SCHÜTTE, K.
Math. Annalen, Bd. 127, S. 15—32 (1954).

Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen.

Von

KURT SCHÜTTE in Marburg/Lahn.

Einleitung.

Zur beweistheoretischen Untersuchung von Induktionen, die über die gewöhnliche vollständige Induktion hinausgehen, braucht man Systeme konstruktiv erklärter Ordnungszahlen. Ein solches System, in dem jede einzelne Ordnungszahl eine feste Bezeichnung besitzt, kann naturgemäß nur einen gewissen Abschnitt der zweiten CANTORschen Zahlenklasse umfassen, da ja die Bezeichnungen eine Abzählung der betreffenden Ordnungszahlen ermöglichen.

Ein weit über die erste ε-Zahl hinausgehendes System eindeutig bezeichneter Ordnungszahlen hat W. ACKERMANN[1]) konstruktiv eingeführt. Mit nichtkonstruktiven Methoden hatte schon vorher O. VEBLEN[2]) ein System von Funktionen abgeleitet, das feste Bezeichnungen für alle Ordnungszahlen eines noch umfangreicheren Abschnittes der zweiten Zahlenklasse liefert. A. CHURCH[3]) wies darauf hin, daß zwischen den von VEBLEN und von ACKERMANN verwendeten Funktionen trotz grundsätzlicher Unterschiede offenbar eine innere Verwandtschaft bestehe, deren genauere Untersuchung von Interesse sei. In der vorliegenden Arbeit wird die Verwendungsmöglichkeit der Funktionen von VEBLEN zum konstruktiven Aufbau der Ordnungszahlen aufgezeigt und eine Verbindung zu dem System von ACKERMANN hergestellt.

Das im § 1 eingeführte Funktionensystem über einer beliebigen stetig wachsenden Funktion von Ordnungszahlen deckt sich vollständig mit dem Funktionensystem von VEBLEN. Es ist hier nur in einer etwas abweichenden Symbolik[4]) entwickelt, um zu einer möglichst klaren konstruktiven Einführung von Ordnungszahlen und zu einer einfachen Abbildung dieser Ordnungszahlen auf die natürlichen Zahlen hinzuleiten. § 2 bringt außer den schon von VEBLEN aufgezeigten Möglichkeiten, gewisse Ordnungszahlen mit Hilfe des Funktionensystems durch kleinere Ordnungszahlen auszudrücken, Rekursionen für den Größenvergleich von Ordnungszahlen. Hiermit ist für einen Abschnitt

[1]) Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten CANTORschen Zahlenklasse. Math. Zeitschr. **53**, 403—413 (1951).

[2]) Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals. Transactions Amer. Math. Soc. **9**, 280—292 (1908).

[3]) Referat zu [1]), Journal of Symbolic Logic **17**, 152 (1952).

[4]) Die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_\beta)$ von VEBLEN erscheint hier in der Form $\varphi\begin{pmatrix} a_1 \cdots & a_\beta \\ 0 \cdots & -1+\beta \end{pmatrix}$ mit $a_\nu = -1 + x_\nu$ für alle $\nu < \beta$ und $a_\beta = x_\beta$, wobei alle $a_i = 0$ zugleich mit den darunter stehenden Zahlen fortzulassen sind.

der zweiten Zahlenklasse der Übergang von den nichtkonstruktiven Methoden zu einer konstruktiven Behandlung gegeben.

§ 3 liefert die Verbindung zu Systemen mit eindeutig bezeichneten Ordnungszahlen, unter denen auch das System von ACKERMANN enthalten ist. Dabei ergibt sich unmittelbar eine Abbildung auf die natürlichen Zahlen unter Bezugnahme auf die Primzahlzerlegung. Der zum konstruktiven Aufbau erforderliche Wohlordnungsbeweis wird im § 4 in ähnlicher Weise durch Nachweis der transfiniten Induktion geführt, wie ihn ACKERMANN für sein System angegeben hat.

§ 1. Ein System kritischer Ordnungszahlen.

Die Ordnungszahlen, von denen im folgenden die Rede ist, sollen ausnahmslos der 1. oder 2. CANTORschen Zahlenklasse angehören. Ist $\mathfrak{M}$ eine abzählbare Menge solcher Ordnungszahlen, so bezeichne $\sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} f(x)$ die kleinste Ordnungszahl a mit $f(x) \leqq a$ für alle $x \in \mathfrak{M}$.

Eine Klasse von Ordnungszahlen heiße „unbeschränkt“, wenn sie oberhalb jeder Ordnungszahl ein Element enthält. Auf eine unbeschränkte Klasse $\mathfrak{K}$ läßt sich die Gesamtheit der Ordnungszahlen (der 1. und 2. Zahlenklasse) eineindeutig und ordnungstreu abbilden. Ist in dieser Weise eine Ordnungszahl a auf ein Element k der Klasse $\mathfrak{K}$ abgebildet, so sagen wir: „k ist die a-te Ordnungszahl der Klasse $\mathfrak{K}$.“ (Dabei wird das kleinste Element von $\mathfrak{K}$ als 0-te Ordnungszahl dieser Klasse bezeichnet.)

Es sei $\varphi(x)$ eine stetig wachsende Funktion von Ordnungszahlen, d. h. eine Funktion mit den Eigenschaften

$$\varphi(a) < \varphi(b) \quad \text{für } a < b, \tag{1.1}$$

$$\varphi(\sup_{x \in \mathfrak{M}} x) = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \varphi(x). \tag{1.2}$$

Außerdem sei

$$0 < \varphi(0). \tag{1.3}$$

Zu einer solchen Funktion gehört bekanntlich eine unbeschränkte Klasse $\mathfrak{K}$ „kritischer“ Zahlen k mit $\varphi(k) = k$. Die Funktion, welche die Gesamtheit der Ordnungszahlen auf die Klasse $\mathfrak{K}$ abbildet, ist ebenfalls stetig wachsend und besitzt daher ihrerseits kritische Zahlen.

Um den Bildungsprozeß kritischer Zahlen weitgehend fortzuführen, verwenden wir „Klammersymbole“

$$\begin{pmatrix} a_0 \, a_1 \dots a_n \\ \alpha_0 \, \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix},$$

in denen die $a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ Ordnungszahlen mit

$$0 \leqq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$$

sind. Diese Klammersymbole bezeichnen wir mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \dots$. Es soll dann und nur dann $A = B$ sein, wenn die Klammersymbole A, B durch Einschaltungen bzw. Streichungen von Spalten $\begin{matrix} 0 \\ \alpha_i \end{matrix}$ auseinander hervorgehen.

Unter Bezugnahme auf die Funktion $\varphi(x)$ ordnen wir jedem Klammersymbol A eine Ordnungszahl φA durch folgende Festsetzungen zu:

$$\varphi\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi(a). \tag{2.1}$$

$$\varphi A = \varphi B \quad \text{für } A = B. \tag{2.2}$$

(2.3) $\varphi\begin{pmatrix} a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \\ 0\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ mit $a_1 \neq 0$ sei die a_0-te gemeinsame Lösung x aller Gleichungen

$$\varphi\begin{pmatrix} x\ a_1^*\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1^*\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = x$$

mit $\alpha_1^* < \alpha_1$, $a_1^* < a_1$.

Offenbar werden hierdurch die Werte φA in rekursiver Weise eindeutig bestimmt, wenn die Lösungen des in (2.3) genannten Gleichungssystems eine unbeschränkte Klasse von Ordnungszahlen bilden. Es ist also noch zu beweisen:

(3.1) Ist $\alpha_1 \neq 0$ und $a_1 \neq 0$, so gibt es zu jeder Ordnungszahl u eine Ordnungszahl x mit $u \leqq x$ und

$$\varphi\begin{pmatrix} x\ a_1^*\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1^*\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = x$$

für alle $\alpha_1^* < \alpha_1$, $a_1^* < a_1$.

Wir beweisen gleichzeitig

$$\text{Bei } a_1^* < a_1 \text{ ist } \varphi\begin{pmatrix} a_1^*\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

$$a_1 \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

$$0 < \varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

$$\text{Bei } a_1 = \sup_{x \in \mathfrak{M}} x \text{ ist } \varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \varphi\begin{pmatrix} x\ a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Zum Beweise dieser Sätze verwenden wir eine lexikographische Anordnung der Klammersymbole. Diese wird folgendermaßen erklärt:

1. Ist bei zwei ungleichen Klammersymbolen

$$A = \begin{pmatrix} a_0\, a_1 \ldots a_n \\ \gamma_0\, \gamma_1 \ldots \gamma_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0\, b_1 \ldots b_n \\ \gamma_0\, \gamma_1 \ldots \gamma_n \end{pmatrix},$$

deren zweite Zeilen übereinstimmen, j der größte Index mit $a_j \neq b_j$, so sei $A \prec B$ bzw. $B \prec A$ je nachdem, ob $a_j < b_j$ oder $b_j < a_j$ ist.

2. Mit $A \prec B$, $A = A^*$, $B = B^*$ sei auch $A^* \prec B^*$. Hierdurch ist die Anordnung vollständig bestimmt, da sich je zwei Klammersymbole durch Einschaltung von Spalten $\overset{0}{\gamma_i}$ immer in Klammersymbole mit übereinstimmenden zweiten Zeilen überführen lassen. $A \prec B$ ist offenbar eine mit der hier vorliegenden Gleichheitsrelation verträgliche Wohlordnungsrelation.

Wir beweisen nun (3.1)—(3.5) durch transfinite Induktion über die Klammersymbole

$$\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

in der soeben definierten Anordnung.

Für das erste Klammersymbol $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dieser Anordnung sind (3.1) und (3.2) gegenstandslos und ist (3.5) trivial. (3.3) und (3.4) besagen in diesem Falle

$$0 \leqq \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } 0 < \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sie ergeben sich aus (1.3) und (2.1).

Weiterhin nehmen wir als Induktionsvoraussetzung, daß die Sätze (3.1) bis (3.5) für alle diejenigen $b_1, \dots, b_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ (an Stelle von $a_1, \dots, a_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) gelten, für die

$$\begin{pmatrix} b_1 \dots b_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

ist. Die vorausgesetzten Sätze seien mit (3*1)—(3*5) bezeichnet. Hiermit beweisen wir (3.1)—(3.5) für $a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Beweis von (3.1): Es sei

$$b_0 = \sup_{\substack{\alpha_1^* < \alpha_1 \\ a_1^* < a_1}} \varphi \begin{pmatrix} u & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}, \quad b_{i+1} = \sup_{\substack{\alpha_1^* < \alpha_1 \\ a_1^* < a_1}} \varphi \begin{pmatrix} b_i & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

und $b = \sup\limits_i b_i$. Dann ist nach (3*3) für $\alpha_1^* < \alpha_1$, $a_1^* < a_1$

$$u \leqq \varphi \begin{pmatrix} u & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq b_0,$$

$$b_i \leqq \varphi \begin{pmatrix} b_i & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq b_{i+1},$$

also allgemein $u \leqq b_i \leqq b$. Für $\alpha_1^* < \alpha_1$, $a_1^* < a_1$ ist nach (3*5)

$$\varphi \begin{pmatrix} b & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \sup_i \varphi \begin{pmatrix} b_i & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq b.$$

Da nach (3*3) auch

$$b \leqq \varphi \begin{pmatrix} b & a_1^* a_2 \dots a_n \\ \alpha_1^* \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

ist, genügt b den in (3.1) gestellten Anforderungen.

Auf Grund dieses Beweises kann nunmehr (2.3) außer für $b_1, \dots, b_m, \beta_1, \dots, \beta_m$ mit

$$\begin{pmatrix} b_1 \dots b_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

auch für $a_1, \dots, a_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ verwendet werden.

Beweis von (3.2): **1. Fall:** $\alpha_1 = 0$.

Ist $\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so gilt (3.2) gemäß (1.1), (2.1), (2.2). Andernfalls kann $a_2 \neq 0$ angenommen werden. Dann ist $\varphi \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$ nach (2.3) die a_1-te

Zahl x mit $\varphi\begin{pmatrix} x & a_2^* \dots a_n \\ \alpha_2^* & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = x$ für alle $\alpha_2^* < \alpha_2$, $a_2^* < a_2$. Bei $a_1^* < a_1$ ist die a_1^*-te derartige Zahl kleiner als die a_1-te, also

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1^* & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\alpha_1 \neq 0$.

Für $b = \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$ und $a_1^* < a_1$ gilt gemäß (2.3)

$$\varphi\begin{pmatrix} b & a_1^* & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = b.$$

Nach (3*4) ist $0 < b$, also nach (3*2)

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1^* & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 0 & a_1^* & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} b & a_1^* & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Beweis von (3.3): Ist $a_1 = 0$, so (3.3) trivial. Ist $a_1 \neq 0$, so nach (3*3) und (3.2)

$$a_1^* \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1^* & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{für alle } a_1^* < a_1,$$

also $a_1 \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$.

Beweis von (3.4):

Ist $\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so gilt (3.4) gemäß (1.3). Andernfalls kann $a_1 \neq 0$ angenommen werden. Dann ist nach (3.3) $0 < a_1 \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$.

Beweis von (3.5): 1. Fall: $\alpha_1 = 0$.

Ist $\begin{pmatrix} a_2 \dots a_n \\ \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so gilt (3.5) gemäß (1.2, (2.1), (2.2). Andernfalls kann $a_2 \neq 0$ angenommen werden. Setzen wir

$$f(x) = \varphi\begin{pmatrix} x & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix},$$

so ist nach (2.3)

$$\varphi\begin{pmatrix} f(x) & a_2^* \dots a_n \\ \alpha_2^* & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = f(x)$$

und nach (3*5) auch

$$\varphi\begin{pmatrix} \sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} f(x) & a_2^* \dots a_n \\ \alpha_2^* & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} f(x) \qquad \text{für alle } \alpha_2^* < \alpha_2,\ a_2^* < a_2.$$

Folglich gibt es nach (2.3) eine Zahl b mit

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} f(x) = \varphi\begin{pmatrix} b & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Nach (3.2) ist

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \varphi\begin{pmatrix} x & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Daher gilt für alle $x \in \mathfrak{M}$

$$\varphi\begin{pmatrix} x & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq \varphi\begin{pmatrix} b & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \dots a_n \\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

und nach (3.2) $x \leqq b \leqq a_1$, also $a_1 = \sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} x = b$ und

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \varphi\begin{pmatrix} x\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $\alpha_1 \neq 0$.

Für $a_1 = 0$ ist (3.5) trivial. Es sei $a_1 \neq 0$.

Zu $a_1^* < a_1$ gibt es $b \in \mathfrak{M}$ mit $a_1^* < b$. Ist

$$f(x) = \varphi\begin{pmatrix} x\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 0 & x & a_2 \ldots a_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix},$$

so nach (2.3)

$$\varphi\begin{pmatrix} f(b) & a_1^* & a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1^* & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = f(b) \qquad \text{für alle } \alpha_1^* < \alpha_1$$

und nach (3*5) auch

$$\varphi\begin{pmatrix} \sup\limits_{x \in \mathfrak{M}} f(x) & a_1^* & a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1^* & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} f(x) \qquad \text{für alle } \alpha_1^* < \alpha_1,\ a_1^* < a_1.$$

Dann ist nach (2.3)

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} f(x) \geqq \varphi\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Da nach (3.2) auch

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \varphi\begin{pmatrix} x\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} \leqq \varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$$

ist, gilt

$$\varphi\begin{pmatrix} a_1\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \sup_{x \in \mathfrak{M}} \varphi\begin{pmatrix} x\, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Hiermit sind (3.1)—(3.5) durch transfinite Induktion bewiesen und (2.1) bis (2.3) als eindeutige Festsetzungen der Werte φA bestätigt. Die Sätze (3.2) und (3.5) besagen, daß alle

$$\varphi\begin{pmatrix} x\, a_1 \ldots a_n \\ \alpha_0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$$

stetig wachsende Funktionen von x sind.

Wie die folgenden Sätze zeigen, ist auch $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ eine stetig wachsende Funktion.

(4.1) $$1 < \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Beweis: Ist $a = 0$, so $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \varphi(1) > \varphi(0) \geqq 1$. Ist $a \neq 0$, so gilt für $b = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ nach (2.3) $b = \varphi\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \varphi(b)$. Dann ist $b \neq 0$, also $b = \varphi(b) \geqq \varphi(1) > 1$.

(4.2) Bei $a < b$ ist $\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$.

Beweis: Für $c = \varphi\binom{1}{b} = \varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $a < b$ gilt nach (2.3) $c = \varphi\begin{pmatrix}c & 0\\ a & b\end{pmatrix} = \varphi\binom{c}{a}$. Nach (4.1) ist $c > 1$, also $\varphi\binom{1}{a} < \varphi\binom{c}{a} = \varphi\binom{1}{b}$.

$$\text{(4.3)} \qquad \varphi\begin{pmatrix}1\\ \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x\end{pmatrix} = \sup_{x\in\mathfrak{M}} \varphi\binom{1}{x}.$$

Beweis: Es sei $f(x) = \varphi\binom{1}{x}$. Zu $a < \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x$ gibt es $b \in \mathfrak{M}$ mit $a < b$. Für $b \leqq x$ folgt aus $f(x) = \varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & x\end{pmatrix}$ nach (2.3) $f(x) = \varphi\begin{pmatrix}f(x) & 0\\ a & x\end{pmatrix} = \varphi\binom{f(x)}{a}$. Auf Grund von (4.2) ist $\sup\limits_{b\leqq x\in\mathfrak{M}} f(x) = \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} f(x)$, also nach (3.5) $\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} f(x) = \varphi\begin{pmatrix}\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} f(x)\\ a\end{pmatrix}$. Da dies für alle $a < \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x$ gilt, gibt es nach (2.3) ein c mit $\sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} f(x) = \varphi\begin{pmatrix}c & 1\\ 0 & \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x\end{pmatrix}$. Daraus folgt

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\ \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x\end{pmatrix} \leqq \sup_{x\in\mathfrak{M}} f(x) = \sup_{x\in\mathfrak{M}} \varphi\binom{1}{x}.$$

Da nach (4.2) $\varphi\binom{1}{b} \leqq \varphi\begin{pmatrix}1\\ \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x\end{pmatrix}$ für alle $b \in \mathfrak{M}$ gilt, ist auch

$$\sup_{x\in\mathfrak{M}} \varphi\binom{1}{x} \leqq \varphi\begin{pmatrix}1\\ \sup\limits_{x\in\mathfrak{M}} x\end{pmatrix}.$$

Ferner folgt aus (4.2) durch transfinite Induktion

$$\text{(4.4)} \qquad a \leqq \varphi\binom{1}{a}.$$

§ 2. Rekursionsmöglichkeiten.

Die kritischen Zahlen der Funktion $\varphi\binom{1}{x}$, also die Zahlen η mit $\varphi\binom{1}{\eta} = \eta$, bezeichnen wir nach VEBLEN als E-Zahlen (bezüglich der Ausgangsfunktion $\varphi(x)$). Jeder Wert der Funktion $\varphi(x)$, der nicht eine E-Zahl ist, läßt sich in der Form $\varphi\, A$ mittels kleinerer Ordnungszahlen ausdrücken. D. h. es gilt der Satz:

(5.1) Ist $a = \varphi(b) < \varphi\binom{1}{a}$, so gibt es Ordnungszahlen $a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$, die alle kleiner als a sind, mit $a = \varphi\begin{pmatrix}a_0 \ldots a_n\\ \alpha_0 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$.

Beweis: Wir definieren successive Ordnungszahlen β_i, b_i in folgender Weise:

1. β_0 sei die kleinste Zahl mit $a < \varphi\binom{a}{\beta_0}$. Wäre $a \leqq \beta_0$, so auf Grund der Minimalbedingung $a = \varphi\binom{a}{a^*} = \varphi\begin{pmatrix}a & 0\\ a^* & a\end{pmatrix}$ für alle $a^* < a$. Dann hätte man nach (2.3) ein c_0 mit $a = \varphi\begin{pmatrix}c_0 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}$ und somit $a \geqq \varphi\binom{1}{a}$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher ist $\beta_0 < a$. Ist $\beta_0 = 0$, so folgt aus $a = \varphi(b) < \varphi(a)$ nach (1.1) $a < b$, und (5.1) ist mit $a_0 = b$, $\alpha_0 = 0$, $n = 0$ erfüllt.

2. Ist $\beta_i \neq 0$, so sei b_i die kleinste Zahl, für die es ein $\beta_{i+1} < \beta_i$ mit $a < \varphi\begin{pmatrix} a & b_i \ldots b_0 \\ \beta_{i+1} & \beta_i \ldots \beta_0 \end{pmatrix}$ gibt, und β_{i+1} sei die kleinste derartige Zahl. Wäre $b_i = 0$, so

$$a < \varphi\begin{pmatrix} a & b_{i-1} \ldots b_0 \\ \beta_{i+1} & \beta_{i-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix} \text{ bzw. } a < \varphi\begin{pmatrix} a \\ \beta_1 \end{pmatrix} \qquad (\text{bei } i = 0),$$

was gegen die Minimalbedingung für β_i verstößt. Also ist $b_i \neq 0$. Gemäß der Minimalbedingung für b_i ist

$$a = \varphi\begin{pmatrix} a & b_i^* \ldots b_0 \\ \beta_i^* & \beta_i \ldots \beta_0 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } \beta_i^* < \beta_i,\ b_i^* < b_i.$$

Daher gibt es nach (2.3) ein c_i mit $a = \varphi\begin{pmatrix} c_i & b_i \ldots b_0 \\ 0 & \beta_i \ldots \beta_0 \end{pmatrix}$. Ist $c_i = 0$, so

$$\varphi\begin{pmatrix} b_i & b_{i-1} \ldots b_0 \\ \beta_i & \beta_{i-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix} = a < \varphi\begin{pmatrix} a & b_{i-1} \ldots b_0 \\ \beta_i & \beta_{i-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix}$$

und nach (3.2) $b_i < a$. Ist $c_i \neq 0$, so nach (3.3) und (3.2)

$$b_i \leqq \varphi\begin{pmatrix} b_i \ldots b_0 \\ \beta_i \ldots \beta_0 \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} c_i & b_i \ldots b_0 \\ 0 & \beta_i \ldots \beta_0 \end{pmatrix} = a.$$

Also ist allgemein $0 < b_i < a$.

Die $\beta_0, \beta_1, \ldots$ bilden eine absteigende Folge von Ordnungszahlen $< a$. Diese Folge muß mit einem $\beta_n = 0$ abbrechen. Wir haben also

$$a < \varphi\begin{pmatrix} a & b_{n-1} \ldots b_0 \\ 0 & \beta_{n-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist auf Grund der Minimalbedingung

$$a = \varphi\begin{pmatrix} a & b_{n-1}^* \ldots b_0 \\ \beta_{n-1}^* & \beta_{n-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } \beta_{n-1}^* < \beta_{n-1},\ b_{n-1}^* < b_{n-1}.$$

Nach (2.3) gibt es somit ein a_0 mit

$$a = \varphi\begin{pmatrix} a_0 & b_{n-1} \ldots b_0 \\ 0 & \beta_{n-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\varphi\begin{pmatrix} a_0 & b_{n-1} \ldots b_0 \\ 0 & \beta_{n-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix} a & b_{n-1} \ldots b_0 \\ 0 & \beta_{n-1} \ldots \beta_0 \end{pmatrix}$$

ist $a_0 < a$. Mit $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = \beta_{n-i}$, $a_i = b_{n-i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist (5.1) erfüllt.

Die hier benutzte Voraussetzung $a < \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ kann nicht entbehrt werden. Ist nämlich $a = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, also a eine E-Zahl, so läßt sich a nicht mittels kleinerer Ordnungszahlen in der Form φA ausdrücken. Das ergibt sich aus den folgenden beiden Sätzen.

(5.2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sind alle } a_1, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n \text{ kleiner als eine } E\text{-Zahl } \eta, \text{ so ist} \\ \varphi\begin{pmatrix} \eta & a_1 \ldots a_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} = \eta. \end{array} \right.$

Beweis durch vollständige Induktion:

1. Aus $\eta = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ \eta \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \eta \end{pmatrix}$ und $\alpha_n < \eta$ folgt nach (2.3)

$$\eta = \varphi\begin{pmatrix} \eta & 0 \\ \alpha_n & \eta \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} \eta \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

2. Es sei $\eta = \varphi\begin{pmatrix}\eta & a_2 \dots a_n\\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}0 & \eta & a_2 \dots a_n\\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n\end{pmatrix}$ und $\alpha_0 < \alpha_1$, $a_1 < \eta$. Dann ist nach (2.3) $\eta = \varphi\begin{pmatrix}\eta & a_1 & a_2 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n\end{pmatrix}$.

(5.3) $\left\{\right.$ Sind alle $a_0, \dots, a_n, \alpha_0, \dots, \alpha_n$ kleiner als eine E-Zahl η, so ist auch $\varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix} < \eta$.

Beweis: Nach (3.2) und (5.2) ist

$$\varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix}\eta & a_1 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix} = \eta .$$

Lassen sich zwei Ordnungszahlen a, b gemäß (5.1) in der Form φA bzw. φB durch kleinere Ordnungszahlen ausdrücken, so kann auch die Größenbeziehung zwischen a, b auf Größenbeziehungen zwischen kleineren Ordnungszahlen zurückgeführt werden. Zur Entwicklung dieser Rekursionen gebrauchen wir einige Hilfssätze.

(6.1) Ist $A = \begin{pmatrix}a_0 \dots a_n\\ \alpha_0 \dots \alpha_n\end{pmatrix}$ mit $a_0 \neq 0$, so $a_i < \varphi A$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis: Nach (3.3) und (3.2) ist

$$a_i \leqq \varphi\begin{pmatrix}a_i \dots a_n\\ \alpha_i \dots \alpha_n\end{pmatrix} \leqq \varphi\begin{pmatrix}0 & a_1 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix} < \varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix} = \varphi A .$$

(6.2) $\left\{\right.$ Ist $A = \begin{pmatrix}a_0 & a_1 \dots a_n\\ 0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix}$ mit $a_1 \neq 0$, so $\varphi A = \varphi\begin{pmatrix}\varphi A\\ 0\end{pmatrix}$ und $\varphi A = \varphi\begin{pmatrix}\varphi A & a_i \dots a_n\\ 0 & \alpha_i \dots \alpha_n\end{pmatrix}$ für alle $i > 1$.

Beweis: Nach (2.3) ist

$$\varphi A = \varphi\begin{pmatrix}\varphi A & a_1^* & a_2 \dots a_n\\ \alpha_1^* & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n\end{pmatrix} \text{ für alle } \alpha_1^* < \alpha_1,\ a_1^* < a_1,$$

also insbesondere

$$\varphi A = \varphi\begin{pmatrix}\varphi A & 0 & a_2 \dots a_n\\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \dots \alpha_n\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}\varphi A & a_2 \dots a_n\\ 0 & \alpha_2 \dots \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergibt sich die Behauptung.

(6.3) $\left\{\right.$ Ist $A = \begin{pmatrix}a_0 & a_1 \dots a_n\\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n\end{pmatrix} \prec B$ und $a_0 = \varphi B$ sowie $a_i < \varphi B$ für alle $i = 1, \dots, n$, so $\varphi A = \varphi B$.

Beweis: Es sei

$$B = \begin{pmatrix}b_0 & b_1 \dots b_m\\ \beta_0 & \beta_1 \dots \beta_m\end{pmatrix},\quad \beta_0 = 0 .$$

Wir können annehmen, daß alle $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ ungleich 0 sind (wobei evtl. m oder n gleich 0 ist). Die größten übereinstimmenden rechten Teile von A, B (sofern solche vorhanden sind) seien

$$\begin{pmatrix}a_j \dots a_n\\ \alpha_j \dots \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_k \dots b_m\\ \beta_k \dots \beta_m\end{pmatrix}.$$

Dann ist wegen $A \prec B$ jedenfalls $k \neq 0$ und entweder

1. $j = 0$ oder
2. $j \neq 0$, $\alpha_{j-1} < \beta_{k-1}$ oder
3. $j \neq 0$, $\alpha_{j-1} = \beta_{k-1}$, $a_{j-1} < b_{k-1}$.

Im 1. Falle ist

$$\varphi B \geqq \varphi \begin{pmatrix} b_k \dots b_m \\ \beta_k \dots \beta_m \end{pmatrix} = \varphi A \geqq a_0 = \varphi B, \text{ also } \varphi A = \varphi B.$$

Im 3. Falle ist $j - 1 \neq 0$, da $\varphi B = a_0 < b_{k-1}$ nach (3.3) und (6.1) unmöglich ist. Wir haben also in den beiden letzten Fällen $\beta_{k-1} > 0$ und wegen $\beta_0 = 0$ auch $k - 1 > 0$. Ist $k - 1 = 1$, so

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} b_0 & b_{k-1} \dots b_m \\ 0 & \beta_{k-1} \dots \beta_m \end{pmatrix}.$$

Ist $k - 1 > 1$, so nach (6.2)

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & b_{k-1} \dots b_m \\ 0 & \beta_{k-1} \dots \beta_m \end{pmatrix}.$$

Nach (2.3) ist daher allgemein

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & b^*_{k-1} & b_k \dots b_m \\ \beta^*_{k-1} & \beta_{k-1} & \beta_k \dots \beta_m \end{pmatrix} \text{ für alle } \beta^*_{k-1} < \beta_{k-1},\ b^*_{k-1} < b_{k-1}.$$

Insbesondere ist im 2. Falle

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & 0 & b_k \dots b_m \\ \alpha_{j-1} & \beta_{k-1} & \beta_k \dots \beta_m \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & a_j \dots a_n \\ \alpha_{j-1} & \alpha_j \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

und im 3. Falle

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & a_{j-1} & b_k \dots b_m \\ \alpha_{j-2} & \beta_{k-1} & \beta_k \dots \beta_m \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & a_{j-1} & a_j \dots a_n \\ \alpha_{j-2} & \alpha_{j-1} & \alpha_j \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen haben wir eine Gleichung der Form

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & a_{i+1} \dots a_n \\ \alpha_i & \alpha_{i+1} \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ist $i \neq 0$, so gilt nach (2.3)

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & (\varphi B)^* & a_{i+1} \dots a_n \\ \alpha_i^* & \alpha_i & \alpha_{i+1} \dots \alpha_n \end{pmatrix} \text{ für alle } \alpha_i^* < \alpha_i,\ (\varphi B)^* < \varphi B$$

und wegen $\alpha_{i-1} < \alpha_i$, $a_i < \varphi B$ insbesondere

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & a_i & a_{i+1} \dots a_n \\ \alpha_{i-1} & \alpha_i & \alpha_{i+1} \dots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

In dieser Weise ergibt sich schließlich

$$\varphi B = \varphi \begin{pmatrix} \varphi B & a_1 \dots a_n \\ \alpha_0 & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi A.$$

(6.4) Ist $A = \begin{pmatrix} a_0 a_1 \dots a_n \\ \alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \prec B$ und $a_i < \varphi B$ für alle $i = 0, 1, \dots, n$, so $\varphi A < \varphi B$.

Beweis: Es sei $B = \begin{pmatrix} b_0 b_1 \dots b_m \\ \beta_0 \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix}$ mit $\beta_0 = 0$. Wegen $A \prec B$ ist dann $\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} b_1 \dots b_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix}$.

1. Ist $\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} b_1 \dots b_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix}$, so auch $\begin{pmatrix} \varphi B\, a_1 \dots a_n \\ \alpha_0\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \prec \begin{pmatrix} b_1 \dots b_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} \leqq B$.

Hieraus folgt nach (3.2) und (6.3)

$$\varphi\, A < \varphi \begin{pmatrix} \varphi B\, a_1 \dots a_n \\ \alpha_0\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \varphi\, B.$$

2. Ist $\begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \dots b_m \\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix}$, so $A \prec B$ nur bei $\alpha_0 = 0$, $a_0 < b_0$. Dann ist nach (3.2)

$$\varphi\, A = \varphi \begin{pmatrix} a_0\, a_1 \dots a_n \\ 0\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} < \varphi \begin{pmatrix} b_0\, b_1 \dots b_m \\ 0\ \beta_1 \dots \beta_m \end{pmatrix} = \varphi\, B.$$

Die Größenbeziehung zwischen zwei Termen $\varphi\, A$, $\varphi\, B$ läßt sich nun durch folgende Sätze bestimmen:

I. Ist $A = B$, so $\varphi\, A = \varphi\, B$.

II. Für $A = \begin{pmatrix} a_0 \dots a_n \\ \alpha_0 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \prec B$ gilt:

(7.1) Ist $a_i < \varphi\, B$ für alle $i = 0, \dots, n$, so $\varphi\, A < \varphi\, B$.

(7.2) Gibt es ein j mit $0 \leqq j \leqq n$ und
$a_i = 0$ für alle $i < j$ (sofern $j \neq 0$ ist),
$a_i = \varphi\, B$ für $i = j$,
$a_i < \varphi\, B$ für alle $i > j$ (sofern $j \neq n$ ist),
so ist $\varphi\, A = \varphi\, B$.

(7.3) Gibt es j, k mit $j < k$, $a_j \neq 0$, $a_k = \varphi\, B$, so ist $\varphi\, B < \varphi\, A$.

(7.4) Gibt es ein j mit $a_j > \varphi\, B$, so ist $\varphi\, B < \varphi\, A$.

Beweis: (7.1) und (7.2) gelten gemäß (6.4) bzw. (6.3). Aus den Voraussetzungen von (7.3) folgt nach (6.1) $\varphi\, B = a_k < \varphi\, A$. Unter der Voraussetzung von (7.4) ist nach (3.3) bzw. (6.1) $\varphi\, B < a_j \leqq \varphi\, A$.

Die Voraussetzungen von (7.1)—(7.4) bilden offenbar eine vollständige Disjunktion. Sie erstrecken sich nur auf Größenbeziehungen von Term-Paaren, die jeweils zusammen weniger φ-Symbole als das Term-Paar $\varphi\, A$, $\varphi\, B$ enthalten.

Aus den soeben bewiesenen Sätzen folgt insbesondere, daß die gemäß (5.1) möglichen Darstellungen von Ordnungszahlen eindeutig bestimmt sind. Das heißt aus $a = \varphi\, A = \varphi\, B$ folgt $A = B$, wenn alle Elemente von A und B kleiner als a sind. Wäre nämlich $A \prec B$, so müßte der Fall (7.2) vorliegen, also ein Element $a_j = \varphi\, B$ existieren.

„φ-Zahlzeichen" erklären wir rekursiv durch die beiden Festsetzungen:

1. Das Symbol 0 ist ein φ-Zahlzeichen.

2. Sind $a_0, \dots, a_n$, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ φ-Zahlzeichen, so ist auch $\varphi \begin{pmatrix} a_0 \dots a_n \\ \alpha_0 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$ ein φ-Zahlzeichen.

Die Anordnung der φ-Zahlzeichen wird durch die obigen Sätze rekursiv bestimmt. Diese Anordnung ist unabhängig von der speziellen Wahl der Ausgangsfunktion $\varphi(x)$.

Wählen wir insbesondere $1 + x$ als Ausgangsfunktion[5]), so erhalten wir als Werte der Funktion $\varphi(x)$ alle von 0 verschiedenen Ordnungszahlen. Nach (5.1) ist in diesem Falle jede Ordnungszahl unterhalb der kleinsten E-Zahl η_0 durch φ-Zahlzeichen ausdrückbar. Nach (5.3) stellt umgekehrt jedes φ-Zahlzeichen eine Ordnungszahl unterhalb η_0 dar.

§ 3. Verwandte Systeme.

Von den Funktionen φA kann man in einfacher Weise zu Funktionen $\overline{\varphi} A$ übergehen, für welche ebenfalls der Satz (5.1) gilt, aber $\overline{\varphi} A = \overline{\varphi} B$ nur bei $A = B$ ist.

Wir setzen dabei voraus, daß alle Werte der Funktion $\varphi(x)$ Limeszahlen sind, was z. B. bei

$$\varphi(x) = \omega \cdot (1 + x)$$

der Fall ist. Dann sind offenbar auch alle φA Limeszahlen. Zur Erklärung von $\overline{\varphi} A$ führen wir einige Bezeichnungen in bezug auf ein Klammersymbol

$$A = \begin{pmatrix} a_0\, a_1 \ldots a_n \\ 0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$$

ein:

A heiße „*kritisch*", wenn ein $a_j = \varphi A$ ist.

A heiße „*ausgezeichnet*", wenn es q, r gibt mit $a_0 = q + r$ und $0 \leqq r < \omega$, so daß

$$\begin{pmatrix} q\, a_1 \ldots a_n \\ 0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$$

kritisch ist. Ferner sei

$$A' = \begin{pmatrix} a_0 + 1\, a_1 \ldots a_n \\ 0 \quad \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Die Definition der $\overline{\varphi} A$ lautet:

$$\overline{\varphi} A = \begin{cases} \varphi A', \text{ wenn } A \text{ ausgezeichnet ist,} \\ \varphi A, \text{ wenn } A \text{ nicht ausgezeichnet ist.} \end{cases}$$

Dann gelten folgende Sätze:

$$(8.1) \quad \begin{cases} \text{Ist } a = \varphi(b) < \varphi\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}, \text{ so gibt es Ordnungszahlen} \\ a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \text{ die alle kleiner als } a \text{ sind, mit } a = \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Beweis: Nach (5.1) gibt es Ordnungszahlen $b_0, a_1, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, die alle kleiner als a sind, mit

$$a = \varphi\begin{pmatrix} b_0\, a_1 \ldots a_n \\ 0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist $B = \begin{pmatrix} b_0\, a_1 \ldots a_n \\ 0\, \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ nicht kritisch. Ist B nicht ausgezeichnet, so $\overline{\varphi} B = \varphi B = a$. Ist B ausgezeichnet, so gibt es q, r mit $b_0 = q + r$, $r < \omega$,

[5]) Dann ist $\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \omega^b + a$, $\varphi\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ die a-te ε-Zahl, $\varphi\begin{pmatrix} a\,1\,1 \\ 0\,1\,2 \end{pmatrix}$ die a-te kritische ε-Zahl.

so daß $\begin{pmatrix} q & a_1 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$ kritisch ist. Da B nicht kritisch ist, so $r > 0$, also b_0 von der Form $a_0 + 1$. Dann ist auch $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$ ausgezeichnet und $\overline{\varphi}\, A = \varphi\, B = a$.

(8.2) Für alle $i = 0, \dots, n$ ist $a_i < \overline{\varphi} \begin{pmatrix} a_0 \dots a_n \\ \alpha_0 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$.

Beweis: Wir können $\alpha_0 = 0$ annehmen. Ist $A = \begin{pmatrix} a_0 \dots a_n \\ \alpha_0 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$ nicht ausgezeichnet, so allgemein $a_i < \varphi\, A = \overline{\varphi}\, A$. Ist A ausgezeichnet, so nach (3.3) $a_0 < a_0 + 1 \leqq \varphi\, A' = \overline{\varphi}\, A$ und nach (6.1) auch $a_i < \varphi\, A' = \overline{\varphi}\, A$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Die Größenbeziehung zwischen zwei Termen $\overline{\varphi}\, A$, $\overline{\varphi}\, B$ wird bestimmt durch die Sätze:

I. Ist $A = B$, so $\overline{\varphi}\, A = \overline{\varphi}\, B$.

II. Für $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \dots a_n \\ 0 & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \prec B$ gilt: (8.3) Gibt es ein j mit $a_j \geqq \overline{\varphi}\, B$, so ist $\overline{\varphi}\, B < \overline{\varphi}\, A$.

(8.4) Ist $a_i < \overline{\varphi}\, B$ für alle $i = 0, \dots, n$, so $\overline{\varphi}\, A < \overline{\varphi}\, B$.

Beweis von (8.3): Nach (8.2) ist $\overline{\varphi}\, B \leqq a_j < \overline{\varphi}\, A$.

Beweis von (8.4): Es sei $\overline{\varphi}\, B = \varphi\, \overline{B}$, wo $\overline{B} = B'$ bzw. $\overline{B} = B$ ist, je nachdem, ob B ausgezeichnet oder nicht ausgezeichnet ist. Aus $A \prec B$ folgt $A' \underline{\preceq} B \underline{\preceq} \overline{B}$. Aus $a_0 < \varphi\, \overline{B}$ folgt, da $\varphi\, \overline{B}$ nach Voraussetzung eine Limeszahl ist, $a_0 + 1 < \varphi\, \overline{B}$. Unter den Voraussetzungen von (8.4) ergibt sich daher nach (7.1) $\varphi\, A' \leqq \varphi\, \overline{B}$, wobei sich das Gleichheitszeichen nur auf den Fall $A' = B = \overline{B}$ bezieht. Nach (3.2) ist $\varphi\, A < \varphi\, A'$, also jedenfalls $\overline{\varphi}\, A \leqq \varphi\, \overline{B} = \overline{\varphi}\, B$. Wäre $\overline{\varphi}\, A = \overline{\varphi}\, B$, so $\overline{\varphi}\, A = \varphi\, A'$ und $A' = B = \overline{B}$, also A ausgezeichnet und $A' = B$ nicht ausgezeichnet. Mit A ist aber auch A' ausgezeichnet. Folglich ist $\overline{\varphi}\, A < \overline{\varphi}\, B$.

Da die Voraussetzungen von (8.3) und (8.4) eine vollständige Disjunktion bilden, bleibt für $\overline{\varphi}\, A = \overline{\varphi}\, B$ nur $A = B$.

Zur Kennzeichnung aller Ordnungszahlen unterhalb der kleinsten E-Zahl η_0 reichen die Symbole 0 und $\overline{\varphi}$ nicht aus, da hier nach Voraussetzung nur Limeszahlen als Werte der Funktion $\varphi(x)$ auftreten. Es lassen sich aber, wenn $\varphi(x) = \omega \cdot (1 + x)$ ist, alle Ordnungszahlen unterhalb η_0 gemäß (8.1) durch Terme ausdrücken, welche nur die Symbole 0, $\overline{\varphi}$ und $+$ enthalten. In dieser Weise ist das konstruktive System der Ordnungszahlen von Ackermann gebildet. Seine Klammersymbole (α, β, γ) entsprechen den $\overline{\varphi} \begin{pmatrix} \gamma & \beta & \alpha \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Man kann auch zu Funktionen $\varphi^*\, A$ übergehen, welche dieselben Eigenschaften wie die $\overline{\varphi}\, A$ besitzen, aber zur Kennzeichnung aller Ordnungszahlen unterhalb η_0 ausreichen. Dabei nehmen wir

$$\varphi(x) = \omega \cdot (1 + x)$$

als Ausgangsfunktion. Für ein Klammersymbol

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots a_n \\ 0 & 1 & \alpha_2 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

definieren wir

$$\varphi^* A = \begin{cases} a_0 + 1, \text{ falls } a_i = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n \text{ ist,} \\ \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 & -1 + a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ falls } a_1 \neq 0 \text{ und } a_i = 0 \text{ für alle } i = 2, \ldots, n \text{ ist,} \\ \overline{\varphi}\, A, \text{ falls es ein } a_j \neq 0 \text{ mit } j \geqq 2 \text{ gibt.} \end{cases}$$

Dann gelten folgende Sätze:

(9.1) $\left\{\begin{array}{l} \text{Ist } 0 < a < \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \text{ so gibt es Ordnungszahlen } a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n, \\ \text{die alle kleiner als } a \text{ sind, mit } a = \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}. \end{array}\right.$

Beweis: Ist $a = a_0 + 1$, so $a = \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a_0 < a$. Andernfalls ist a Limeszahl, also ein Wert der Funktion $\varphi(x)$. Dann gibt es nach (8.1) Ordnungszahlen $b_0, \ldots, b_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, die alle kleiner als a sind, mit $a = \overline{\varphi}\begin{pmatrix} b_0 & b_1 \ldots b_n \\ 0 & \beta_1 \ldots \beta_n \end{pmatrix}$. Es ist entweder $a = \varphi^*\begin{pmatrix} b_0 & b_1 \ldots b_n \\ 0 & \beta_1 \ldots \beta_n \end{pmatrix}$ oder $a = \overline{\varphi}\begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi^*\begin{pmatrix} b_0 & 1 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da a Limeszahl ist, so ist mit $b_1 < a$ auch $1 + b_1 < a$.

(9.2) Für alle $i = 0, \ldots, n$ ist $a_i < \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$.

Beweis: 1. Es ist $a_0 < a_0 + 1 = \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Bei $a_1 \neq 0$ ist nach (8.2) $a_0 < \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 & -1 + a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $-1 + a_1 < \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da $\varphi^*\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in diesem Falle Limeszahl ist, so auch $a_1 < \varphi^*\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Im übrigen ergibt sich der Satz aus (8.2).

Die Größenbeziehung zwischen zwei Termen $\varphi^* A$, $\varphi^* B$ wird entsprechend wie zwischen $\overline{\varphi}\, A$, $\overline{\varphi}\, B$ bestimmt:

I. Ist $A = B$, so $\varphi^* A = \varphi^* B$.

II. Für $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \ldots a_n \\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} \prec B$ gilt:

(9.3) Gibt es ein j mit $a_j \geqq \varphi^* B$, so ist $\varphi^* B < \varphi^* A$.

(9.4) Ist $a_i < \varphi^* B$ für alle $i = 0, \ldots, n$, so $\varphi^* A < \varphi^* B$.

Beweis von (9.3): Nach (9.2) ist $\varphi^* B \leqq a_j < \varphi^* A$.

Beweis von (9.4): Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_n \\ 0 & 1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \end{pmatrix} \prec B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_m \\ 0 & 1 & \beta_2 \ldots \beta_m \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden:

1. $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $A \prec B$ ist $a_0 < b_0$, also $\varphi^* A = a_0 + 1 < b_0 + 1 = \varphi^* B$.

2. $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \neq \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\varphi^* B$ Limeszahl, und aus $a_0 < \varphi^* B$ folgt $\varphi^* A = a_0 + 1 < \varphi^* B$.

3. $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a_1 \neq 0$, $B = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen $A \prec B$ ist $b_1 \neq 0$ und nach (8.4)

$$\varphi^* A = \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 & -1+a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < \overline{\varphi}\begin{pmatrix} b_0 & -1+b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi^* B.$$

4. $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a_1 \neq 0$, $B \neq \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nach (8.4) ist $\varphi^* A = \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 & -1+a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \leqq \overline{\varphi}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} < \overline{\varphi}\, B = \varphi^* B$.

5. $A \neq \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist wegen $A \prec B$ auch $B \neq \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und nach (8.4) $\varphi^* A = \overline{\varphi} A \prec \overline{\varphi} B = \varphi^* B$.

Zu den Ausgangsfunktionen $\varphi(x) = 1 + x$ und $\varphi(x) = \omega \cdot (1 + x)$ gehören offensichtlich dieselben E-Zahlen. Die φ-Zahlzeichen (die sich auf die Ausgangsfunktion $1 + x$ beziehen) und die entsprechenden φ^*-Zahlzeichen (mit der Ausgangsfunktion $\omega \cdot (1 + x)$) stellen daher denselben Abschnitt der 2. Zahlenklasse dar. Die betreffenden Ordnungszahlen lassen sich durch die φ^*-Zahlzeichen in sehr einfacher Weise eineindeutig auf die natürlichen Zahlen (einschließlich der 0) abbilden. Es sei p_k die k-te Primzahl (mit $p_0 = 2$, $p_1 = 3, \ldots$). Dann treffen wir folgende Zuordnung:

1. Die Ordnungszahl 0 werde der natürlichen Zahl 0 zugeordnet.

2. Sind die Ordnungszahlen $a_0, \ldots, a_n, \alpha_0, \ldots, \alpha_n$ den natürlichen Zahlen $k_0, \ldots, k_n, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n$ zugeordnet, so werde die Ordnungszahl $\varphi^*\begin{pmatrix} a_0 \ldots a_n \\ \alpha_0 \ldots \alpha_n \end{pmatrix}$ der natürlichen Zahl $p_{\varkappa_0}^{k_0} \ldots p_{\varkappa_n}^{k_n}$ zugeordnet.

Diese Zuordnung ist offenbar umkehrbar eindeutig und mit der Gleichheitsrelation der Klammersymbole verträglich. Der Einschaltung einer Spalte $\begin{matrix} 0 \\ \alpha \end{matrix}$ in dem Klammersymbol entspricht ja bei der zugeordneten natürlichen Zahl die Multiplikation mit $p_\varkappa^0 = 1$. Durch die angegebene Zuordnung wird also eine leicht zu übersehende Wohlordnungsrelation der natürlichen Zahlen von der Ordnung η_0 definiert.

§ 4. Konstruktiver Wohlordnungsbeweis.

Mit den φ-Zahlzeichen haben wir ein System, in dem die Transitivität und die Trichotomie für die rekursiv erklärten Relationen $a < b$, $a = b$ leicht zu beweisen sind (durch vollständige Induktion nach der Anzahl der in a, b auftretenden Zeichen).

Die Wohlordnung des Systems ergibt sich aus der Gültigkeit der transfiniten Induktion, für die sich ein konstruktiver Beweis[6]) angeben läßt. Dazu brauchen wir die Nachfolgerfunktion und einen Hilfssatz.

Der Nachfolger a' von a wird rekursiv erklärt durch

$$0' = \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

---

[6]) Dieser Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von ACKERMANN in der unter [1]) zitierten Arbeit, bezieht sich aber auf die etwas andersartigen φ-Zahlzeichen.

$$\left[\varphi\begin{pmatrix}a_0\,a_1\\0\;\;1\end{pmatrix}\right]'=\varphi\begin{pmatrix}a_0'\,a_1\\0\;\;1\end{pmatrix},$$

$$a'=\varphi\begin{pmatrix}1\;a\\0\;1\end{pmatrix}\;\text{ für }a=\varphi\begin{pmatrix}a_0\,a_1\,a_2\ldots a_n\\0\;1\;\alpha_2\ldots\alpha_n\end{pmatrix}\;\text{ mit }a_2\neq 0\,.$$

Man beweist dann durch Induktion nach der Anzahl der in a bzw. a und b auftretenden Zeichen:

(10.1) $a < a'$.

(10.2) Ist $b < a'$, so $b \leqq a$.

Der Hilfssatz zum Nachweis der transfiniten Induktion lautet:

(10.3) $\left\{\begin{array}{l} \text{Zu } b<\varphi A,\ A=\begin{pmatrix}a_0\,a_1\ldots a_n\\0\;\alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix} \text{ mit } a_1\neq 0 \text{ lassen sich Zahlzeichen}\\ c_0,\ldots,c_r \text{ angeben mit den Eigenschaften:}\\ c_0=0, \text{ falls } a_0=0 \text{ ist,}\\ c_0=\varphi\begin{pmatrix}u\,a_1\ldots a_n\\0\;\alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix} \text{ mit } u<a_0, \text{ falls } a_0\neq 0 \text{ ist,}\\ c_{i+1}=\varphi\begin{pmatrix}c_i'\,v_i\,a_2\ldots a_n\\\gamma_i\,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\end{pmatrix} \text{ mit } \gamma_i<\alpha_1,\ v_i<a_1 \text{ für alle } i=0,\ldots,r-1,\\ b\leqq c_r. \end{array}\right.$

Beweis durch Induktion nach der Anzahl der in b auftretenden Zeichen: Für $b=0$ ist der Satz trivial. Es sei $b=\varphi B$, $B=\begin{pmatrix}b_1\ldots b_m\\\beta_1\ldots\beta_m\end{pmatrix}$. Dann unterscheiden wir:

I. Bei $A<B$ ist $b<\varphi A$ nur gemäß (7.3) bzw. (7.4) möglich, und zwar in den Fällen:

1. $a_0\neq 0$, $b<a_0$. Dann ist $b\leqq\varphi\begin{pmatrix}b\;a_1\ldots a_n\\0\;\alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix}=c_0$ mit $u=b<a_0$.

2. $a_0\neq 0$, $b\leqq a_j$ mit $j\neq 0$. Dann ist $b\leqq\varphi\begin{pmatrix}a_j\ldots a_n\\\alpha_j\ldots\alpha_n\end{pmatrix}\leqq\varphi\begin{pmatrix}0\;a_1\ldots a_n\\0\;\alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix}=c_0$ mit $u=0<a_0$.

3. $a_0=0$, $b<a_1$. Dann ist $b<\varphi\begin{pmatrix}1\;b\;a_2\ldots a_n\\0\;\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\end{pmatrix}=c_1$ mit $\gamma_0=0$, $v_0=b<a_1$.

4. $a_0=0$, $b\leqq a_j$ mit $j>1$. Dann ist $b\leqq\varphi\begin{pmatrix}a_j\ldots a_n\\\alpha_j\ldots\alpha_n\end{pmatrix}<\varphi\begin{pmatrix}1\,0\;a_2\ldots a_n\\0\;\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\end{pmatrix}=c_1$ mit $\gamma_0=0$, $v_0=0<a_1$.

II. Bei $B<A$ hat B die Gestalt $\begin{pmatrix}b_1\ldots b_j\,a_k^*\,a_{k+1}\ldots a_n\\\beta_1\ldots\beta_j\,\alpha_k\,\alpha_{k+1}\ldots\alpha_n\end{pmatrix}$ mit $0\leqq j$, $0\leqq k\leqq n$. Dann ist $b<\varphi A$ nur gemäß (7.1) möglich, also mit $b_i<\varphi A$ für alle i. Es sei b_M das Maximum der $b_1,\ldots,b_j$, falls $j\neq 0$ ist, sonst $b_M=0$.

1. Bei $k=0$ ist $b=\varphi\begin{pmatrix}a_0^*\,a_1\ldots a_n\\0\;\alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix}=c_0$ mit $u=a_0^*<a_0$.

2. Bei $k=1$ ist $b<\varphi\begin{pmatrix}b_M'\,a_1^*\ldots a_n\\\beta_j\;\alpha_1\ldots\alpha_n\end{pmatrix}$ mit $\beta_j<\alpha_1$, $a_1^*<a_1$. Da $b_M<\varphi A$ ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung $c_0,\ldots,c_r$ gemäß (10.3) mit $b_M\leqq c_r$. Dann ist $b<\varphi\begin{pmatrix}c_r'\,a_1^*\,a_2\ldots a_n\\\beta_j\,\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\end{pmatrix}=c_{r+1}$ mit $\gamma_r=\beta_j<\alpha_1$, $v_r=a_1^*<a_1$.

3. Bei $k>1$ ist $b<\varphi\begin{pmatrix}b_M'\;0\,a_2\ldots a_n\\\beta_j\;\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n\end{pmatrix}$, und es ergibt sich wie vorher $b<c_{r+1}$ mit $\gamma_r=\beta_j$, $v_r=0<a_1$.

Wir sagen nun, eine Zahl a (dargestellt durch ein φ-Zahlzeichen) sei „*erreichbar*", wenn die transfinite Induktion bis a in dem System konstruktiv zu beweisen ist. Dann haben wir zu zeigen, daß jede Zahl des Systems erreichbar ist.

Offenbar gelten die Sätze:

(11.1) Die Zahl 0 ist erreichbar.

(11.2) Ist a erreichbar, so auch jede Zahl $b < a$.

(11.3) Ist jede Zahl $b < a$ erreichbar, so auch a.

Hieraus folgt mit (10.2):

(11.4) Ist a erreichbar, so auch a'.

Ferner gilt, da offenbar $a \leqq \varphi\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \leqq a'$ ist:

(11.5) Ist a erreichbar, so auch $\varphi\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$.

Weiterhin haben wir die Sätze:

(12.1) Hinreichend für die Erreichbarkeit von $\varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ mit $a_1 \neq 0$ sind die Voraussetzungen:
a) $\varphi\begin{pmatrix}a_0^* & a_1 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ sei für alle $a_0^* < a_0$ erreichbar.
b) Die Erreichbarkeit übertrage sich von x auf $\varphi\begin{pmatrix}x & a_1^* & a_2 \ldots a_n\\ \alpha_1^* & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ für alle $x \neq 0$, $\alpha_1^* < \alpha_1$, $a_1^* < a_1$.
(Dabei fällt die Voraussetzung a) im Falle $a_0 = 0$ fort.)

Beweis: Für $A = \begin{pmatrix}a_0 & a_1 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$, $b < \varphi A$ gibt es gewisse $c_0, \ldots, c_r$ gemäß (10.3). Nach Voraussetzung a) bzw. (11.1) ist c_0 erreichbar. Nach (11.4) und Voraussetzung b) ist mit c_i auch c_{i+1} erreichbar. Wegen $b \leqq c_r$ ist also auch b erreichbar. Da dies für alle $b < \varphi A$ gilt, ist nach (11.3) auch φA erreichbar.

(12.2) Wenn sich die Erreichbarkeit von x auf $\varphi\begin{pmatrix}x & a_1^* & a_2 \ldots a_n\\ \alpha_1^* & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ für alle $x \neq 0$, $\alpha_1^* < \alpha_1$, $a_1^* < a_1$ überträgt, so überträgt sie sich im Falle $a_1 \neq 0$ auch von a_0 auf $\varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$.

Beweis: Gemäß (12.1) folgt die Erreichbarkeit von $\varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ mit $a_1 \neq 0$ aus der Voraussetzung b) durch transfinite Induktion bis a_0, also auf Grund der Erreichbarkeit von a_0.

(12.3) Ist α_1 erreichbar und überträgt sich die Erreichbarkeit von x auf $\varphi\begin{pmatrix}x & a_1^* & a_2 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ für alle x und $a_1^* < a_1$, so überträgt sie sich im Falle $a_1 \neq 0$ auch von a_0 auf $\varphi\begin{pmatrix}a_0 & a_1 \ldots a_n\\ 0 & \alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$.

Beweis: Auf Grund der Erreichbarkeit von α_1 kann transfinite Induktion bis α_1 angewandt werden. Gilt die Behauptung für alle $\alpha_1^* < \alpha_1$, so ist mit 0 auch

$\varphi\begin{pmatrix}0\,x & a_1^* \, a_2 \ldots a_n \\ 0\,\alpha_1^* & \alpha_1 \;\alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}x & a_1^* \, a_2 \ldots a_n \\ \alpha_1^* & \alpha_1 \; \alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ für $0 < \alpha_1^* < \alpha_1$, $x \neq 0$ erreichbar. Hieraus ergibt sich zusammen mit der 2. Voraussetzung von (12.3) die Voraussetzung von (12.2). Folglich überträgt sich nach (12.2) die Erreichbarkeit von a_0 auf $\varphi\begin{pmatrix}a_0\,a_1 \ldots a_n \\ 0\;\alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$, wenn $a_1 \neq 0$ ist.

(12.4) Überträgt sich die Erreichbarkeit von x auf $\varphi\begin{pmatrix}x\;a_2 \ldots a_n \\ 0\;\alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$, so überträgt sie sich auch von a_0, a_1, α_1 auf $\varphi\begin{pmatrix}a_0\,a_1\,a_2 \ldots a_n \\ 0\;\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus (12.3) durch transfinite Induktion bis a_1, also gemäß der Erreichbarkeit von a_1.

Hieraus erhält man mit (11.5) durch vollständige Induktion nach n:

(12.5) Sind $a_0, \ldots, a_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ erreichbar, so ist auch $\varphi\begin{pmatrix}a_0\,a_1 \ldots a_n \\ 0\;\alpha_1 \ldots \alpha_n\end{pmatrix}$ erreichbar.

Aus (11.1) und (12.5) ergibt sich nun die Erreichbarkeit einer jeden Zahl unseres Systems durch Induktion nach der Anzahl der auftretenden Zeichen.

(Eingegangen am 13. April 1953.)