathfrak{F}} - 1)} \frac{1}{s-1} + R(p,q;s)\,,$$

wobei die Funktion $R(p,q;s)$ sogar in der Halbebene $\sigma > 1 - \delta$ regulär analytisch ist. Hieraus folgt aber nach dem Tauberschen Theorem von Wiener-Ikehara[6]) sofort der

Satz 3. *Es sei* $N(p,q,t)$ *die Anzahl der Elemente der Menge*

$$\{T \mid T \in \Lambda, \varrho(Tp,q) \leqq t\}\,.$$

Dann gilt für $t \to +\infty$

$$N(p,q,t) \sim \frac{1}{4(g_{\mathfrak{F}} - 1)} e^t\,.$$

In Analogie zum Fall einer diskontinuierlichen Translationsgruppe mit kompaktem Fundamentalbereich der euklidischen Ebene nennen wir die Punktmenge $\mathfrak{G}_p = \{Tp \mid T \in \Lambda\}$ ein hyperbolisches Gitter. $N(p,q,t)$ ist dann

[6]) [9], pag. 44.

nichts anderes als die Anzahl der Punkte des Gitters $\mathfrak{G}_p$, welche in der hyperbolischen Kreisscheibe mit dem Zentrum q und dem Radius t liegen. Satz 3 liefert für gewisse arithmetisch erzeugte Translationsgruppen bemerkenswerte zahlentheoretische Ergebnisse, auf die in einer späteren Arbeit eingegangen werden soll.

1.9. Auf Grund der Entwicklung von $G_{\mathfrak{F}}(p, q; s)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(p)$ werden wir weiter zeigen (4.18, 4.22):

Satz 4. (a) *Die Reihe*

$$H_{\mathfrak{F}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} m_n \, \Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda_n)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda_n)}{2}\right) \tag{14}$$

konvergiert absolut für $s \notin P$ und stellt eine in der ganzen s-Ebene meromorphe Funktion mit der Polmenge P dar. $H_{\mathfrak{F}}(s)$ besitzt im Punkte $s^{\pm}(\lambda_n) - 2l \in P$ denselben Hauptteil wie die Funktion $m_n \, \Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda_n)}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda_n)}{2}\right)$.

(b) *In der Halbebene $\sigma > 1$ gilt*

$$\iint_{\mathfrak{B}} G_{\mathfrak{F}}(p, p; s) \, d\omega_p = \frac{2\pi}{s-1} + \sqrt{\pi} \, \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} H_{\mathfrak{F}}(s) .$$

Andererseits werden wir aber durch gliedweise Integration der Dirichlet-Reihe $G_{\mathfrak{F}}(p, p; s)$ zeigen (5.14):

Satz 5. *Die Dirichlet-Reihe*

$$D_{\mathfrak{F}}(s) = \sum_{\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}} \frac{\mu(\mathfrak{W})}{\nu(\mathfrak{W})} \left(\frac{\operatorname{Cos} \mu(\mathfrak{W})}{\operatorname{Cos} \mu(\mathfrak{W}) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s} \mu(\mathfrak{W}) \tag{15}$$

konvergiert absolut für $\sigma > 1$, und es gilt

$$D_{\mathfrak{F}}(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \iint_{\mathfrak{B}} G_{\mathfrak{F}}(p, p; s) \, d\omega_p - 4\sqrt{\pi} \, (g_{\mathfrak{F}} - 1) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} .$$

Aus Satz 4 und Satz 5 ergibt sich nun der

Satz 6. *Die Funktion*

$$M_{\mathfrak{F}}(s) = \sqrt{\pi} \, \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} \left(\frac{2}{s-1} - 4(g_{\mathfrak{F}} - 1)\right) + \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s - \frac{1}{2})} H_{\mathfrak{F}}(s) \tag{16}$$

ist meromorph in der ganzen s-Ebene, und es gilt in der Halbebene $\sigma > 1$

$$D_{\mathfrak{F}}(s) = M_{\mathfrak{F}}(s) . \tag{17}$$

Wir haben somit die nur für $\sigma > 1$ konvergente Dirichlet-Reihe $D_{\mathfrak{F}}(s)$ zu einer in der ganzen s-Ebene meromorphen Funktion analytisch fortgesetzt. In den folgenden Nummern wollen wir die Folgerungen aus diesen Ergebnissen ziehen.

1.10. Zunächst ziehen wir einige einfache Schlüsse aus der Tatsache, daß die in der Halbebene $\sigma > 1$ konvergente Dirichlet-Reihe $D_{\mathfrak{F}}(s)$ positive Koeffizienten besitzt. Da $\nu(\mathfrak{P}) = 1$ für primitive Klassen $\mathfrak{P}$, so folgt aus (15)

$$\sum_{\mathfrak{P}} \mu(\mathfrak{P}) \left(\frac{\operatorname{Cos} \mu(\mathfrak{P})}{\operatorname{Cos} \mu(\mathfrak{P}) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-\sigma} \mu(\mathfrak{P}) < D_{\mathfrak{F}}(\sigma) < +\infty \text{ für } \sigma > 1 .$$

Daraus ergibt sich offensichtlich

(18) $$\pi_{\mathfrak{F}}(t) = \sum_{\mu(\mathfrak{P}) \leqq t} 1 < \infty \quad \text{für } t < \infty .$$

Nach 1.1 besitzt jede Homotopieklasse $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}$ eine eindeutige Darstellung $\mathfrak{W} = \mathfrak{P}^n$, in welcher $\mathfrak{P}$ primitiv und $n \geqq 1$. Nun gilt aber[7])

(19) $$\mu(\mathfrak{P}^n) = n\,\mu(\mathfrak{P}) .$$

Somit folgt aus (18)

(20) $$\omega_{\mathfrak{F}}(t) = \sum_{\mu(\mathfrak{W}) \leqq t} 1 < \infty \quad \text{für } t < \infty .$$

Die Zahlenmenge $\{\mu(\mathfrak{W}) \,|\, \mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}\}$ kann daher in eine monoton nach unendlich wachsende Folge angeordnet werden:

(21) $$\{\mu(\mathfrak{W}) | \mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}\} = \{\mu_n | n \geqq 0\},\; 0 < \mu_0 < \mu_1 < \cdots < \mu_n < \cdots;\; \lim_{n \to \infty} \mu_n = +\infty .$$

Zu jedem μ_n gibt es dann auf $\mathfrak{F}$ mindestens eine, aber höchstens endlich viele Homotopieklassen $\mathfrak{W}$ mit $\mu(\mathfrak{W}) = \mu_n$. Wir ordnen nun jedem μ_n das Gewicht

$$h_n = \sum_{\mu(\mathfrak{W}) = \mu_n} 1/\nu(\mathfrak{W})$$

zu. Die für alle $\mu \geqq 0$ definierte Funktion

(22) $$h_{\mathfrak{F}}(\mu) = \begin{cases} h_n & \text{für } \mu = \mu_n \\ 0 & \text{für } \mu \notin \{\mu_n\} \end{cases}$$

heiße das *Längenspektrum* von $\mathfrak{F}$. Dieses Längenspektrum beschreibt offenbar die Maßverhältnisse im Großen auf $\mathfrak{F}$. Die Dirichlet-Reihe (15) kann jetzt auch folgendermaßen geschrieben werden:

(23) $$D_{\mathfrak{F}}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \mu_n \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu_n}{\operatorname{Cos}\mu_n - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu_n .$$

Wegen der absoluten Konvergenz dieser Reihe für $\sigma > 1$ konvergiert

$$D_{\mathfrak{F}}\left(\frac{3}{2} + it\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n \mu_n}{\operatorname{Cos}\mu_n \sqrt{\operatorname{Cos}\mu_n - 1}}\, e^{-it\log\operatorname{Cos}\mu_n}$$

gleichmäßig in $-\infty < t < +\infty$. Hieraus und aus (21), (22) folgt nach einem Satz aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen[8])

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t D_{\mathfrak{F}}\left(\frac{3}{2} + i\tau\right) e^{i\tau\log\operatorname{Cos}\mu}\, d\tau = \frac{\mu\, h_{\mathfrak{F}}(\mu)}{\sqrt{\operatorname{Cos}\mu - 1}\,\operatorname{Cos}\mu} \quad \text{für } \mu \geqq 0 .$$

Somit folgt aus Satz 6

(24) $$h_{\mathfrak{F}}(\mu) = \frac{1}{\mu}\sqrt{\operatorname{Cos}\mu - 1}\,\operatorname{Cos}\mu \cdot \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t M_{\mathfrak{F}}\left(\frac{3}{2} + i\tau\right) e^{i\tau\log\operatorname{Cos}\mu}\, d\tau .$$

---

[7]) Wenn $T \in \Phi_{\mathfrak{P}}$, so ist offensichtlich $T^n \in \Phi_{\mathfrak{P}^n}$ und daher nach 1.2 (2): $\mu(\mathfrak{P}) = \mu(T)$, $\mu(\mathfrak{P}^n) = \mu(T^n)$; nach 2.6 ist aber $\mu(T^n) = n\mu(T)$ und somit $\mu(\mathfrak{P}^n) = n\mu(\mathfrak{P})$.

[8]) [1], pag. 51, Satz XII.

Damit haben wir das Längenspektrum mit Hilfe der meromorphen Funktion $M_{\mathfrak{F}}(s)$ dargestellt, was alsbald von Bedeutung sein wird. Wir wollen nun zeigen, daß auch das Eigenwertspektrum und das Geschlecht von $\mathfrak{F}$ aus der Funktion $M_{\mathfrak{F}}(s)$ berechnet werden kann. In der Tat ergibt sich aus (16) und Satz 4 (a) unter Berücksichtigung von (5), (8), (9) durch eine leichte Rechnung

$$m_n = \begin{cases} (\operatorname{Res} 2^{-s} M_{\mathfrak{F}}(s))_{s=s^+(\lambda_n)} & \text{für } \lambda_n \neq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{Res} 2^{-s} M_{\mathfrak{F}}(s))_{s=s^+(\lambda_n)} & \text{für } \lambda_n = \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{25}$$

Da der Punkt $s^+(\lambda)$ für $\lambda \geqq 0$, $\lambda \notin \{\lambda_n\}$ offenbar eine reguläre Stelle von $M_{\mathfrak{F}}(s)$ ist, so folgt aus (6) und (25)

$$m_{\mathfrak{F}}(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} (\operatorname{Res} 2^{-s} M_{\mathfrak{F}}(s))_{s=s^+(\lambda)} & \text{für } \lambda \neq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{Res} 2^{-s} M_{\mathfrak{F}}(s))_{s=s^+(\lambda)} & \text{für } \lambda = \frac{1}{4} \end{array} \right\}, \quad \lambda \geqq 0. \tag{26}$$

Nach Satz 4(a) ist $s = 0$ eine reguläre Stelle von $H_{\mathfrak{F}}(s)$. Daher berechnet man leicht aus (16)

$$2g_{\mathfrak{F}} - 1 = (\operatorname{Res} M_{\mathfrak{F}}(s))_{s=0}. \tag{27}$$

1.11. Es seien nun $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ geschlossene Raumformen mit gleichem Längenspektrum: $h_{\mathfrak{F}_1}(\mu) = h_{\mathfrak{F}_2}(\mu)$ für $\mu \geqq 0$. Dann folgt aus (22) und (23): $D_{\mathfrak{F}_1}(s) = D_{\mathfrak{F}_2}(s)$ für $\sigma > 1$. Daher stimmen nach Satz 6 die beiden meromorphen Funktionen $M_{\mathfrak{F}_1}(s)$, $M_{\mathfrak{F}_2}(s)$ in der Halbebene $\sigma > 1$ überein und sind somit in der ganzen s-Ebene identisch. Daraus folgt aber nach (26) und (27): $m_{\mathfrak{F}_1}(\lambda) = m_{\mathfrak{F}_2}(\lambda)$, $g_{\mathfrak{F}_1} = g_{\mathfrak{F}_2}$. Wir haben somit den

Satz 7. *Geschlossene hyperbolische Raumformen mit gleichem Längenspektrum besitzen auch gleiches Eigenwertspektrum und gleiches Geschlecht.*

Es seien jetzt $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ Raumformen mit gleichem Eigenwertspektrum: $m_{\mathfrak{F}_1}(\lambda) = m_{\mathfrak{F}_2}(\lambda)$ für $\lambda \geqq 0$. Dann folgt aus (6) und (14)

$$H_{\mathfrak{F}_1}(s) = H_{\mathfrak{F}_2}(s). \tag{28}$$

Ferner folgt aus (11)

$$g_{\mathfrak{F}_1} = g_{\mathfrak{F}_2}. \tag{29}$$

Aus (28) und (29) folgt nun nach (16): $M_{\mathfrak{F}_1}(s) = M_{\mathfrak{F}_2}(s)$. Somit ist nach (24) $h_{\mathfrak{F}_1}(\mu) = h_{\mathfrak{F}_2}(\mu)$ für $\mu \geqq 0$. Wir haben also den

Satz 8. *Geschlossene Raumformen mit gleichem Eigenwertspektrum besitzen auch gleiches Längenspektrum und gleiches Geschlecht.*

1.12. Nach Satz 4(a) liegen sämtliche Pole von $H_{\mathfrak{F}}(s)$ in der Halbebene $\sigma \leqq 1 - \delta$, $0 < \delta(\lambda_1) \leqq \frac{1}{2}$. Daher ergibt sich aus Satz 6: In der Halbebene $\sigma > 1$ gilt:

$$D_{\mathfrak{F}}(s) = \sum_{\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}} \frac{\mu(\mathfrak{W})}{\nu(\mathfrak{W})} \left(\frac{\operatorname{Cos} \mu(\mathfrak{W})}{\operatorname{Cos} \mu(\mathfrak{W}) - 1} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s} \mu(\mathfrak{W}) = \frac{2}{s-1} + R(s),$$

wobei die Funktion $R(s)$ sogar in der Halbebene $\sigma > 1 - \delta$ regulär analytisch ist. Daraus folgt aber nach dem Tauberschen Theorem von WIENER-IKEHARA[9]) sofort

$$\sum_{0<\mu(\mathfrak{W})\leqq t} \frac{\mu(\mathfrak{W})}{\nu(\mathfrak{W})}\left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(\mathfrak{W})}{\operatorname{Cos}\mu(\mathfrak{W})-1}\right)^{\frac{1}{2}} \sim e^t \quad \text{für } t\to+\infty .$$

Hieraus folgt wegen $\left(\frac{\operatorname{Cos}\mu}{\operatorname{Cos}\mu-1}\right)^{\frac{1}{2}} \to 1$ für $\mu\to+\infty$

$$\psi(t)=\sum_{0<\mu(\mathfrak{W})\leqq t}\frac{\mu(\mathfrak{W})}{\nu(\mathfrak{W})}\sim e^t \quad \text{für } t\to+\infty . \tag{30}$$

Um daraus eine asymptotische Aussage über

$$\pi(t)=\sum_{\mu(\mathfrak{P})\leqq t}1 \tag{31}$$

herzuleiten, gehen wir ähnlich vor wie beim Beweis des Primzahlsatzes. Es sei

$$\vartheta(t)=\sum_{\mu(\mathfrak{P})\leqq t}\mu(\mathfrak{P}) . \tag{32}$$

Nach 1.1 besitzt jede Klasse $\mathfrak{W}\neq\mathfrak{O}$ eine eindeutige Darstellung $\mathfrak{W}=\mathfrak{P}^n$, in welcher $\mathfrak{P}$ primitiv und $n\geqq 1$. Es gilt aber $\nu(\mathfrak{P}^n)=n$ und $\mu(\mathfrak{P}^n)=n\mu(\mathfrak{P})$[10]). Daher ergibt sich aus (30), (32) offensichtlich: $\psi(t)=\vartheta(t)+\vartheta(t/2)+\vartheta(t/3)+\cdots$. Diese Reihe bricht nach endlich vielen Gliedern ab, denn es ist natürlich $\vartheta(t/n)=0$ sobald $t/n<\mu_0$. Wir haben also

$$\psi(t)=\vartheta(t)+\sum_{n=2}^{N(t)}\vartheta(t/n), \qquad N(t)=\left[\frac{t}{\mu_0}\right]. \tag{33}$$

Daraus und aus (30) folgt zunächst die Existenz einer endlichen Konstanten $c>0$ derart, daß $\vartheta(t)\leqq\psi(t)<ce^t$ für $t\geqq 0$. Somit gilt für $t>2\mu_0$

$$0\leqq\sum_{n=2}^{N(t)}\vartheta(t/n)<c\sum_{n=2}^{N(t)}e^{t/n}<c\int_1^{t/\mu_0}e^{t/x}dx=ct\int_{\mu_0}^{t}u^{-2}e^u du . \tag{34}$$

Man zeigt aber leicht, daß

$$\int_{\mu_0}^{t}u^{-2}e^u du\sim t^{-2}e^t, \quad t\to+\infty . \tag{35}$$

Somit folgt aus (34): $\sum_{n=2}^{N(t)}\vartheta(t/n)=O(t^{-1}e^t)$. Daher folgt aus (30) und (33)

$$\vartheta(t)\sim e^t \quad \text{für } t\to+\infty . \tag{36}$$

Wegen (31), (32) gilt offensichtlich

$$\pi(t)=\int_{\varepsilon}^{t}u^{-1}d\vartheta(u), \quad 0<\varepsilon<\mu_0 .$$

Partielle Integration ergibt

$$\pi(t)-t^{-1}\vartheta(t)=\int_{\mu_0}^{t}u^{-2}\vartheta(u)\,du .$$

---

[9]) Siehe Anmerkung [6]).

[10]) Vgl. [7]).

Daraus und aus (36), (35) schließt man leicht

$$\pi(t) - t^{-1}\vartheta(t) \sim t^{-2}e^{t}, \quad t \to +\infty .$$

Somit gilt wegen (36)

Satz 9. *Es sei $\pi_{\mathfrak{F}}(t)$ die Anzahl aller primitiven Homotopieklassen der Länge $\leqq t$ auf $\mathfrak{F}$. Dann gilt für $t \to +\infty$*

$$\pi_{\mathfrak{F}}(t) \sim e^{t}/t .$$

Definieren wir

$$\omega(t) = \sum_{\mu(\mathfrak{W}) \leqq t} 1 ,$$

so gilt offenbar $\omega(t) = 1 + \pi(t) + \pi(t/2) + \pi(t/3) + \cdots$, und diese Reihe bricht wiederum ab, sobald $t/n < \mu_0$; wir haben somit

$$\omega(t) = 1 + \pi(t) + \sum_{n=2}^{N(t)} \pi(t/n) , \qquad N(t) = \left[\frac{t}{\mu_0}\right].$$

Daraus und aus Satz 9 ergibt sich leicht der

Satz 10. *Es sei $\omega_{\mathfrak{F}}(t)$ die Anzahl aller Homotopieklassen der Länge $\leqq t$ auf $\mathfrak{F}$. Dann gilt für $t \to +\infty$*

$$\omega_{\mathfrak{F}}(t) \sim e^{t}/t .$$

Es mag zunächst überraschen, daß das asymptotische Verhalten von $\pi_{\mathfrak{F}}(t)$ und $\omega_{\mathfrak{F}}(t)$ für alle geschlossenen Raumformen $\mathfrak{F}$ gleich ist. Dies ist ein Phänomen ähnlicher Art wie die bekannte Tatsache, daß die Anzahl der Primideale der Norm $\leqq t$ in allen algebraischen Zahlkörpern dasselbe asymptotische Verhalten zeigt.

2. Hilfssätze[11])

2.1. Wir erinnern daran, daß $\mathfrak{H}$ eine einfach-zusammenhängende, vollständige analytische Fläche konstanter Krümmung -1 ist. Bekanntlich gibt es auf $\mathfrak{H}$ Systeme $\{x_1(p), x_2(p)\}$ reell-analytischer Funktionen von p mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\{x_1(p), x_2(p)\}$ ist ein überall auf $\mathfrak{H}$ reguläres Koordinatensystem, in welchem die metrische Differentialform von $\mathfrak{H}$ die Gestalt

$$ds^2 = x_2^{-2}(dx_1^2 + dx_2^2) \tag{1}$$

besitzt.

(b) Die Zuordnung $p \to z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$ bildet $\mathfrak{H}$ eineindeutig auf die obere Halbebene der komplexen z-Ebene ab.

Jedes solche Funktionensystem heiße ein Poincarésches Koordinatensystem auf $\mathfrak{H}$. Sind $z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$, $z^*(p) = x_1^*(p) + i x_2^*(p)$ zwei Poincarésche Koordinatensysteme auf $\mathfrak{H}$, so gibt es solche reelle Konstanten a, b, c, d ($ad - bc = 1$), daß entweder

$$z^*(p) = \frac{az(p)+b}{cz(p)+d} \text{ oder } -\overline{z^*(p)} = \frac{az(p)+b}{cz(p)+d} .$$

[11]) Die Abschnitte 2.1 bis 2.11 enthalten, zur Bequemlichkeit des Lesers, eine kurze Zusammenstellung bekannter Tatsachen.

2.2. Ist $z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$ ein Poincarésches Koordinatensystem, so führt die Abbildung $p \to z(p)$ die Gesamtheit der Geodätischen von $\mathfrak{H}$ über in die Gesamtheit der zur reellen Achse orthogonalen Halbkreise und Halbgeraden der oberen z-Halbebene.

2.3. Ist T eine (eigentliche) Bewegung von $\mathfrak{H}$ und $z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$ irgendein Poincarésches Koordinatensystem auf $\mathfrak{H}$, so gibt es solche reelle Konstanten a, b, c, d $(ad - bc = 1)$, daß

$$z(Tp) = \frac{az(p)+b}{cz(p)+d}.$$

Die Zahl $|a + d|$ ist unabhängig vom Koordinatensystem $z(p)$, und es gilt

$|a + d| > 2$ genau dann, wenn T eine Translation $\neq E$ ist,
$|a + d| = 2$ genau dann, wenn T eine Grenzdrehung oder die Identität E ist,
$|a + d| < 2$ genau dann, wenn T eine Drehung $\neq E$ ist.

2.4. Für jedes Poincarésche Koordinatensystem $z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$ auf $\mathfrak{H}$ gilt

$$\operatorname{Cos} \varrho(p, q) = 1 + \frac{(x_1(p) - x_1(q))^2 + (x_2(p) - x_2(q))^2}{2\, x_2(p)\, x_2(q)}.$$

2.5. Aus 2.3 und 2.4 folgt: Für jedes feste $q \in \mathfrak{H}$ und jede Bewegung T ist $\operatorname{Cos} \varrho(Tp, q)$ eine auf $\mathfrak{H}$ reell-analytische Funktion von p.

2.6. Ist $T \neq E$ eine Translation von $\mathfrak{H}$, so gibt es auf $\mathfrak{H}$ ein solches Poincarésches Koordinatensystem $z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$, daß

$$z(Tp) = \alpha z(p), \quad \alpha > 1. \tag{2}$$

Hieraus ergibt sich wegen 2.2 sofort, daß es auf $\mathfrak{H}$ eine einzige Geodätische [nämlich $x_1(p) = 0$] gibt, welche durch T in sich selbst übergeführt wird. Aus (2) folgt für jede ganze Zahl m: $z(T^m p) = \alpha^m z(p)$. Daraus und aus 2.4 ergibt sich leicht

$$\operatorname{Cos} \varrho(T^m p, p) = 1 + \left(\frac{\alpha^m + \alpha^{-m}}{2} - 1\right)\left(1 + \frac{x_1^2(p)}{x_2^2(p)}\right).$$

Hieraus erkennt man sofort

$$\operatorname{Cos} \mu(T^m) = \operatorname{Cos} \inf_{p \in \mathfrak{H}} \varrho(T^m p, p) = \inf_{p \in \mathfrak{H}} \operatorname{Cos} \varrho(T^m p, p) = \frac{\alpha^m + \alpha^{-m}}{2}.$$

Daher gilt wegen $\alpha > 1$: $\mu(T^m) = |m| \log \alpha$ und somit

$$\mu(T) = \log \alpha > 0 \tag{3}$$

$$\mu(T^m) = |m|\, \mu(T) \tag{4}$$

$$\operatorname{Cos} \varrho(T^m p, p) = 1 + (\operatorname{Cos} \mu(T^m) - 1)\left(1 + \frac{x_1^2(p)}{x_2^2(p)}\right). \tag{5}$$

2.7. Ist T eine Grenzdrehung von $\mathfrak{H}$, so gibt es auf $\mathfrak{H}$ ein solches Poincarésches Koordinatensystem $z(p) = x_1(p) + i x_2(p)$, daß entweder

$$z(Tp) = z(p) + 1 \quad \text{oder} \quad z(Tp) = z(p) - 1.$$

Dann ist nach 2.4

$$\operatorname{Cos} \varrho(Tp, p) = 1 + \frac{1}{2 x_2^2(p)}$$

und somit

$$\mu(T) = \inf_{p \in \mathfrak{H}} \varrho(Tp, p) = 0 .$$

2.8. Ist T eine Drehung von $\mathfrak{H}$, so ist trivialerweise $\mu(T) = 0$, da T auf $\mathfrak{H}$ einen Fixpunkt besitzt. Somit ergibt sich aus 2.6 und 2.7, daß die Translationen $T \neq E$ die einzigen Bewegungen von $\mathfrak{H}$ mit positiver Verschiebungslänge $\mu(T)$ sind.

2.9. Oft wird es zweckmäßig sein, statt Poincaréscher Koordinaten sog. geodätische Polarkoordinaten mit dem Pol q zu verwenden: Sei $\vartheta(p)$,

$$0 \leqq \vartheta(p) < 2\pi , \quad p \in \mathfrak{H} - q$$

der in positivem Sinne gemessene Winkel zwischen dem von q nach p führenden geodätischen Strahl und einem festen Strahl durch q. Dann ist

$$\{\varrho(p) = \varrho(p, q), \vartheta(p)\}$$

ein überall auf $\mathfrak{H} - q$ reguläres Koordinatensystem, bezüglich dessen die metrische Differentialform von $\mathfrak{H}$ die Gestalt

$$ds^2 = d\varrho^2 + \mathrm{Sin}^2 \varrho \, d\vartheta^2 \tag{6}$$

besitzt.

2.10. Es sei $K[q, r]$ die hyperbolische Kreisscheibe mit dem Zentrum q und dem Radius r, i. e. die Punktmenge $\{p \mid \varrho(p, q) \leqq r\}$. Dann ergibt sich aus (6)

$$\iint\limits_{K[q,r]} d\omega = \int\limits_{\vartheta=0}^{2\pi} \int\limits_{\varrho=0}^{r} \mathrm{Sin}\,\varrho \, d\varrho \, d\vartheta = 2\pi(\mathrm{Cos}\, r - 1) .$$

2.11. Es sei $\{\xi(p), \eta(p)\}$ irgendein lokales reguläres Koordinatensystem auf $\mathfrak{H}$, und es sei $ds^2 = E(\xi, \eta)\, d\xi^2 + 2F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + G(\xi, \eta)\, d\eta^2$ die zugehörige metrische Differentialform von $\mathfrak{H}$. Dann drücken sich die beiden zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Beltramischen Differentialoperatoren ∇_p und Δ_p im Koordinatensystem $\{\xi(p), \eta(p)\}$ folgendermaßen aus:

$$\nabla_p f(p) = \frac{E\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 - 2F \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial f}{\partial \eta} + G\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2}{EG - F^2}$$

$$\Delta_p f(p) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{E \frac{\partial f}{\partial \eta} - F \frac{\partial f}{\partial \xi}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{G \frac{\partial f}{\partial \xi} - F \frac{\partial f}{\partial \eta}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\} .$$

2.12. Es sei T eine Bewegung von $\mathfrak{H}$ und $s = \sigma + it$. Dann gilt

(a) $\Delta_p \,\mathrm{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) = s(s-1)\, \mathrm{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) - s(s+1)\, \mathrm{Cos}^{-(s+2)} \varrho(Tp, q)$

(b) $\Delta_p \,\mathrm{Cos}\, \varrho(Tp, q) \quad = 2\,\mathrm{Cos}\, \varrho(Tp, q)$

(c) $\nabla_p \,\mathrm{Cos}\, \varrho(Tp, q) \quad = \mathrm{Sin}^2 \varrho(Tp, q)$

(d) $\nabla_p^2 \,\mathrm{Cos}\, \varrho(Tp, q) \quad = 4\, \mathrm{Sin}^2 \varrho(Tp, q)\, \mathrm{Cos}^2 \varrho(Tp, q)$.

2.13. Beweis: Wegen der Bewegungsinvarianz der Beltramischen Operatoren gilt

$$\begin{aligned} \Delta_p \mathrm{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) &= (\Delta_u \mathrm{Cos}^{-s} \varrho(u, q))_{u = Tp} \\ \nabla_p \mathrm{Cos}\, \varrho(Tp, q) &= (\nabla_u \mathrm{Cos}\, \varrho(u, q))_{u = Tp} \\ \nabla_p^2 \mathrm{Cos}\, \varrho(Tp, q) &= (\nabla_u^2 \mathrm{Cos}\, \varrho(u, q))_{u = Tp} . \end{aligned} \tag{7}$$

Zur weiteren Berechnung der rechten Seiten führen wir gemäß 2.9 auf $\mathfrak{H}$ geodätische Polarkoordinaten mit dem Pol q ein:

$$\varrho(u) = \varrho(u, q)\,, \quad \vartheta(u)\,, \quad u \in \mathfrak{H} - q\,. \tag{8}$$

Weil die metrische Differentialform von $\mathfrak{H}$ im Koordinatensystem $\{\varrho(u), \vartheta(u)\}$ die Gestalt $d\varrho^2 + \operatorname{Sin}^2\varrho\, d\vartheta^2$ besitzt, so drücken sich die Beltramischen Operatoren nach 2.11 in diesem System folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \frac{1}{\operatorname{Sin}\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\operatorname{Sin}\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}\right) + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\varrho}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\,, \quad u \in \mathfrak{H} \\ \nabla_u &= \left(\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)^2 + \frac{1}{\operatorname{Sin}^2\varrho}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)^2, \quad u \in \mathfrak{H}. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (7), (8) und (9) ergeben sich ohne weiteres die Gleichungen (a) bis (d) für $p \neq T^{-1}q$. Die linken und rechten Seiten dieser Gleichungen sind aber wegen 2.5 überall auf $\mathfrak{H}$ stetige Funktionen von p. Folglich müssen die Gleichungen (a) bis (d) auch noch für $p = T^{-1}q$ gelten. q.e.d.

2.14. Die reelle Funktion $f(p)$ sei auf $\mathfrak{H}$ zweimal stetig differenzierbar bezüglich der Poincaréschen Koordination $x_1(p)$, $x_2(p)$. Dann gilt[12])

$$\left|\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}\right| \leqq x_2^{-1}(p)\sqrt{\nabla_p f(p)}$$

und für $\nabla_p f(p) \neq 0$:

$$\left|\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_k}\right| \leqq x_2^{-2}(p)\left(\sqrt{\frac{\nabla_p^2 f(p)}{\nabla_p f(p)}} + \sqrt{\nabla_p f(p)} + |\Delta_p f(p)|\right).$$

2.15. Aus 2.5, 2.12, 2.14 ergibt sich

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q)\right| \leqq x_2^{-1}(p)\operatorname{Sin}\varrho(Tp, q) < x_2^{-1}(p)\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q) \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\operatorname{Cos}\varrho(Tp,q)\right| &\leqq x_2^{-2}(p)\,(4\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q) + \operatorname{Sin}\varrho(Tp, q) < \\ &< 5x_2^{-2}(p)\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{x_i}\operatorname{Cos}^{-s}\varrho(Tp, q) = -s\operatorname{Cos}^{-s-1}\varrho(Tp, q)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\operatorname{Cos}^{-s}\varrho(Tp, q) &= -s\operatorname{Cos}^{-s-1}\varrho(Tp, q)\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_k}\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q) + \\ &+ s(s+1)\operatorname{Cos}^{-s-2}\varrho(Tp, q)\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q)\frac{\partial}{\partial x_k}\operatorname{Cos}\varrho(Tp, q)\,. \end{aligned}$$

Daraus und aus (10), (11) ergibt sich sofort

2.16. Es sei T eine Bewegung von $\mathfrak{H}$, $s = \sigma + it$, und $\{x_1(p), x_2(p)\}$ ein Poincarésches Koordinatensystem auf $\mathfrak{H}$. Dann gilt:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{Cos}^{-s}\varrho(Tp, q)\right| < |s|\, x_2^{-1}(p)\operatorname{Cos}^{-\sigma}\varrho(Tp, q)$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\operatorname{Cos}^{-s}\varrho(Tp,q)\right| < |s|\,(5 + |s+1|)\, x_2^{-2}(p)\operatorname{Cos}^{-\sigma}\varrho(Tp, q)\,.$$

---

[12]) [4], pag. 35, Lemma 2.

3. Beweis von Satz 1

3.1. Es sei $N(p, q, t)$ die Anzahl der Elemente der Menge

$$\Theta = \{T \mid T \in \Lambda,\ \varrho(Tp, q) \leqq t\}\ .$$

Es gibt eine nur von $\mathfrak{F}$ abhängige positive Konstante c_0 so, daß für alle $t \geqq 0$ $N(p, q, t) < c_0 \mathrm{Cos}\, t$.

3.2. Beweis: Da $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche ist, gilt offensichtlich $\mu_0 = \inf\limits_{\mathfrak{W} \neq 0} \mu(\mathfrak{W}) > 0$. Nach 1.2 ist somit $\varrho(Tp, p) \geqq \mu_0 > 0$ für alle $p \in \mathfrak{H}$ und $T \in \Lambda - E$. Daraus folgt aber leicht, daß die Kreisscheiben $K[Tp, \mu_0/2]$, $T \in \Lambda$, paarweise nicht überlappen. Für $T \in \Theta$ liegt aber die Kreisscheibe $K[Tp, \mu_0/2]$ in der Kreisscheibe $K[q, t + \mu_0/2]$. Somit gilt

$$\sum_{T \in \Theta} \iint\limits_{K[T_p, \mu_0/2]} d\omega \leqq \iint\limits_{K[q, t+\mu_0/2]} d\omega\ ,$$

also nach 2.10: $2\pi(\mathrm{Cos}\, \mu_0/2 - 1)\, N(p, q, t) \leqq 2\pi(\mathrm{Cos}(t + \mu_0/2) - 1)$. Daraus folgt

$$N(p, q, t) \leqq \frac{\mathrm{Cos}(t + \mu_0/2) - 1}{\mathrm{Cos}\, \mu_0/2 - 1} < \frac{\mathrm{Cos}(t + \mu_0/2)}{\mathrm{Cos}\, \mu_0/2 - 1} < \frac{e^{\mu_0/2}}{\mathrm{Cos}\, \mu_0/2 - 1} \mathrm{Cos}\, t$$

q.e.d.

3.3. Für $\sigma > 1$ und $0 \leqq t \leqq t_1$ gilt

$$\sum_{t \leqq \varrho(Tp,q) \leqq t_1} \mathrm{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) < c_0 \left(1 + \frac{1}{\sigma - 1}\right) \mathrm{Cos}^{-(\sigma-1)}\, t\ .$$

3.4. Beweis: Offenbar gilt

$$\sum_{t \leqq \varrho(Tp,q) \leqq t_1} \mathrm{Cos}^{-\sigma} \varrho(Tp, q) = N(p, q, t)\, \mathrm{Cos}^{-\sigma} t + \int_t^{t_1} \mathrm{Cos}^{-\sigma} \tau\, dN(p, q, \tau)\ .$$

Partielle Integration ergibt

$$\sum_{t \leqq \varrho(Tp,q) \leqq t_1} \mathrm{Cos}^{-\sigma} \varrho(Tp, q) = N(p, q, t_1)\, \mathrm{Cos}^{-\sigma} t_1 + \sigma \int_t^{t_1} N(p, q, \tau)\, \mathrm{Cos}^{-\sigma-1} \tau\, \mathrm{Sin}\, \tau\, d\tau\ .$$

Daraus und aus 3.1 folgt für $\sigma > 1$

$$\sum_{t \leqq \varrho(Tp,q) \leqq t_1} \mathrm{Cos}^{-\sigma} \varrho(Tp, q) < c_0 \mathrm{Cos}^{-(\sigma-1)} t_1 + c_0 \sigma \int_t^{t_1} \mathrm{Cos}^{-\sigma} \tau\, \mathrm{Sin}\, \tau\, d\tau$$

$$= -\frac{c_0}{\sigma - 1} \mathrm{Cos}^{-(\sigma-1)} t_1 + c_0 \left(1 + \frac{1}{\sigma - 1}\right) \mathrm{Cos}^{-(\sigma-1)} t < c_0 \left(1 + \frac{1}{\sigma - 1}\right) \mathrm{Cos}^{-(\sigma-1)} t\ .$$

3.5. Es sei $\{T_n \mid n \geqq 1\}$ eine beliebige Anordnung der Elemente der Gruppe Λ und $\sigma > 1$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Cos}^{-\sigma} \varrho(T_n p, q)$$

gleichmäßig in (p, q) auf jedem Kompaktum von $\mathfrak{H}$.

3.6. Beweis: Sei $p_0 \in \mathfrak{H}$ und $r > 0$. Die Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir die gleichmäßige Konvergenz für alle $p, q \in K[p_0, r]$ zeigen können.

Wegen $\sigma > 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $t_\varepsilon > 0$, daß

$$c_0\left(1 + \frac{1}{\sigma - 1}\right) \operatorname{Cos}^{-(\sigma-1)} t_\varepsilon < \varepsilon . \tag{1}$$

Wegen der Diskontinuität von Λ gibt es einen solchen Index $j_0 = j_0(\varepsilon, r)$, daß $T_j(K[p_0, r]) \cap K[p_0, r + t_\varepsilon] = 0$ für alle $j > j_0(\varepsilon, r)$. Dann gilt für $p, q \in K[p_0, r]$ und $j > j_0(\varepsilon, r)$:

$$\begin{aligned} 2r + t_\varepsilon < \varrho(T_j p_0, p_0) &\leqq \varrho(T_j p_0, T_j p) + \varrho(T_j p, q) + \varrho(q, p_0) \\ &= \varrho(T_j p, q) + \varrho(p_0, p) + \varrho(p_0, q) \leqq \varrho(T_j p, q) + 2r , \end{aligned}$$

also $\varrho(T_j p, q) > t_\varepsilon$. Somit gilt nach 3.3 und (1)

$$\sum_{j=m}^{n} \operatorname{Cos}^{-\sigma} \varrho(T_j p, q) < c_0\left(1 + \frac{1}{\sigma - 1}\right) \operatorname{Cos}^{-(\sigma-1)} t_\varepsilon < \varepsilon$$

für alle $p, q \in K[p_0, r]$ und $n \geqq m > j_0(\varepsilon, r)$. q.e.d.

3.7. Aus 3.6 und 2.16 folgt: Es sei $\{x_1(p), x_2(p)\}$ ein Poincarésches Koordinatensystem auf $\mathfrak{H}$, $\Lambda = \{T_n \mid n \geqq 1\}$, $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$. Dann konvergieren die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(T_n p, q) , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(T_n p, q) , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(T_n p, q)$$

absolut und gleichmäßig in (p, q) auf jedem Kompaktum von $\mathfrak{H}$.

3.8. Aus 3.7 und 2.5 folgt: Für alle $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, und $q \in \mathfrak{H}$ gilt:

(a) $G(p, q; s) = \sum\limits_{T \in \Lambda} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q)$ ist eine auf $\mathfrak{H}$ stetige und bezüglich Λ automorphe Funktion von p.

(b) $G(p, q; s)$ ist überall auf $\mathfrak{H}$ zweimal stetig differenzierbar nach Poincaréschen Koordinaten $x_1(p)$, $x_2(p)$, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} G(p, q; s) = \sum_{T \in \Lambda} \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) , \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} G(p, q; s) = \sum_{T \in \Lambda} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) .$$

3.9. Für $\sigma > 1$ gilt

$$\Delta_p G(p, q; s) + s(1 - s)\, G(p, q; s) + s(1 + s)\, G(p, q, s + 2) = 0 .$$

3.10. Beweis: Sei $\{x_1(p), x_2(p)\}$ ein Poincarésches Koordinatensystem auf $\mathfrak{H}$. Dann ist nach 2.1 und 2.11

$$\Delta_p = x_2^2(p) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) .$$

Somit folgt aus 3.8 (b)

$$\Delta_p G(p, q, s) = \sum_{T \in \Lambda} \Delta_p \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q) , \quad \sigma > 1 .$$

Hieraus und aus 2.12 (a) ergibt sich sofort unsere Behauptung.

4. Beweis von Satz 2 und Satz 4

4.1. Da die Fläche $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, besitzt die Gruppe Λ kompakte Fundamentalbereiche; es gibt sogar einen kompakten Fundamentalbereich

$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{H}$, welcher ein von endlich vielen geodätischen Strecken berandetes konvexes Polygon ist[13]).

Wir untersuchen jetzt die Fourierkoeffizienten der automorphen Funktion $G(p, q; s)$ bezüglich des in 1.6 eingeführten Orthonormalsystems $\{\varphi_n(p)\}$:

$$a_n(s, q) = \iint_{\mathfrak{B}} G(p, q; s)\ \varphi_n(p)\, d\omega_p\,, \quad n \geqq 0\,, \quad \sigma > 1\,. \tag{1}$$

Da das Fundamentalpolygon $\mathfrak{B}$ kompakt ist, folgt aus 3.7

$$\begin{aligned} a_n(s, q) &= \sum_{T \in \Lambda} \iint_{\mathfrak{B}} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q)\ \varphi_n(p)\, d\omega_p \\ &= \sum_{T \in \Lambda} \iint_{\mathfrak{B}} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(Tp, q)\ \varphi_n(Tp)\, d\omega_p \\ &= \sum_{T \in \Lambda} \iint_{T(\mathfrak{B})} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)\, d\omega_p\,, \quad \sigma > 1\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Dabei wurde benutzt, daß $\varphi_n(p)$ automorph bezüglich Λ ist, und daß das Flächenelement $d\omega$ invariant gegenüber den Bewegungen T ist. In derselben Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_{\mathfrak{B}} G(p, q, \sigma)\ |\varphi_n(p)|\, d\omega_p &= \sum_{T \in \Lambda} \iint_{T(\mathfrak{B})} \operatorname{Cos}^{-\sigma} \varrho(p, q)\ |\varphi_n(p)|\, d\omega_p \\ &= \sum_{T \in \Lambda} \iint_{T(\mathfrak{B})} |\operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)|\, d\omega_p\,, \quad \sigma > 1\,, \end{aligned}$$

also insbesondere

$$\sum_{T \in \Lambda} \iint_{T(\mathfrak{B})} |\operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)|\, d\omega_p < +\infty \quad \text{für} \quad \sigma > 1\,.$$

Daraus folgt, da die Fundamentalpolygone $T(\mathfrak{B})$, $T \in \Lambda$, ganz $\mathfrak{H}$ überdecken und paarweise nicht überlappen, daß $\operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)$ für $\sigma > 1$ über $\mathfrak{H}$ integrierbar ist und daß gilt:

$$\sum_{T \in \Lambda} \iint_{T(\mathfrak{B})} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)\, d\omega_p = \iint_{\mathfrak{H}} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)\, d\omega\,.$$

Somit folgt aus (2)

$$a_n(s, q) = \iint_{\mathfrak{H}} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(p, q)\ \varphi_n(p)\, d\omega\,, \quad \sigma > 1\,. \tag{3}$$

Zur weiteren Berechnung dieses Integrals führen wir auf $\mathfrak{H} - q$ in folgender Weise Koordinaten ein: Es sei $\vartheta(p)$,

$$0 \leqq \vartheta(p) < 2\pi\,, \quad p \in \mathfrak{H} - q\,,$$

der in positivem Sinne gemessene Winkel zwischen dem geodätischen Strahl von q nach p und einem festen Strahl durch q, und

$$\tau(p) = \log \operatorname{Cos} \varrho(p, q)\,. \tag{4}$$

Wie man auf Grund von 2.9 leicht nachrechnet, drückt sich die metrische Differentialform von $\mathfrak{H}$ in dem auf $\mathfrak{H} - q$ überall regulären Koordinatensystem $\{\tau(p), \vartheta(p)\}$ folgendermaßen aus:

$$ds^2 = \frac{e^{2\tau}}{e^{2\tau} - 1}\, d\tau^2 + (e^{2\tau} - 1)\, d\vartheta^2\,;$$

[13]) Siehe Anmerkung [1]).

daher ist

(5) $$d\omega_p = e^\tau d\tau\, d\vartheta\ .$$

Nun definieren wir

(6) $$\begin{aligned}\psi_n(\tau,\vartheta) &= \varphi_n(p(\tau,\vartheta)) \quad \text{für} \quad 0<\tau<\infty,\ 0\leqq\vartheta<2\pi\\ \psi_n(0,\vartheta) &= \varphi_n(q) \qquad\quad\ \text{für} \quad 0\leqq\vartheta<2\pi\end{aligned}$$

(7) $$\Phi_n(\tau) = \int_0^{2\pi} \psi_n(\tau,\vartheta)\, d\vartheta\ .$$

Da $\varphi_n(p)$ auf $\mathfrak{H}$ stetig und beschränkt ist, gilt offenbar:

4.2. $\Phi_n(\tau)$ ist stetig und beschränkt für $\tau \geqq 0$ und es gilt

$$\Phi_n(0) = 2\pi\ \varphi_n(q)\ .$$

4.3. Aus (3) bis (7) ergibt sich jetzt

$$a_n(s,q) = \int_0^\infty e^{-(s-1)\tau}\, \Phi_n(\tau)\, d\tau\ .$$

Daraus und aus 4.2 folgt nach bekannten Sätzen[14]) aus der Theorie der Laplace-Transformation:

4.4. $a_n(s,q)$ ist regulär analytisch in der Halbebene $\sigma > 1$, und es gilt

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \sigma a_n(\sigma,q) = 2\pi\ \varphi_n(q)\ .$$

4.5. Die Funktion

(8) $$f_n(s) = a_n(s,q)\, 2^{-s}\,\Gamma(s) \Big/ \Gamma\left(\frac{s-s^+(\lambda_n')}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-s^-(\lambda_n')}{2}\right)$$

ist regulär analytisch in der Halbebene $\sigma > 1$, und es gilt dort

$$f_n(s+2) = f_n(s)\ .$$

4.6. Beweis: Da $1/\Gamma(s)$ eine ganze Funktion ist, die nur in den Punkten $s = -l$, $l \geqq 0$ ganz, verschwindet, so folgt aus (8) und 4.4 in der Tat, daß $f_n(s)$ regulär in der Halbebene $\sigma > 1$ ist.

Wegen (1) und 3.9 gilt für $\sigma > 1$

(9) $$\iint_{\mathfrak{B}} \varphi_n(p)\, \Delta_p\, G(p,q;s)\, d\omega_p + s(1-s)\, a_n(s,q) + s(1+s)\, a_n(s+2,q) = 0\ .$$

Weil die Fläche $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, und weil $\varphi_n(p)$ und $G(p,q;s)$ zweimal stetig differenzierbare und bezüglich Λ automorphe Funktionen von p sind, so ergibt die Greensche Formel

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{B}} \varphi_n(p)\, \Delta_p G(p,q;s)\, d\omega_n &= \iint_{\mathfrak{B}} G(p,q;s)\, \Delta_p\, \varphi_n(p)\, d\omega_p\\ &= -\lambda_n' \iint_{\mathfrak{B}} G(p,q;s)\ \varphi_n(p)\, d\omega = -\lambda_n' a_n(s,q)\ .\end{aligned}$$

Daraus und aus (9) folgt: $s(s+1)\, a_n(s+2,q) = (s^2 - s + \lambda_n')\, a_n(s,q)$; somit gilt wegen 1.4 (8)

$$s(s+1)\, a_n(s+2,q) = (s - s^+(\lambda_n'))\, (s - s^-(\lambda_n'))\, a_n(s,q)\ .$$

[14]) [2], pag. 473, Satz 1.

Hieraus und aus (8) folgt nun unter Berücksichtigung von $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ in der Tat: $f_n(s+2) = f_n(s)$.

4.7. Aus 1.4 (8) und aus der Stirlingschen asymptotischen Darstellung von $\Gamma(s)$ ergibt sich leicht

$$2^{-\sigma}\,\Gamma(\sigma)\Big/\Gamma\left(\frac{\sigma - s^+(\lambda_n')}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma - s^-(\lambda_n')}{2}\right) \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,\sigma\,, \quad \sigma \to +\infty\,.$$

Somit folgt aus (8) und 4.4

$$\lim_{\sigma\to+\infty} f_n(\sigma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\varphi_n(q)\,.$$

Daraus und aus 4.5 folgt nun offensichtlich $f_n(s) = \text{const} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\varphi_n(q)$. Damit haben wir bewiesen:

4.8. Es sei

$$a_n(s, q) = \iint_{\mathfrak{B}} G(p, q; s)\,\varphi_n(p)\,d\omega_p\,, \quad \sigma > 1\,, \quad n \geqq 0$$

$$F(s, \lambda) = \Gamma\left(\frac{s - s^+(\lambda)}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s - s^-(\lambda)}{2}\right), \quad \lambda \geqq 0\,. \tag{10}$$

Dann gilt für $\sigma > 1$

$$a_n(s, q) = \sqrt{\pi}\,\frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)}\,F(s, \lambda_n')\,\varphi_n(q)\,.$$

4.9. Es gibt eine nur von $\mathfrak{F}$ abhängige Konstante $c_1 > 0$ derart, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(s, \lambda_n')\,\varphi_n(q)|^2 \leqq c_1\Gamma^2(\sigma_0) \quad \text{für} \quad 2 \leqq \sigma \leqq \sigma_0\,.$$

4.10. Beweis: Da $\{\varphi_n(p)\}$ ein Orthonormalsystem ist, gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(s, q)|^2 \leqq \iint_{\mathfrak{B}} |G(p, q; s)|^2\,d\omega_p \quad \text{für} \quad \sigma > 1\,.$$

Daraus folgt nach 4.8

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(s, \lambda_n')\,\varphi_n(q)|^2 \leqq \frac{|\Gamma(s)|^2}{\pi\,2^{2\sigma-2}} \iint_{\mathfrak{B}} |G(p, q; s)|^2\,d\omega_p \leqq \tag{11}$$

$$\leqq \frac{|\Gamma(s)|^2}{4\pi} \iint_{\mathfrak{B}} |G(p, q; s)|^2\,d\omega_p\,, \quad \sigma \geqq 2\,.$$

Aus der für $\sigma > 0$ gültigen Darstellung $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt$ ist zu entnehmen, daß $|\Gamma(s)| \leqq \Gamma(\sigma)$ für $\sigma > 0$. Da außerdem $\Gamma(\sigma)$ für $\sigma \geqq 2$ monoton wächst, so folgt aus (11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(s, \lambda_n')\,\varphi_n(q)|^2 \leqq \frac{1}{4\pi}\,\Gamma^2(\sigma_0) \iint_{\mathfrak{B}} |G(p, q, s)|^2\,d\omega_p \quad \text{für} \quad 2 \leqq \sigma \leqq \sigma_0\,. \tag{12}$$

Nach 3.3 gilt

$$|G(p, q, s)| \leqq G(p, q; \sigma) \leqq c_0\left(1 + \frac{1}{\sigma - 1}\right) \quad \text{für} \quad \sigma > 1\,.$$

Daher ist wegen 1.5 (10)

$$\iint_{\mathfrak{B}} |G(p,q;s)|^2 d\omega_p \leqq c_0^2 \left(1+\frac{1}{\sigma-1}\right)^2 4\pi(g_{\mathfrak{F}}-1) \leqq 16\pi\, c_0^2 (g_{\mathfrak{F}}-1) \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 2\,.$$

Somit folgt aus (12)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(s,\lambda_n')\,\varphi_n(q)|^2 \leqq 4c_0^2(g_{\mathfrak{F}}-1)\,\Gamma^2(\sigma_0) \quad \text{für} \quad 2\leqq\sigma\leqq\sigma_0\,.$$

Da die Konstante c_0 nach 3.1 nur von $\mathfrak{F}$ abhängt, ist damit unsere Behauptung bewiesen.

4.11. Es sei $h \geqq 2$ ganz, $Q_h = \{s|\ |\sigma| \leqq h,\ |t| \leqq h\}$. Dann gilt für alle $s \in Q_h$ und $\lambda \geqq 4h^2 + 1/4$

$$|F(s,\lambda)| \leqq 80\left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1}\frac{1}{\lambda}\,|F(s+2h,\lambda)|\,.$$

4.12. Beweis: Wegen $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ erfüllt die Funktion (10) offenbar die Differenzengleichung

$$F(s,\lambda) = \frac{4}{(s-s^+(\lambda))(s-s^-(\lambda))}\,F(s+2,\lambda)\,.$$

Daraus ergibt sich für $h \geqq 2$

$$F(s,\lambda) = \frac{4^h}{(s-s^+(\lambda))\,(s-s^-(\lambda))}\left(\prod_{k=1}^{h-1}(s+2k-s^+(\lambda))\,(s+2k-s^-(\lambda))\right)^{-1}\times$$
$$\times\, F(s+2h,\lambda)\,.$$

Berücksichtigt man noch, daß nach 1.4 (8) $s^+(\lambda)\,s^-(\lambda) = \lambda$, so kommt

$$F(s,\lambda) = \frac{4^h\lambda^{-1}}{\left(1-\frac{s}{s^+(\lambda)}\right)\left(1-\frac{s}{s^-(\lambda)}\right)}\left(\prod_{k=1}^{h-1}(s+2k-s^+(\lambda))\,(s+2k-s^-(\lambda))\right)^{-1}\times \tag{12}$$
$$\times\, F(s+2h,\lambda)\,.$$

Nach 1.4 (8) gilt

$$|\mathrm{Im}\, s^+(\lambda)| = |\mathrm{Im}\, s^-(\lambda)| \geqq 2h \quad \text{für} \quad \lambda \geqq 4h^2 + 1/4\,. \tag{13}$$

Daher gilt für $\lambda \geqq 4h^2 + 1/4$, $s \in Q_h$, k ganz:

$$|s+2k-s^\pm(\lambda)| \geqq |\mathrm{Im}(s+2k-s^\pm(\lambda))| = |\sigma - \mathrm{Im}\,s^\pm(\lambda)| \geqq$$
$$\geqq |\mathrm{Im}\,s^\pm(\lambda)| - |\sigma| = 2h - |\sigma| \geqq h\,,$$

somit

$$\left|\prod_{k=1}^{h-1}(s+2k-s^+(\lambda))\,(s+2k-s^-(\lambda))\right| \geqq h^{2h-2}, \quad s\in Q_h, \quad \lambda \geqq 4h^2+1/4\,. \tag{14}$$

Wegen (13) gilt für $s \in Q_h$, $\lambda \geqq 4h^2 + 1/4$ ferner

$$\left|\frac{s}{s^\pm(\lambda)}\right| \leqq \frac{\sqrt{2}\,h}{|\mathrm{Im}\,s^\pm(\lambda)|} \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left|1-\frac{s}{s^\pm(\lambda)}\right| \geqq 1 - \left|\frac{s}{s^\pm(\lambda)}\right| \geqq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0\,,$$

somit

$$\left|\left(1-\frac{s}{s^+(\lambda)}\right)\left(1-\frac{s}{s^-(\lambda)}\right)\right| \geqq \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 > \frac{1}{20}\,, \quad s \in Q_h\,, \quad \lambda \geqq 4h^2 + 1/4. \tag{15}$$

Aus (12) und (14), (15) folgt aber die Behauptung.

4.13. Es sei $h \geqq 2$ ganz, $n_0(h) = \operatorname{Max}\{n \mid \lambda'_n \leqq 4h^2 + 1/4\}$. Dann gilt:

(a) Für alle $l \geqq k \geqq n_0(h)$, $s \in Q_h$, $p, q \in \mathfrak{H}$

$$\sum_{n=k}^{l} |F(s, \lambda'_n)\, \varphi_n(p)\, \varphi_n(q)| \leqq c_2 \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \left[\sum_{n=k}^{l} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2\right]^{1/2}.$$

(b) Für alle $l \geqq k \geqq n_0(h)$, $s \in Q_h$

$$\sum_{n=k}^{l} |F(s, \lambda'_n)| \leqq c_3 \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \left[\sum_{n=k}^{l} 1/\lambda_n'^2\right]^{1/2}.$$

Dabei sind die Konstanten c_2, c_3 nur von $\mathfrak{F}$ abhängig.

4.14. Beweis: Für $l \geqq k \geqq n_0(h)$ und $s \in Q_h$ folgt nach 4.11

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{l} |F(s, \lambda'_n)\, \varphi_n(p)\, \varphi_n(q)| &\leqq 80 \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \sum_{n=k}^{l} |F(s+2h, \lambda'_n)\, \varphi_n(q)| \frac{|\varphi_n(p)|}{\lambda'_n} \leqq \\ &\leqq 80 \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \left[\sum_{n=k}^{l} |F(s+2h, \lambda'_n)\, \varphi_n(q)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=k}^{l} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

Für $s \in Q_h$, $h \geqq 2$, gilt aber $2 \leqq h \leqq Re(s+2h) \leqq 3h$. Daher ist nach 4.9

$$\sum_{n=k}^{l} |F(s+2h, \lambda'_n)\, \varphi_n(q)|^2 \leqq c_1 \Gamma^2(3h),$$

wobei die Konstante c_1 nur von $\mathfrak{F}$ abhängt. Somit folgt aus (16)

$$\sum_{n=k}^{l} |F(s, \lambda'_n)\, \varphi_n(p)\, \varphi_n(q)| \leqq 80 \sqrt{c_1} \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \left[\sum_{n=k}^{l} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad l \geqq k \geqq n_0(h), \quad s \in Q_h\,. \tag{17}$$

Damit ist die Behauptung (a) bewiesen. Aus (17) ergibt sich für $p = q$

$$\sum_{n=k}^{l} |F(s, \lambda'_n)|\, |\varphi_n(p)|^2 \leqq 80 \sqrt{c_1} \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \left[\sum_{n=k}^{l} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad l \geqq k \geqq n_0(h), \quad s \in Q_h\,.$$

Daraus folgt wegen $\iint\limits_{\mathfrak{B}} |\varphi_n(p)|^2 d\omega = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{l} |F(s, \lambda'_n)| &\leqq 80 \sqrt{c_1} \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \iint\limits_{\mathfrak{B}} \left[\sum_{n=k}^{l} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} d\omega \leqq \\ &\leqq 80 \sqrt{c_1} \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \left[\iint\limits_{\mathfrak{B}} \sum_{n=k}^{l} \left(\frac{\varphi_n(p)}{\lambda'_n}\right)^2 d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint\limits_{\mathfrak{B}} d\omega\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 80 \sqrt{4\pi(g_{\mathfrak{F}} - 1)\, c_1} \left(\frac{4}{h^2}\right)^{h-1} \Gamma(3h) \left[\sum_{n=k}^{l} \left(\frac{1}{\lambda'_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist auch die Behauptung (b) bewiesen.

4.15. Aus 4.13 und 1.7 (a) folgt: Es sei $h \geqq 2$ ganz, $Q_h = \{s \mid |\sigma| \leqq h, |t| \leqq h\}$, $n_0(h) = \operatorname{Max}\{n \mid \lambda_n' \leqq 4h^2 + 1/4\}$. Dann gilt
(a) Die Reihe

$$\sum_{n=n_0(h)}^{\infty} F(s, \lambda_n')\, \varphi_n(p)\, \varphi_n(q)$$

konvergiert absolut und gleichmäßig für alle $(p, q, s) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \times Q_h$.
(b) Die Reihe

$$\sum_{n=n_0(h)}^{\infty} F(s, \lambda_n')$$

konvergiert absolut und gleichmäßig in Q_h.

4.16. Wie aus (10) sofort ersichtlich ist, liegen die Pole der meromorphen Funktion $F(s, \lambda)$, $\lambda \geqq 0$, in den Punkten

$$s^+(\lambda) - 2l\,, \quad s^-(\lambda) - 2l\,, \qquad (l \geqq 0 \text{ ganz})\,.$$

Daher ergeben sich aus 4.15 unter Berücksichtigung der in 1.4 eingeführten Bezeichnungen sofort die folgenden Sätze 4.17 und 4.18:

4.17. Die Reihe

$$H(p, q; s) = \sum_{n=1}^{\infty} F(s, \lambda_n')\, \varphi_n(p)\, \varphi_n(q) \tag{18}$$

konvergiert absolut für $s \notin P = \{s^+(\lambda_n) - 2l, s^-(\lambda_n) - 2l \mid n \geqq 1, l \geqq 0\}$ und stellt eine in der ganzen s-Ebene meromorphe Funktion dar, deren Pole in der Punktmenge P enthalten sind. $H(p, q; s)$ besitzt im Punkte $s^{\pm}(\lambda_n) - 2l \in P$ denselben Hauptteil wie die Funktion

$$F(s, \lambda_n) \sum_{\lambda_k' = \lambda_n} \varphi_k(p)\, \varphi_k(q)\,.$$

4.18. Die Reihe

$$H(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F(s, \lambda_n') = \sum_{n=1}^{\infty} m_n F(s, \lambda_n) \tag{19}$$

konvergiert absolut für $s \notin P$ und stellt eine in der ganzen s-Ebene meromorphe Funktion mit der Polmenge P dar. $H(s)$ besitzt im Punkte $s^{\pm}(\lambda_n) - 2l \in P$ denselben Hauptteil wie die Funktion $m_n F(s, \lambda_n)$.

4.19. Weil $\iint_{\mathfrak{B}} \varphi_n(p)\, d\omega = 1$, so folgt aus (18), (19) wegen 4.15 (a):

$$\iint_{\mathfrak{B}} H(p, p, s)\, d\omega = H(s) \quad \text{für} \quad s \notin P\,.$$

4.20. Aus 3.8 und 4.8 folgt nach 1.7 (b) für $\sigma > 1$:

$$G(p, q, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\pi}\, \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} F(s, \lambda_n')\, \varphi_n(q)\, \varphi_n(p)\,.$$

Somit gilt wegen (18) und 1.6 (13)

$$G(p, q, s) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\,(g\mathfrak{z} - 1)}\, \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} F(s, \lambda_0') + \sqrt{\pi}\, \frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)} H(p, q; s)\,, \quad \sigma > 1\,. \tag{20}$$

Nach (10) und 1.4 (9) ist aber

$$F(s, \lambda_0') = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) = \frac{2}{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \tag{21}$$

Ferner gilt die Formel von GAUSS-LEGENDRE

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(s) = 2^{s-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \tag{22}$$

Aus (20), (21), (22) ergibt sich nun

4.21. In der Halbebene $\sigma > 1$ gilt

$$G(p, q; s) = \frac{1}{2(g_{\mathfrak{F}} - 1)}\,\frac{1}{s-1} + \sqrt{\pi}\,\frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)}\,H(p, q, s).$$

4.22. Aus 4.19 und 4.21 folgt: In der Halbebene $\sigma > 1$ gilt

$$\iint_{\mathfrak{B}} G(p, p; s)\, d\omega_p = \frac{2\pi}{s-1} + \sqrt{\pi}\,\frac{2^{s-1}}{\Gamma(s)}\,H(s).$$

5. Beweis von Satz 5

5.1. Nach 2.6 führt jede Translation $T \neq E$ genau eine Geodätische auf $\mathfrak{H}$ in sich selbst über; diese invariante Geodätische a_T heiße die Achse von T. Offenbar gilt

$$a_{T^m} = a_T \quad \text{für} \quad m \neq 0 \tag{1}$$

$$a_{STS^{-1}} = S(a_T). \tag{2}$$

Eine Geodätische a heiße Achse der Gruppe Λ, wenn $a = a_T$ für mindestens ein $T \in \Lambda - E$. Aus der Diskontinuität von Λ folgt leicht[15]):

5.2. Es sei a eine Achse von Λ. Dann ist $\Lambda\{a\} = \{T \mid T \in \Lambda,\ T(a) = a\}$ eine zyklische Untergruppe unendlicher Ordnung von Λ.

5.3. Ein Element $P \in \Lambda$ heiße Primelement, wenn es keine Darstellung $P = Q^n$ mit $n > 1$ und $Q \in \Lambda$ besitzt. Das Inverse eines Primelementes und die zu einem Primelement konjugierten Elemente von Λ sind offenbar ebenfalls Primelemente; eine aus Primelementen bestehende Klasse konjugierter Elemente von Λ möge Primklasse heißen.

Aus 5.2 und (1) folgt sofort: Ein Element $P \in \Lambda - E$ ist genau dann Primelement, wenn es eine Erzeugende der zyklischen Gruppe $\Lambda\{a_P\}$ ist; jedes Element $T \in \Lambda - E$ besitzt genau eine Darstellung $T = P^n$, in welcher $n \geqq 1$ und P ein Primelement ist. Die dadurch eindeutig bestimmte natürliche Zahl $\nu(T) = n$ heiße die Vielfachheit von T.

Sind S, $T \neq E$ konjugierte Elemente von Λ, so ist offensichtlich $\nu(S) = \nu(T)$. Daher können wir für jede Klasse $\Phi \neq \{E\}$ konjugierter Elemente von Λ eindeutig definieren:

$$\nu(\Phi) = \nu(T), \quad T \in \Phi. \tag{3}$$

---

15) Vgl. z. B. [4], pag. 29, Lemma 7 (a).

5.4. Ist Φ irgendeine Klasse konjugierter Elemente von Λ und $n \geqq 1$, so ist offenbar

$$\Phi^n = \{T^n \mid T \in \Phi\} \tag{4}$$

wieder eine volle Klasse konjugierter Elemente. Aus 5.3 folgt nun: Jede Klasse $\Phi \neq \{E\}$ besitzt genau eine Darstellung $\Phi = \Pi^n$, in welcher $n \geqq 1$ und Π eine Primklasse ist; dabei ist $n = \nu(\Phi)$.

5.5. Wir definieren jetzt für jede Homotopieklasse $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}$

$$\nu(\mathfrak{W}) = \nu(\Phi_{\mathfrak{W}}) \,. \tag{5}$$

Da die in 1.2 erklärte Zuordnung $\mathfrak{W} \to \Phi_{\mathfrak{W}}$ die Menge aller Homotopieklassen $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}$ umkehrbar eindeutig auf die Menge aller Klassen $\Phi \neq \{E\}$ konjugierter Elemente von Λ abbildet und offensichtlich die Eigenschaft

$$\Phi_{\mathfrak{W}^n} = \Phi^n_{\mathfrak{W}} \,, \quad n \geqq 1 \tag{6}$$

besitzt, so folgt aus 5.4: Eine Homotopieklasse $\mathfrak{P}$ ist genau dann primitiv im Sinne von 1.1, wenn $\nu(\mathfrak{P}) = 1$, i. e. wenn $\Phi_{\mathfrak{P}}$ eine Primklasse ist. Jede Homotopieklasse $\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}$ besitzt genau eine Darstellung $\mathfrak{W} = \mathfrak{P}^n$, in welcher $n \geqq 1$ und $\mathfrak{P}$ primitiv ist; dabei ist $n = \nu(\mathfrak{W})$.

5.6. Es sei $A = \{a_T \mid T \in \Lambda - E\}$ die Menge aller Achsen von Λ. Wegen (2) wirkt Λ als Permutationsgruppe auf A. Wir heißen nun zwei Achsen $a_1, a_2 \in A$ äquivalent, wenn es ein solches $S \in \Lambda$ gibt, daß $a_2 = S(a_1)$. Da dieser Äquivalenzbegriff offensichtlich symmetrisch, reflexiv und transitiv ist, bewirkt er eine Einteilung von A in Äquivalenzklassen.

5.7. Es sei $a_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$; ein Repräsentantensystem dieser Klasseneinteilung von A, und es sei P_n eine Erzeugende der unendlichzyklischen Gruppe $\Lambda\{a_n\}$. Dann ist $\{P_n^m | n = 1, 2, \ldots ; m \neq 0\}$ ein Repräsentantensystem aller Klassen $\Phi \neq \{E\}$ konjugierter Elemente von Λ.

5.8. Beweis: Wir haben zu zeigen:

(a) Zu jedem $T \in \Lambda - E$ gibt es einen Index n, eine ganze Zahl $m \neq 0$ und ein $S \in \Lambda$ derart, daß $STS^{-1} = P_n^m$.

(b) Aus $P_{n_1}^{m_1} = SP_{n_2}^{m_2}S^{-1}$, $m_1, m_2 \neq 0$, $S \in \Lambda$ folgt: $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$.

ad (a): Offenbar gibt es einen Index n und ein $S \in \Lambda$ so, daß $S(a_T) = a_n$. Dann ist nach (2) $a_{STS^{-1}} = a_n$, i. e. $STS^{-1} \in \Lambda\{a_n\} = [P_n]$. Somit gibt es in der Tat ein solches $m \neq 0$, daß $STS^{-1} = P_n^m$.

ad (b): Aus

$$P_{n_1}^{m_1} = S P_{n_2}^{m_2} S^{-1} \tag{7}$$

folgt nach (1) und (2): $a_{P_{n_1}} = S(a_{P_{n_1}})$, i. e. $a_{n_1} = S(a_{n_2})$. Dann ist aber $n_1 = n_2$ und somit $a_{n_1} = S(a_{n_1})$, i. e. $S \in \Lambda\{a_{n_1}\} = [P_{n_1}]$. Somit folgt wegen $n_1 = n_2$ aus (7): $P_{n_1}^{m_1} = P_{n_2}^{m_2}$. Folglich ist $m_1 = m_2$, da ja P_{n_1} ein Element unendlicher Ordnung ist. q. e. d.

5.9. Es sei

$$\Lambda = \bigcup_j \Lambda\{a_n\} T_{nj} \tag{8}$$

die Restklassenzerlegung von Λ nach der zyklischen Untergruppe $\Lambda\{a_n\} = [P_n]$. Dann gilt:

(a) Zu jedem Element $T \in \Lambda - E$ gibt es zwei Indices n, j und eine ganze Zahl $m \neq 0$ derart, daß $T = T_{nj}^{-1} P_n^m T_{nj}$.

(b) Aus $T_{n_1 j_1}^{-1} P_{n_1}^{m_1} T_{n_1 j_1} = T_{n_2 j_2}^{-1} P_{n_2}^{m_2} T_{n_2 j_2}$, $m_1, m_2 \neq 0$, folgt: $n_1 = n_2$, $j_1 = j_2$, $m_1 = m_2$.

5.10. Beweis von (a): Nach 5.7 gibt es zu jedem $T \in \Lambda - E$ einen Index n, eine ganze Zahl $m \neq 0$ und ein $S \in \Lambda$ derart, daß

$$T = S^{-1} P_n^m S . \tag{9}$$

Zu diesem S und n gibt es nach (8) einen Index j und einen Exponenten l derart, daß $S = P_n^l T_{nj}$. Daraus und aus (9) folgt aber $T = T_{nj}^{-1} P_n^m T_{nj}$. q. e. d.

Beweis von (b): Aus der Voraussetzung folgt

$$P_{n_1}^{m_1} = S P_{n_2}^{m_2} S^{-1} , \quad S = T_{n_1 j_1} T_{n_2 j_2}^{-1} \in \Lambda , \quad m_1, m_2 \neq 0 .$$

Daher ist nach 5.7 $n_1 = n_2$, $m_1 = m_2$ und somit

$$P_{n_1}^{m_1} = S P_{n_1}^{m_1} S^{-1} , \quad m_1 \neq 0 \tag{10}$$

$$S = T_{n_1 j_1} T_{n_1 j_2}^{-1} . \tag{11}$$

Aus (10) folgt nach (1) und (2): $a_{P_{n_1}} = S(a_{P_{n_1}})$, i. e. $a_{n_1} = S(a_{n_1})$. Somit ist $S \in \Lambda\{a_{n_1}\}$. Daraus und aus (11) folgt aber wegen (8): $j_1 = j_2$. q. e. d.

5.11. Weil das Fundamentalpolygon $\mathfrak{B}$ von Λ kompakt ist, folgt aus 3.7 und 5.9 für $\sigma > 1$:

$$\begin{aligned} \iint G(p, p, s)\, d\omega_p - 4\pi(g-1) &= \sum_{m \neq 0} \sum_n \sum_j \iint_{\mathfrak{B}} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(T_{nj}^{-1} P_n^m T_{nj} p, p)\, d\omega_p \\ &= \sum_{m \neq 0} \sum_n \sum_j \iint_{\mathfrak{B}} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(P_n^m T_{nj} p, T_{nj} p)\, d\omega_p \\ &= \sum_{m \neq 0} \sum_n \sum_j \iint_{T_{nj}(\mathfrak{B})} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(P_n^m p, p)\, d\omega_p . \end{aligned} \tag{12}$$

Hieraus folgt für alle Indices n und alle $m \neq 0$

$$\sum_j \iint_{T_{nj}(\mathfrak{B})} \operatorname{Cos}^{-\sigma} \varrho(P_n^m p, p)\, d\omega_p < \iint_{\mathfrak{B}} G(p, p, \sigma)\, d\omega_p < \infty \quad \text{für} \quad \sigma > 1 . \tag{13}$$

Wir definieren nun

$$\mathfrak{B}_n = \bigcup_j T_{nj}(\mathfrak{B}). \tag{14}$$

$\mathfrak{B}_n$ ist Vereinigungsmenge der paarweise nicht überlappenden Fundamentalpolygone $T_{nj}(\mathfrak{B})$. Daher folgt aus (13), daß die Funktion $\operatorname{Cos}^{-s} \varrho(P_n^m p, p)$ für $\sigma > 1$ absolut integrierbar über $\mathfrak{B}_n$ ist und daß

$$\sum_j \iint_{T_{nj}(\mathfrak{B})} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(P_n^m p, p)\, d\omega_p = \iint_{\mathfrak{B}_n} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(P_n^m p, p)\, d\omega_p , \quad \sigma > 1 , \quad m \neq 0 .$$

Somit folgt aus (12)

$$\iint_{\mathfrak{B}} G(p, p, s)\, d\omega - 4\pi(g_{\mathfrak{F}} - 1) = \sum_{m \neq 0} \sum_n I_{nm}(s) , \quad \sigma > 1 \tag{15}$$

mit

$$I_{nm}(s) = \iint_{\mathfrak{B}_n} \operatorname{Cos}^{-s} \varrho(P_n^m p, p)\, d\omega_p , \quad m \neq 0 , \quad \sigma > 1 . \tag{16}$$

5.12. Zur Berechnung von $I_{nm}(s)$ für festes n können wir nach 2.6 auf $\mathfrak{H}$ ein Poincarésches Koordinatensystem

$$z(p) = x_1(p) + i\,x_2(p)\,, \quad -\infty < x_1(p) < +\infty\,, \quad x_2(p) > 0$$

in solcher Weise einführen, daß

$$z(P_n p) = \alpha z(p)\,, \quad \alpha > 1\,. \tag{17}$$

Dann gilt nach 2.6

$$\mathrm{Cos}\,\varrho(P_n^m p, p) = 1 + (\mathrm{Cos}\,\mu(P_n^m) - 1)\left(1 + \frac{x_1^2(p)}{x_2^2(p)}\right) \tag{18}$$

$$\log\alpha = \mu(P_n) = \frac{\mu(P_n^m)}{|m|}\,. \tag{19}$$

Da $[P_n^{-1}] = [P_n] = \Lambda\{a_n\} = \Lambda\{a_{P_n}\} = \Lambda\{a_{P_n^{-1}}\}$, so sind P_n und P_n^{-1} nach 5.3 Primelemente, und es gilt daher $\nu(P_n^m) = |m|$. Somit folgt aus (19):

$$\log\alpha = \frac{\mu(P_n^m)}{\nu(P_n^m)}\,. \tag{20}$$

5.13. Aus (8) und (14) folgt leicht, daß $\mathfrak{B}_n$ ein Fundamentalbereich der zyklischen Gruppe $\Lambda\{a_n\} = [P_n]$ ist. Nun ist aber der Integrand von $I_{nm}(s)$ offensichtlich automorph bezüglich dieser Gruppe. Daher ändert sich der Wert des Integrals nicht, wenn wir den Integrationsbereich $\mathfrak{B}_n$ durch irgendeinen andern (meßbaren) Fundamentalbereich der Gruppe $\Lambda\{a_n\} = [P_n]$ ersetzen. Wegen (17) ist offenbar

$$\mathfrak{B}_n^* = \{p \mid -\infty < x_1(p) < +\infty,\ 1 \leqq x_2(p) < \alpha\} \tag{21}$$

ein solcher Fundamentalbereich. Somit gilt

$$I_{nm}(s) = \iint_{\mathfrak{B}_n^*} \mathrm{Cos}^{-s}\varrho(P_n^m p, p)\, d\omega_p\,, \quad \sigma > 1\,, \quad m \neq 0\,. \tag{22}$$

Beachten wir noch, daß nach 2.1 (1) $d\omega_p = x_2^{-2} dx_1 dx_2$, so folgt aus (18), (21) und (22)

$$I_{nm}(s) = \int_1^\alpha J_{nm}(x_2, s)\, x_2^{-2} dx_2\,, \quad \sigma > 1\,, \quad m \neq 0 \tag{23}$$

mit

$$J_{nm}(x_2, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{1 + (\mathrm{Cos}\,\mu(P_n^m) - 1)\left(1 + \frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right\}^{-s} dx_1\,, \quad x_2 > 0\,.$$

Führen wir im Integral J_{nm} die Substitution $x_1 = x_2 x$ aus, so kommt

$$J_{nm}(x_2, s) = x_2 \mathrm{Cos}^{-s}\mu(P_n^m) \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{\mathrm{Cos}\,\mu(P_n^m) - 1}{\mathrm{Cos}\,\mu(P_n^m)}\, x^2\right)^{-s} dx\,.$$

Führen wir endlich noch die Substitution

$$x = y\left(\frac{\mathrm{Cos}\,\mu(P_n^m)}{\mathrm{Cos}\,\mu(P_n^m) - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

aus, so erhalten wir unter Verwendung einer Formel aus der Theorie der

Gammafunktion[16])

$$J_{nm}(x_2, s) = x_2 \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m)}{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu(P_n^m) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + y^2)^{-s}\, dy$$

$$= x_2 \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m)}{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu(P_n^m) \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\,.$$

Hieraus und aus (23) folgt unter Berücksichtigung von (20)

$$I_{nm}(s) = \frac{\mu(P_n^m)}{\nu(P_n^m)} \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m)}{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu(P_n^m) \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\,, \quad m \neq 0\,, \quad \sigma > 1\,.$$

Somit folgt aus (15)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} \iint\limits_{\mathfrak{B}} G(p, p; s)\, d\omega - 4\sqrt{\pi}\,(g_{\mathfrak{F}} - 1) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}$$

$$= \sum_{m \neq 0} \sum_{n} \frac{\mu(P_n^m)}{\nu(P_n^m)} \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m)}{\operatorname{Cos}\mu(P_n^m) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu(P_n^m)\,.$$

Daher gilt wegen 5.7 und (3)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} \iint\limits_{\mathfrak{B}} G(p, p; s)\, d\omega - 4\sqrt{\pi}\,(g_{\mathfrak{F}} - 1) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}$$

$$= \sum_{\Phi \neq \{E\}} \frac{\mu(\Phi)}{\nu(\Phi)} \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(\Phi)}{\operatorname{Cos}\mu(\Phi) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu(\Phi)\,.$$

Wegen 1.2 (2) und 5.5 haben wir damit bewiesen:

5.14. In der Halbebene $\sigma > 1$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} \iint\limits_{\mathfrak{B}} G(p, p; s)\, d\omega - 4\sqrt{\pi}\,(g_{\mathfrak{F}} - 1) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-\frac{1}{2})}$$

$$= \sum_{\mathfrak{W} \neq \mathfrak{O}} \frac{\mu(\mathfrak{W})}{\nu(\mathfrak{W})} \left(\frac{\operatorname{Cos}\mu(\mathfrak{W})}{\operatorname{Cos}\mu(\mathfrak{W}) - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Cos}^{-s}\mu(\mathfrak{W})\,.$$

Literatur

[1] BOHR, H.: Zur Theorie der fast periodischen Funktionen. I. Acta math. **45**, 29—127 (1925). — [2] DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. I. Basel: Birkhäuser 1950. — [3] HILBERT, D.: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1912. — [4] HUBER, H.: Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene. Comment. Math. Helv. **30**, 20—62 (1956). — [5] MAGNUS, W., u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze... Berlin: Springer 1943. — [6] MINAKSHISUNDARAM, S., and A. PLEIJEL: Some properties of the eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian Manifolds. Canad. J. Math. **1**, 242—256 (1949). — [7] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: B. G. Teubner 1934. — [8] WEYL, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. 3. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner 1955. — [9] WIENER, N.: Tauberian Theorems. Ann. of Math. **33**, 1—100 (1932).

(Eingegangen am 15. Oktober 1958)

[16]) [5], pag. 4.