

Werk

Titel: Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz ?

Autor: Schütte, K.; Waerden van der, B.L.

Jahr: 1951

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0123|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?

Von

K. SCHÜTTE in Marburg/Lahn und B. L. VAN DER WAERDEN in Zürich.

Inhaltsübersicht.

- § 1. Einleitung.
- § 2. Fünf und sechs Punkte.
- § 3. Der Existenzsatz.
- § 4. Der Graph.
- § 5. Abbau eines Graphen.
- § 6. Polygone irreduzibler Graphen.
- § 7. Eine Lagerung von 7 Punkten auf der Kugel.
- § 8. Die Minimalkugel für $N = 7$.
- § 9. Konkave Funktionen bei Rhomben.
- § 10. Eine Ungleichung für Graphen aus Dreiecken und Vierecken.
- § 11. Der Fall $N = 8$.
- § 12. Eine Lagerung von 9 Punkten auf der Kugel.
- § 13. Hilfssätze für $N = 9$.
- § 14. Irreduzible Graphen mit 9 Punkten auf der Minimalkugel für $N = 9$.
- § 15. Irreduzible Graphen mit weniger als 9 Punkten.
- § 16. Die Minimalkugel für $N = 9$.
- § 17. Einige Lagerungen von mehr als 9 Punkten auf der Kugel.
- § 18. Tabellarische Übersicht.

§ 1. Einleitung.

L. FEJES TÓTH¹⁾ hat eine Abschätzung für den kürzesten Abstand δ zweier Punkte eines auf der Kugeloberfläche liegenden Punktsystems angegeben. Sie lautet für N Punkte auf einer Kugel mit Radius r :

$$(A) \quad \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \leq 4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{N}{N-2} \frac{\pi}{6}.$$

Auf anderem Wege haben HABICHT und v. D. WAERDEN²⁾ dieselbe Ungleichung abgeleitet. Sie bedeutet geometrisch: Ist der Mindestabstand δ gegeben, und beschreibt man mit δ als Sehne der drei Seiten ein gleichseitiges Dreieck auf der Kugel, so muß der Winkel α dieses Dreiecks mindestens $\frac{N}{N-2} \cdot 60^\circ$ betragen. Oder, was damit gleichbedeutend ist: der Flächeninhalt A dieses Dreiecks darf nicht größer sein als der $(2N-4)$ -te Teil der Kugeloberfläche.

Das Gleichheitszeichen in (A) gilt nur für $N = 3, 4, 6$ und 12 , da man nur in diesen Fällen die Kugeloberfläche in $(2N-4)$ gleichseitige sphärische Dreiecke

¹⁾ L. FEJES TÓTH, Jber. dtsch. Math.-Ver. 53, 66 (1934).

²⁾ Die Arbeit von HABICHT und v. D. WAERDEN erscheint im selben Band dieser Annalen.

einteilen kann. In allen anderen Fällen muß, bei gegebenem Mindestabstand δ , der Radius r noch größer sein als nach (A). Es fragt sich, wie groß.

Diese Frage soll hier für $N = 5, 7, 8$ und 9 beantwortet werden. Dabei soll δ zu 1 normiert werden. Für $N = 10, 11, 13, 14, 15, 16, 24$ und 32 werden wir mögliche Werte von r angeben, die vermutlich die kleinstmöglichen sind.

Diese Arbeit ist folgendermaßen entstanden. Im Mai 1950 hat v. d. WAERDEN in einem Vortrag in Göttingen die Ergebnisse von HABICHT und v. d. WAERDEN auseinandergesetzt und außerdem bewiesen, daß auf einer Kugel, auf der 5 Punkte im gegebenen Mindestabstand Platz haben, auch 6 solche Punkte Platz finden, nämlich in den Eckpunkten eines Oktaeders. Dieses Ergebnis erwähnt auch FEJES TÓTH, auf dessen Arbeit wir später aufmerksam gemacht wurden.

Durch diesen Vortrag angeregt, hat SCHÜTTE die Minimal-kugel für $N = 7$ bestimmt. Dazu waren außer den Rechnungen, die man in § 8 finden wird, recht komplizierte Fallunterscheidungen nötig. VAN DER WAERDEN hat dann die Sätze von § 5 gefunden, die es gestatten, fast ohne Fallunterscheidungen auszukommen.

Schon HABICHT hatte den Graphen herangezogen, der entsteht, indem man auf der Kugel diejenigen Punktepaare verbindet, die genau den Abstand 1 haben. Für den Fall, daß dieser Graph nur aus Dreiecken und Vierecken besteht, fand v. d. WAERDEN mit Hilfe von konkaven Funktionen (§ 9) eine Verschärfung der Ungleichung A (§ 10). In dieser verschärften Ungleichung kann nur für $N = 8$ und $N = 24$ das Gleichheitszeichen gelten, und zwar nur dann, wenn die 8 oder 24 Punkte die Eckpunkte eines von Dreiecken und Vierecken begrenzten halbregulären Polyeders bilden. Nun gelang es SCHÜTTE, für genügend kleine Kugelradien die Fünfecke, Sechsecke usw. auszuschließen (§ 6). Damit war für $N = 8$ das halbreguläre Polyeder als Minimalfigur erkannt (§ 11). Für $N = 24$ können wir dasselbe nur vermuten.

Für $N = 9$ hat SCHÜTTE zunächst durch Probieren die Minimalfigur gefunden (§ 12). Auf Grund eines Satzes über Fünfecke konnte er auch beweisen, daß entweder nur Dreiecke und Vierecke vorkommen oder ein Punkt sich von den anderen „wegschieben“ läßt, so daß seine Abstände zu den anderen > 1 werden (§ 13). Im ersten Fall fand er 2 mögliche Graphen (§ 14), im zweiten Fall nur einen (§ 15). So blieben 3 Graphen übrig, darunter die vermutete Minimalfigur. Bei den zwei anderen war noch ein Winkel verfügbar. Durch Variieren dieses Winkels gelang es uns unter Verwendung einiger Sätze über konvexe Funktionen, den Radius zu verkleinern (§ 16). So blieb schließlich nur die in § 12 gefundene, in Fig. 24 dargestellte Möglichkeit übrig.

Für $N = 10, 13, 14, 15, 16$ hat SCHÜTTE, für $N = 11, 24$ und 32 v. d. WAERDEN die vermutlichen Minimalfiguren gefunden. Es ist uns aber nicht gelungen, zu beweisen, daß die Radien wirklich minimal sind.

Der Verlauf von d^2 als Funktion von N ist in Fig. 62 dargestellt, wobei $d = 2r$ den Kugeldurchmesser bedeutet.

§ 2. Fünf und sechs Punkte.

Es mögen 5 Punkte in Abständen ≥ 1 auf einer Kugel liegen. Verbindet man drei von ihnen durch kürzeste Bogen, so erhält man ein sphärisches Dreieck ABC , in dem der Cosinussatz gilt:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Gesetzt nun, der Durchmesser d wäre kleiner als $\sqrt{2}$. Da der Abstand AB mindestens 1 beträgt, so ist AB größer als die Sehne eines Bogens von 90° , also ist $a > 90^\circ$, und das gleiche gilt von b und c . Die drei Cosinusse linker Hand sind also negativ, also ist die linke Seite negativ, also auch die rechte. Mithin muß ein Faktor rechts negativ sein, und da $\sin a$ und $\sin b$ es nicht sein können, so folgt $\cos \gamma < 0$, also

$$\gamma > 90^\circ.$$

Dasselbe gilt von allen Winkeln der sphärischen Dreiecke, die man aus je drei von den 5 Punkten bilden kann.

Verbindet man nun einen von den 5 Punkten, etwa C , mit allen 4 anderen, so erhält man bei C vier stumpfe Winkel, also mehr als 360° , was nicht geht.

Also muß der Kegeldurchmesser d mindestens $\sqrt{2}$ betragen. Ist das aber der Fall, so haben gleich 6 Punkte auf der Kugel Platz, nämlich die 6 Eckpunkte eines regulären Oktaeders.

§ 3. Der Existenzsatz.

Satz 1: Es gibt für jedes N eine kleinste Kugel, auf der N Punkte in Abständen ≥ 1 Platz haben.

Beweis: Es sei R der Radius einer Kugel, auf der N Punkte sicher Platz haben. Jede Figur von N Punkten auf einer Kugel vom Radius $r \leq R$ ist dann bestimmt durch $2N + 1$ Koordinaten, nämlich durch r und je zwei Polarkoordinaten ϑ_k, φ_k für jeden der N Punkte. Diese $2N + 1$ Koordinaten sind alle beschränkt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \vartheta_k \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi_k \leq 2\pi \end{aligned}$$

und außerdem durch Ungleichungen wie

$$(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2 \geq 1$$

verknüpft, wo

$$x_k = r \sin \vartheta_k \cos \varphi_k$$

usw. die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte sind. Da in allen diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen zugelassen ist, definieren sie eine abgeschlossene Menge im $(2N + 1)$ -dimensionalen Raum der Koordinaten $r, \vartheta_k, \varphi_k$.

Auf einer beschränkten abgeschlossenen Menge hat eine stetige Funktion der Koordinaten immer ein Minimum. Also hat der Radius r ein Minimum, q. e. d.

Außer dem absoluten, d. h. kleinsten Minimum kann es noch relative Minima geben, d. h. solche Figuren, bei denen der Radius sich durch kleine Änderungen der Lage der Punkte nicht verkleinern läßt. Wir wollen solche Figuren *relative Minimalfiguren* nennen, die Kugeln *relative Minimalkugeln*. Unter der *Minimalkugel* schlechthin verstehen wir aber die kleinste Kugel, auf der N Punkte ohne gegenseitige Störung Platz haben.

§ 4. Der Graph.

Sind auf einer Kugel mit Radius r irgendwie N Punkte mit Mindestabstand 1 gegeben, so können wir immer die Punktpaare, deren Abstände genau 1 sind, durch kleinste Großkreisbogen verbinden. Es entsteht ein

Graph. Dieser braucht nicht zusammenzuhängen. Die Anzahl der Verbindungsstrecken, die in einem Punkt zusammenstoßen, bezeichnen wir als den *Grad* des betreffenden Punktes.

Satz 2: Die Strecken des Graphen überschneiden sich nicht.

Beweis: Gesetzt, zwei Strecken AB und CD hätten einen Punkt S gemeinsam. Dann wäre

$$2 \leq AC + BD < (AS + SC) + (BS + SD) = AB + CD = 2,$$

was nicht geht.

Wir betrachten geschlossene Streckenzüge ohne Überschneidungen, d. h. Teilmengen von Punkten und Strecken eines Graphen, bei denen in jedem Punkt der Teilmenge genau zwei Strecken der Teilmenge zusammenstoßen. Nach Satz 2 wird die Kugel durch einen derartigen geschlossenen Streckenzug des Graphen in zwei Gebiete zerlegt. Enthält eines dieser Gebiete keinen Punkt des Graphen, so sprechen wir von einem *Polygon des Graphen* (Dreieck, Viereck usw.), und wir bezeichnen das Gebiet, in dem kein Punkt liegt, als das *Innere des Polygons*, das andere Gebiet, wenn es mindestens einen Punkt enthält, als das *Äußere des Polygons*. (Liegen alle Punkte des Graphen auf einem einzigen Polygon, so besitzt dieses zwei innere Gebiete.)

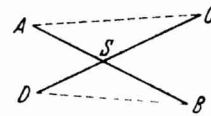


Fig. 1.

§ 5. Abbau eines Graphen.

Im folgenden sei immer $N > 6$. Dann ist $d > \sqrt{2}$, da auf einer Kugel mit Durchmesser $\sqrt{2}$ nur 6 Punkte ohne Störung Platz haben. Der Kreis mit Radius 1 um einen Punkt der Kugel ist dann immer kleiner als ein Großkreis.

Satz 3. Wenn alle Strecken des Graphen, die von einem Punkt P ausgehen, einem Winkel von 180° angehören, so kann man durch eine kleine Verschiebung den Punkt P ganz isolieren, d. h. man kann erreichen, daß er von allen anderen Punkten einen Abstand > 1 erhält. Insbesondere kann man also jeden Punkt 2. Grades durch eine kleine Verschiebung isolieren.

Beweis: Um alle Nachbarpunkte $A, B, \dots$ beschreiben wir Kreise vom Radius 1. Nun verschieben wir P in einer Richtung senkrecht zur Grenze des Winkels von 180° , dem alle von P ausgehenden Strecken $PA, PB, \dots$ angehören, und zwar aus dem Winkelraum heraus auf einem Großkreis PQ . Bei dieser Verschiebung kommt P offensichtlich aus allen Kreisen um $A, B, \dots$ heraus. Der Winkel APQ ist nämlich $\geq 90^\circ$. Ist er 90° , so bewegt sich P tangential zum Kreis auf einem Großkreis, also aus dem kleineren Kreis heraus. Ist der Winkel $> 90^\circ$, so bewegt sich P noch stärker von A weg.

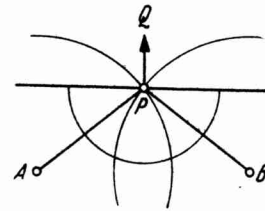


Fig. 2.

Wir nennen dieses Verfahren das *Wegschieben* eines Punktes P . Einen *zusammenhängenden* Graphen (mit mehr als einem Punkt), in dem sich kein Punkt wegschieben läßt, in dem also nur Winkel $< 180^\circ$ auftreten, bezeichnen wir als *irreduzibel*. Aus Satz 3 folgt nun

Satz 4. Jeder Graph läßt sich durch fortgesetztes Wegschieben der Punkte so umwandeln, daß er in lauter irreduzible Graphen und isolierte Punkte zerfällt.

Ferner gilt der

Satz 5. Wenn sich der Graph durch fortgesetztes Wegschieben der Punkte in lauter isolierte Punkte zerlegen läßt, so ist die Kugel nicht die Minimalkugel, ja nicht einmal eine relative Minimalkugel.

Beweis: Nachdem alle Punkte von den anderen weggeschoben sind, sind alle Abstände > 1 geworden. Dann kann aber der Radius r etwas verkleinert werden (unter Beibehaltung der Richtungen der Punkte vom Mittelpunkt aus), so daß alle Abstände immer noch > 1 bleiben. Also war die Kugel keine relative Minimalkugel.

Auf einer relativen Minimalkugel muß somit bei der nach Satz 4 möglichen Zerlegung mindestens ein irreduzibler Graph auftreten.

§ 6. Polygone irreduzibler Graphen.

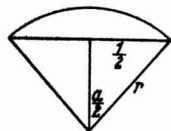


Fig. 3.

Den Großkreisbogen (in Winkelmaß) zwischen zwei Punkten vom Abstand 1 bezeichnen wir mit a . Zwischen a und dem Kugelradius r besteht die Beziehung

$$(1) \quad \sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2r}.$$

Satz 6. Für die Kugel eines irreduziblen Graphen, der ein Polygon mit n Ecken enthält, gilt $n \cdot a < 360^\circ$.

Beweis: Da das Innere eines Polygons keine Punkte enthält, werden die inneren Winkel des Polygons nicht durch irgendwelche Strecken des Graphen unterteilt. Damit der Graph irreduzibel ist, müssen alle inneren Winkel $< 180^\circ$ sein. Besitzt das Polygon mehr als drei Ecken, so verschieben wir es

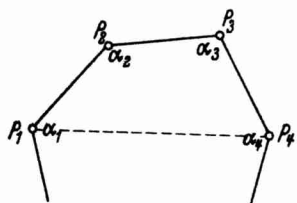


Fig. 4.

in folgender Weise. $P_1, \dots, P_4$ seien vier aufeinander folgende Ecken mit den inneren Winkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_4$, die alle $< 180^\circ$ sind. Dann bewegen wir die Punkte P_2, P_3 unter Erhaltung der Abstände P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_4 so weit, bis ein innerer Winkel gleich 180° geworden ist. Dadurch gehen zwei Seiten des Polygons in eine einzige (längere) Seite über, die fortan in sich starr gehalten wird. Setzt man nun dieses Verfahren fort, so wird schließlich das Polygon unter Erhaltung seines

Umfanges $n \cdot a$ in ein Dreieck verschoben. Der größtmögliche Umfang eines Dreiecks ist gleich 360° . Dieser Maximalwert kann nicht angenommen werden, da sonst alle Ecken des Dreiecks auf einem Großkreis liegen müßten, also alle inneren Winkel des Polygons nach den Verschiebungen gleich 180° wären. Tatsächlich war aber bei jeder Verschiebung mindestens ein innerer Winkel verkleinert, so daß auch nach allen Verschiebungen mindestens ein innerer Winkel $< 180^\circ$ bleiben muß. Folglich ist der Umfang des Polygons

$$n \cdot a < 360^\circ,$$

was zu beweisen war.

Satz 7. Im Falle $N > 6$ umschließt ein geschlossener Streckenzug aus drei oder vier Strecken eines Graphen immer ein Gebiet, in dem kein Punkt ohne Störung durch die Ecken des Streckenzuges Platz hat.

Beweis: Wir betrachten das kleinere der beiden Gebiete, in welche die Kugel durch den geschlossenen Streckenzug zerlegt wird. Handelt es sich um einen dreieckigen Streckenzug, so wird das kleinere Gebiet durch den

um eine Ecke gezogenen Kreis mit dem Radius 1 vollständig überdeckt. In dem Gebiet hat also kein Punkt ohne Störung Platz. Bei einem viereckigen Streckenzug ziehen wir Einheitskreise um zwei gegenüberliegende Eckpunkte. Im Falle $N > 6$ sind die Einheitskreise kleiner als Großkreise. Daher überdecken sie das kleinere Gebiet in der Weise, daß nur die beiden übrigen Eckpunkte gemeinsame Randpunkte beider Kreise sind. Folglich hat auch in diesem Gebiet kein Punkt ohne Störung Platz.

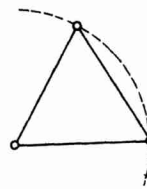


Fig. 5.

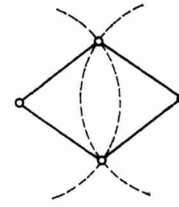


Fig. 6.

Satz 8. Ist für eine Zahl $N > 6$ der Radius der Minimalkugel $\leq \frac{1}{2 \sin 36^\circ}$, so gibt es als Minimalfigur einen irreduziblen Graphen von N Punkten. Dieser Graph enthält keine anderen Polygone als Dreiecke und Vierecke.

Beweis: Nach Satz 4 läßt sich eine Minimalfigur aus irreduziblen Graphen und isolierten Punkten zusammensetzen. Dabei muß nach Satz 5 mindestens ein irreduzibler Graph auftreten. Aus

$$r \leq \frac{1}{2 \sin 36^\circ}$$

folgt nach (1)

$$\sin \frac{a}{2} \geq \sin 36^\circ, \text{ also } a \geq 72^\circ.$$

Nach Satz 6 gilt für Polygone eines irreduziblen Graphen

$$n \cdot 72^\circ \leq n \cdot a < 360^\circ, \text{ also } n \leq 4.$$

D. h. ein irreduzibler Graph enthält keine anderen Polygone als Dreiecke und Vierecke. Diese umschließen nach Satz 7 Gebiete, in denen keine Punkte ohne Störung Platz haben. Die Minimalfigur kann also neben den Punkten eines irreduziblen Graphen keine anderen Punkte enthalten.

Satz 9. Ein irreduzibler Graph auf einer Minimalkugel für $6 < N \leq 12$ enthält keine anderen Polygone als Dreiecke, Vierecke und Fünfecke.

Beweis: Der Radius r einer Minimalkugel für $N \leq 12$ ist höchstens gleich dem Radius

$$r_{12} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

der Kugel, die einem Ikosaeder der Kantenlänge 1 umbeschrieben ist. Aus $r \leq r_{12} < 1$ folgt nach (1)

$$\sin \frac{a}{2} = \frac{1}{2r} > \frac{1}{2}, \text{ also } a > 60^\circ.$$

Nach Satz 6 gilt für Polygone eines irreduziblen Graphen

$$n \cdot 60^\circ < n \cdot a < 360^\circ, \text{ also } n \leq 5.$$

§ 7. Eine Lagerung von 7 Punkten auf der Kugel.

Als Maß für die Größe einer Kugel nehmen wir im folgenden statt des Radius r den Winkel α des gleichseitigen sphärischen Dreiecks, dessen Eckpunkte den Abstand 1 haben. Je größer α , um so kleiner r .

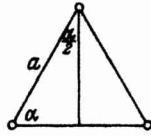


Fig. 7.

Zwischen a und α besteht die Beziehung

$$(2) \quad \cos a = \cot \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Auf einer Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ erhält man eine Verteilung von 7 Punkten in folgender Weise: Man gehe aus von einem gleichseitigen sphärischen Dreieck ABC mit Kantenlänge 1. Der Mittelpunkt des Dreiecks sei der Südpol der Kugel. Auf die drei Seiten setze man drei weitere gleichseitige Dreiecke auf. Die Spitzen

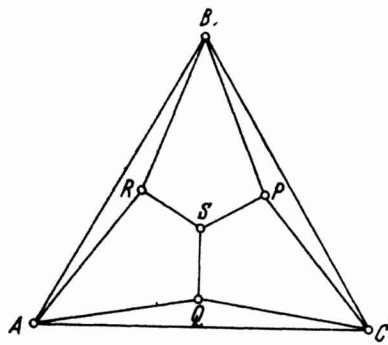


Fig. 8.

P, Q, R dieser Dreiecke liegen gleich weit vom Nordpol entfernt. Geht man etwa von der Tetraederfigur aus und läßt den Kugelradius stetig anwachsen, so wächst die Entfernung von P, Q und R zum Nordpol S stetig ins Unendliche. Es gibt also einen Augenblick, wo diese Entfernungen genau 1 geworden sind. Man hat dann den in Fig. 8 gezeichneten Graphen. In der Figur sind der Einfachheit halber nicht die Kreisbogen, sondern die geradlinigen Kanten in stereographischer Projektion vom Südpol aus gezeichnet.

Aus der Symmetrie der Figur ist klar, daß die Winkel zwischen den drei Kreisbogen in S genau 120° sind. Da $AR SQ$ ein sphärischer Rhombus ist, ist der Winkel RAQ ebenfalls 120° . Die übrigen drei Winkel bei A sind gleich α , also hat man

$$120^\circ + 3\alpha = 360^\circ, \\ \alpha = 80^\circ.$$

Auf einer Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ haben also 7 Punkte Platz, und für die Minimal-kugel mit 7 Punkten gilt

$$\alpha \geq 80^\circ.$$

Wir wollen nun beweisen, daß die Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ die Minimal-kugel für $N = 7$ ist.

§ 8. Die Minimal-kugel für $N = 7$.

Für $\alpha \geq 80^\circ$ ist auf Grund der Formel (2) $a > 77^\circ$, also nach (1)

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} < \frac{1}{2 \sin 36^\circ}.$$

Damit ist die Voraussetzung des Satzes 8 erfüllt. Eine Minimalfigur wird also von einem irreduziblen Graphen mit 7 Punkten und mit Dreiecken und Vierecken als einzigen Polygonen gebildet.

Alle in einem Graphen auftretenden Winkel müssen $\geq \alpha$ sein, damit sich die Punkte nicht stören. Wegen $\alpha > 72^\circ$ können somit höchstens 4 Strecken in einem Punkt zusammenstoßen. D. h. der Maximalgrad der Punkte ist 4. Punkte 2. Grades treten in einem irreduziblen Graphen nicht auf, da sich solche Punkte wegschieben lassen. Es kommen also für einen irreduziblen Minimalgraphen mit 7 Punkten nur Punkte 3. und 4. Grades in Betracht.

Bei ungeradem N können nicht alle Punkte 3. Grad haben, da die Anzahl der Kanten dann $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot N$ ist. Im Falle $N = 7$ besitzt also der irreduzible Minimalgraph mindestens einen Punkt P 4. Grades. P sei mit den Punkten A, B, C, D in dieser Reihenfolge verbunden. Der Graph enthält zwei weitere Punkte Q, R . Da jeder Punkt mindestens 3. Grad besitzt, sind Q und R je mit mindestens 2 Punkten A, B, C, D verbunden. Sie können aber nur mit benachbarten Punkten A, B bzw. B, C bzw. C, D bzw. D, A verbunden sein. Wäre nämlich etwa Q mit A und C verbunden, so würde $APCQ$ einen viereckigen Streckenzug bilden, der die Kugel in 2 Gebiete zerlegt. Beide Gebiete enthielten mindestens einen Punkt, nämlich B bzw. D , was nach Satz 7 unmöglich ist.

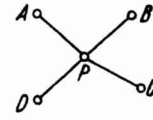


Fig. 9.

Es sei Q mit A und B verbunden. Außerdem kann Q nur noch mit R verbunden sein. Diese Verbindung muß bestehen, da Q mindestens 3. Grad hat. Für R bleiben jetzt nur noch die Verbindungsmöglichkeiten mit zwei benachbarten Punkten B, C bzw. C, D bzw. D, A .

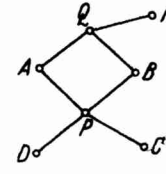


Fig. 10.

Wäre etwa R mit B und C verbunden, so müßte D mit A und C verbunden sein. Dann würde $AQRCD$ ein Fünfeck bilden, in dem keine Diagonalverbindungen bestehen (Fig. 11). Der Graph enthielte also ein fünfeckiges Polygon, entgegen Satz 8. Aus demselben Grunde kann R nicht mit A und D verbunden sein. Es bleibt also als einzige Möglichkeit, daß R mit C und D verbunden ist. Damit nur Dreiecke und Vierecke auftreten, müssen außerdem BC und AD verbunden sein (Fig. 12). Der Graph besitzt noch einen Freiheitsgrad, da die Winkel der bei P zusammenstoßenden Rhomben noch nicht festgelegt sind. Einer dieser beiden Winkel kann im Grenzfall gleich α werden, wobei eine Verbindung zwischen A und B bzw. C und D hinzuzufügen ist.

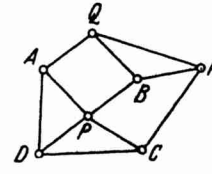


Fig. 11.

Die halben Winkel der Rhomben bei P seien ξ und η . Wir haben diese so zu bestimmen, daß die Kugel minimal wird. Die Punkte P, Q, R liegen auf einem Großkreis. Dieser wird minimal, wenn die Summe der sphärischen Abstände PQ und PR minimal wird. Es sei $PQ = 2p$ und $PR = 2q$. Dann ist also ξ so zu bestimmen, daß sich für $c = p + q$ ein Minimum ergibt. Es ist

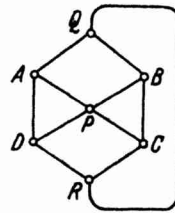


Fig. 12.

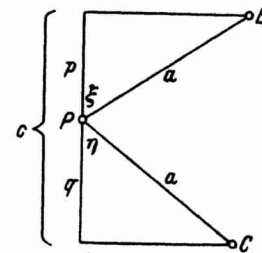


Fig. 13.

$$\cos \xi = \frac{\operatorname{tg} p}{\operatorname{tg} a}$$

$$\cos \eta = -\cos (\xi + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} (p + q) &= \frac{[\cos \xi - \cos (\xi + \alpha)] \cdot \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a \cdot \cos \xi \cdot \cos (\xi + \alpha)} \\ &= \frac{[\cos \xi - \cos (\xi + \alpha)] \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha + (1 - 2 \cos \alpha) \cdot \cos \xi \cdot \cos (\xi + \alpha)}. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\zeta = \xi + \frac{\alpha}{2},$$

so wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \frac{\left[\cos \left(\zeta - \frac{\alpha}{2} \right) - \cos \left(\zeta + \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cdot \cos \alpha \cdot \sqrt{1 - 2 \cos \alpha}}{\cos^2 \alpha + (1 - 2 \cos \alpha) \cdot \cos \left(\zeta - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \left(\zeta + \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{4 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cos \alpha} \cdot \sin \zeta}{1 - \cos \alpha - 2 (1 - 2 \cos \alpha) \cdot \sin^2 \zeta}. \end{aligned}$$

Es ist ζ so zu bestimmen, daß

$$f(\zeta) = \frac{\sin \zeta}{1 - \cos \alpha - 2 (1 - 2 \cos \alpha) \sin^2 \zeta}$$

ein Minimum wird. Die Differentiation ergibt

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &= \frac{\cos \zeta \cdot [1 - \cos \alpha + 2 (1 - 2 \cos \alpha) \sin^2 \zeta]}{[1 - \cos \alpha - 2 (1 - 2 \cos \alpha) \sin^2 \zeta]^2} \\ \cos \zeta \cdot f'(\zeta) &\geq 0. \end{aligned}$$

Es ist $f'(\zeta) = 0$ nur bei $\zeta = 90^\circ$ (Maximum). Das Minimum liegt also am Rande des zulässigen Intervalls, wobei einer der beiden Rhomben bei P den Winkel α besitzt, also der Rhombus durch die Verbindung AB bzw. CD in zwei Dreiecke zerfällt. Es handelt sich dann um einen Graphen, der mit dem in Fig. 8 angegebenen Graphen identisch ist und die Kugel mit $\alpha = 80^\circ$ festlegt. Die Minimalkugel für 7 Punkte ist also durch den Winkel $\alpha = 80^\circ$ bestimmt.

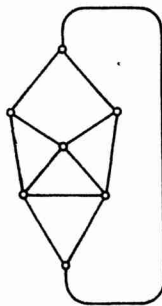


Fig. 14.

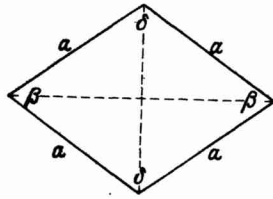


Fig. 15.

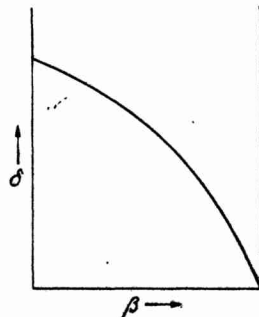


Fig. 16.

§ 9. Konkave Funktionen bei Rhomben.

In einem sphärischen Viereck mit 4 gleichen Seiten a seien β und δ zwei aufeinanderfolgende Winkel. Die gegenüberliegenden Winkel sind dann auch β und δ , und bei gegebenem a ist δ eine Funktion von β :

$$\delta = \varphi(\beta).$$

Satz 10. Die Funktion $\varphi(\beta)$ ist konkav, d. h. ihre Ableitung nimmt ständig ab.

Beweis: In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck mit Winkeln $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\delta}{2}$ und Hypotenuse a gilt

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} \cdot \cos a = 1,$$

also, wenn

$$\frac{1}{\cos a} = b$$

gesetzt wird,

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = b \cot \frac{\beta}{2}$$

$$\delta = 2 \arctan \left(b \cot \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\frac{d\delta}{d\beta} = - \frac{b}{\sin^2 \frac{\beta}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = - \frac{b}{1 + (b^2 - 1) \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Die Ableitung nimmt also ständig ab.

Aus diesem Satz folgt, daß auch die Summe $\beta + \delta$ und somit auch der Flächeninhalt des Vierecks eine konkave Funktion von β ist. Wir nennen diese Funktion $V(\beta)$.

Eine konkave Funktion hat ihr Minimum immer am Rande des zulässigen Intervalles. Wenn wir verlangen, daß keine Diagonale des Vierecks kleiner als a ausfällt, so ist das zulässige β -Intervall durch

$$\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$$

definiert, wobei α der Winkel des gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ist; denn für $\beta = \alpha$ und für $\beta = 2\alpha$ zerfällt das Viereck in zwei gleichseitige Dreiecke. Also folgt:

Der Flächeninhalt $V(\beta)$ des Vierecks ist am kleinsten dann, wenn das Viereck in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt.

Ist Δ der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks, so ist also stets

$$V(\beta) \geq 2\Delta$$

mit dem Gleichheitszeichen nur dann, wenn die Winkel des Vierecks α und 2α sind. Dieses Ergebnis haben HABICHT und v. D. WAERDEN auch schon erhalten. Man kann die Ungleichung auch so schreiben:

$$\beta + \delta \geq 3\alpha.$$

Betrachten wir nun zwei Vierecke, die in einem Punkt P zusammenkommen, wobei die Summe der Winkel bei P konstant gehalten wird:

$$\beta + \gamma = s = \text{const},$$

so sind die anderen Winkel δ und ε konkave Funktionen von β und von $\gamma = s - \beta$, also beide konkave Funktionen von β . Dann ist ihre Summe $\delta + \varepsilon$ aber auch eine konkave Funktion von β , und das gleiche gilt für die Summe der Flächeninhalte der Vierecke, die ja eine wachsende lineare Funktion der Winkelsumme

$$2\beta + 2\delta + 2\gamma + 2\varepsilon = 2s + 2(\delta + \varepsilon)$$

ist. Daraus folgt:

Die Winkelsumme $\delta + \varepsilon$ und damit auch die Summe der Flächeninhalte $V(\beta) + V(\gamma)$ wird bei festgehaltener Summe $\beta + \gamma = s$ dann am kleinsten, wenn einer der Winkel β oder γ den extrem zulässigen Wert α oder 2α annimmt, d. h. wenn eines der Vierecke in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt.

Dasselbe gilt, wenn drei oder mehr Vierecke in P zusammenkommen und

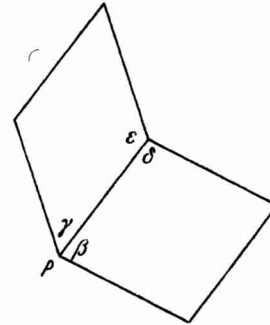


Fig. 17.

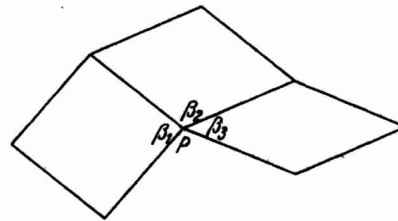


Fig. 18.

die Summe der Winkel bei P festgehalten wird. Hat man z. B. drei Winkel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ mit

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = s,$$

und hält man zunächst β_1 fest, so wird die Summe der Flächeninhalte

$$V(\beta_1) + V(\beta_2) + V(\beta_3)$$

nur dann minimal, wenn β_2 oder β_3 , sagen wir etwa β_3 , einen extremen Wert annimmt. Hält man dann β_3 fest, so folgt, daß beim Minimum auch β_1 oder β_2 extrem sein muß. Also:

Beim Minimum zerfallen alle Vierecke bis auf eines in je zwei Dreiecke.

Ist beim Minimum β_0 der eine Winkel, der nicht gleich α oder 2α ist, und ist h die Anzahl der Vierecke, so erhält man schließlich die Ungleichung

$$V(\beta_1) + V(\beta_2) + \dots + V(\beta_h) \geq (h-1) \cdot 2\Delta + V(\beta_0).$$

Setzt man

$$V(\beta_0) = 2\Delta + f(\beta_0),$$

wo $f(\beta_0)$ positiv oder Null ist, so kann man diese Ungleichung auch so schreiben:

$$V(\beta_1) + \dots + V(\beta_h) \geq 2h\Delta + f(\beta_0).$$

Dabei ist $f(\beta_0)$ positiv oder Null, und zwar Null nur dann, wenn auch β_0 gleich α oder 2α wird, also wenn die gegebene Winkelsumme s ein Vielfaches von α ist. In allen anderen Fällen erhält man β_0 , indem man von s ein solches Vielfaches von α subtrahiert, daß der Rest zwischen α und 2α liegt. Dieser Rest ist dann β_0 .

§ 10. Eine Ungleichung für Graphen aus Dreiecken und Vierecken.

In einem Punkt P eines Graphen mögen lauter Dreiecke und Vierecke zusammenkommen. Die Dreiecke haben alle den Flächeninhalt Δ , die Vierecke die Flächeninhalte $V(\beta_1), V(\beta_2), \dots$. Die Anzahl der Dreiecke sei h_3 , die der Vierecke h_4 . Setzen wir

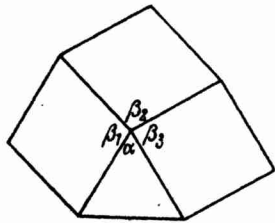


Fig. 19.

$$(3) \quad h_3 + 2h_4 = k,$$

so folgt aus § 7 für die Summe $S(P)$ der Flächeninhalte sämtlicher Dreiecke und Vierecke, die in P zusammenkommen, die Ungleichung

$$(4) \quad S(P) \geq (k-2)\Delta + V(\beta_0) = k\Delta + f(\beta_0).$$

Dabei wird β_0 so definiert: Man subtrahiert von 360° ein solches Vielfaches von α , daß ein Rest β_0 zwischen α und 2α übrig bleibt:

$$360^\circ - m\alpha = \beta_0, \quad \alpha \leq \beta_0 \leq 2\alpha.$$

Ist 360° ein Vielfaches von α , also $\alpha = 180^\circ$ oder 120° oder 90° oder 72° , so ist es gleichgültig, ob man $\beta_0 = \alpha$ oder $\beta_0 = 2\alpha$ wählt; es ist dann nämlich $V(\beta_0) = 2\Delta$ und $f(\beta_0) = 0$. Wir wissen schon, daß in diesen Fällen genau 3, 4, 6 oder 12 Punkte auf der Kugel Platz haben. Haben mehr als 6, aber weniger als 12 Punkte Platz, so muß man $m = 2$ nehmen; haben aber mehr als 12 Punkte Platz, so muß man $m = 3$ nehmen:

$$\begin{aligned} 6 < N < 12, \quad m &= 2, \quad 360^\circ - 2\alpha = \beta_0 \\ N > 12, \quad m &= 3, \quad 360^\circ - 3\alpha = \beta_0. \end{aligned}$$

Wenn α von 90° zu 72° oder von 72° bis 60° abnimmt, so nimmt β_0 jeweils von α bis 2α zu. Das Zusatzglied $f(\beta_0)$ in (4) nimmt dabei jedesmal zunächst zu und dann ab. In den Extremfällen $\beta_0 = \alpha$ und $\beta_0 = 2\alpha$ ist es Null, dazwischen positiv.

Addiert man die Ungleichungen (4) für sämtliche Punkte des Graphen, so erhält man

$$(5) \quad \Sigma S(P) \geq (\Sigma k) \Delta + N f(\beta_0).$$

Zu der Summe $\Sigma S(P)$ gibt jedes Dreieck einen Beitrag 3Δ , da es drei Ecken hat und an jeder Ecke einen Beitrag Δ gibt. Jedes Viereck mit Flächeninhalt $V(\beta)$ gibt aber einen Beitrag $4V(\beta)$. Ist also S_3 die Summe der Flächeninhalte aller Dreiecke und S_4 die der Vierecke, so wird die linke Seite von (5)

$$3S_3 + 4S_4.$$

Zu der Summe auf der rechten Seite

$$\Sigma k = \Sigma (h_3 + 2h_4)$$

gibt jedes Dreieck einen Beitrag 3, jedes Viereck aber einen Beitrag 8 wegen des Faktors 2 vor h_4 . Ist also g_3 die Anzahl der Dreiecke und g_4 die Anzahl der Vierecke, so ist

$$\Sigma k = 3g_3 + 8g_4.$$

Somit erhält man die Ungleichung

$$(6) \quad 3S_3 + 4S_4 \geq (3g_3 + 8g_4)\Delta + Nf.$$

Addiert man auf beiden Seiten

$$S_3 = g_3\Delta,$$

so erhält man nach Division durch 4 für den gesamten Flächeninhalt der Kugel die Abschätzung

$$(7) \quad F = S_3 + S_4 \geq (g_3 + 2g_4)\Delta + \frac{1}{4}Nf.$$

Nun ist nach der EULERSchen Polyederformel, wenn K die Anzahl der Kanten und G die der Flächen ist,

$$\begin{aligned} N - 2 &= K - G = \frac{1}{2}(3g_3 + 4g_4) - (g_3 + g_4) \\ &= \frac{1}{2}(g_3 + 2g_4). \end{aligned}$$

Also kann man (7) auch so schreiben:

$$(8) \quad F \geq 2(N - 2)\Delta + \frac{1}{4}Nf(\beta_0).$$

Das ist eine Verschärfung der Ungleichung von FEJES TÓTH

$$F \geq 2(N - 2)\Delta.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (8) nur dann, wenn es in (4) für jeden Punkt P gilt, also wenn in jedem Punkt P entweder nur Dreiecke oder nur Vierecke und ein einziges nicht zerfallendes Viereck zusammenkommen. Der erste Fall (nur Dreiecke) kann nur für $N = 3, 4, 6$ oder 12 eintreten und wurde schon früher erledigt. Gibt es aber auch Vierecke, so sind die Winkel dieser Vierecke alle gleich β_0 , also sind die Vierecke regulär. In jedem Punkt kommen

dann m Dreiecke mit Winkel α und ein Viereck mit Winkel β_0 zusammen, und es ist

$$(9) \quad m \alpha + \beta_0 = 360^\circ \quad (m \leq 4).$$

Ist N die Anzahl der Punkte, so ist $\frac{N}{4}$ die Anzahl der Vierecke und $\frac{mN}{3}$ die Anzahl der Dreiecke. Von jedem Punkt gehen $m+1$ Kanten aus, also ist die Kantenzahl $K = \frac{m+1}{2} N$. Die EULERSche Polyederformel ergibt nun

$$\begin{aligned} \frac{N}{4} + \frac{mN}{3} - \frac{m+1}{2} N + N &= 2 \\ \left(\frac{3}{4} - \frac{m}{6} \right) N &= 2 \\ N &= \frac{48}{18-4m}. \end{aligned}$$

Für $m=1$ oder 2 gibt das keinen ganzen Wert von N , für $m=3$ oder 4 ergibt sich aber $N=8$ oder 24 . Größer als 4 kann m nicht werden.

Also gilt das Gleichheitszeichen in (8) außer für $N=3, 4, 6$ oder 12 nur noch für $N=8$ oder 24 .

Die Figuren, die man für $N=8$ oder 24 erhält, sind halbreguläre Körper, begrenzt von 8 Dreiecken und 2 Vierecken oder von 32 Dreiecken und 6 Vierecken. Beide Figuren sind vermutlich minimal, aber nur für $N=8$ ist es uns bisher gelungen, das zu beweisen.

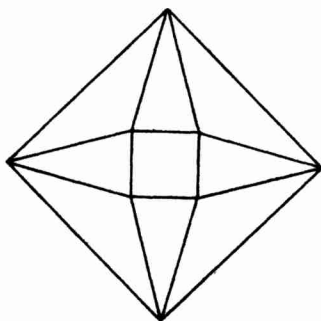


Fig. 20.

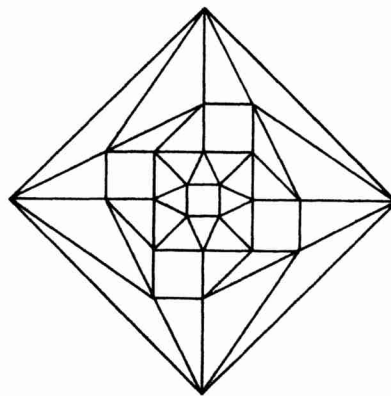


Fig. 21.

§ 11. Der Fall $N=8$.

Die Kugel, die durch den in Fig. 20 dargestellten halbregulären Körper mit 8 Ecken bestimmt wird, ist gekennzeichnet durch die Gleichung

$$(10) \quad 3\alpha + \beta = 360^\circ,$$

wo β der Winkel eines regelmäßigen Vierecks mit der Seite a ist. Zwischen a und β besteht die Beziehung

$$\cos a = \cot^2 \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{1 - \cos \beta}$$

oder

$$(11) \quad \cos \beta = \frac{\cos a - 1}{\cos a + 1}.$$

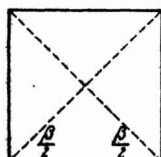


Fig. 22.

Aus (2) folgt

$$\cos \alpha = \frac{\cos a}{\cos a + 1}$$

und mit (10)

$$\cos \beta = \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \frac{\cos^3 a - 6 \cos^2 a - 3 \cos a}{(\cos a + 1)^3}.$$

Mit (11) ergibt sich

$$(\cos a - 1)(\cos a + 1)^2 = \cos^3 a - 6 \cos^2 a - 3 \cos a$$

$$7 \cos^2 a + 2 \cos a - 1 = 0$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{8} - 1}{7}$$

$$a > 74^\circ.$$

Für diese Kugel ist nach (1)

$$r = \frac{1}{2 \sin \frac{a}{2}} < \frac{1}{2 \sin 36^\circ}.$$

Da die Minimalkugel höchstens diesen Radius haben kann, ist die Voraussetzung des Satzes 8 erfüllt. Es gibt also auf der Minimalkugel einen irreduziblen Graphen mit 8 Punkten, in dem nur Dreiecke und Vierecke auftreten. Nach § 8 (8) gilt also die Ungleichung

$$(12) \quad F \geq 12 \Delta + 2 f(\beta_0).$$

Hier ist F der Flächeninhalt der Kugel, Δ der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks mit Winkel α und $f(\beta_0)$ der Überschuß des Flächeninhaltes des Rhombus mit Winkel β_0 über 2Δ .

Wir denken uns alle Flächeninhalte auf der Einheitskugel gemessen. (12) wird dann nach Division durch 2

$$(13) \quad 2\pi \geq 6(3\alpha - \pi) + f_1(\beta_0).$$

Hier ist $f_1(\beta_0)$ der Überschuß der Winkelsumme des Rhombus mit Winkel β_0 über 6α :

$$(14) \quad f_1(\beta_0) = 2\beta_0 + 2\delta_0 - 6\alpha.$$

Dabei ist

$$(15) \quad \beta_0 = 2\pi - 3\alpha$$

und δ_0 der andere Winkel des Rhombus. β_0 und δ_0 sind beide Funktionen von α allein, die aus dem Rhombus leicht zu berechnen sind:

$$(16) \quad \operatorname{tg} \frac{\beta_0}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta_0}{2} = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}.$$

Setzt man (14) in (13) ein, so erhält man nach Division durch 2

$$(17) \quad 6\alpha + \beta_0 + \delta_0 \leq 4\pi.$$

Die linke Seite ist, wie man sich leicht überzeugt, eine ständig wachsende Funktion von α . Also gibt es genau einen Wert α_0 , für den in (17) das Gleichheitszeichen gilt, und α kann niemals größer sein als dieses α_0 :

$$(18) \quad \alpha \leq \alpha_0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt in (18) nur dann, wenn es in (12), (13) und (17) überall gilt. Das ist aber nur dann der Fall, wie wir in § 8 gesehen haben,

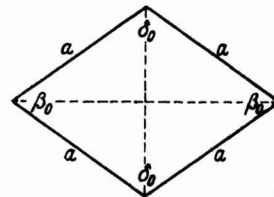


Fig. 23.

wenn in jedem Punkt genau ein Viereck und 3 Dreiecke zusammenkommen, also für die Figur des halbregulären Körpers, begrenzt von 2 Vierecken und 8 Dreiecken (Fig. 20). In diesem Falle ist also $\alpha = \alpha_0$ und

$$\delta_0 = \beta_0 = 2\pi - 3\alpha_0.$$

In allen anderen Fällen gilt

$$\alpha < \alpha_0,$$

d. h. die Kugel der Fig. 20 ist die Minimalkugel für $N = 8$.

§ 12. Eine Lagerung von 9 Punkten auf der Kugel.

Wir gehen aus von einem gleichseitigen Dreieck ABC der Seitenlänge 1. Diesem wird eine Kugel umbeschrieben, so daß die Eckpunkte des Dreiecks auf dem Äquator liegen. Auf den Seiten dieses Dreiecks wird nach oben

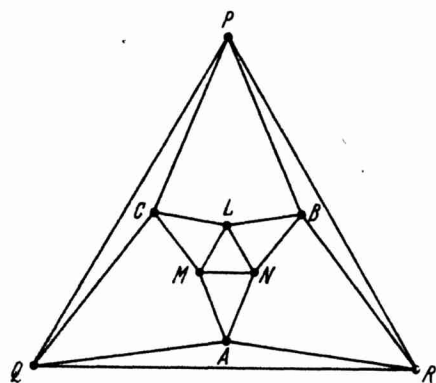


Fig. 24.

und nach unten je ein weiteres gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1 errichtet, so daß die gegenüberliegenden Ecken P, Q, R bzw. L, M, N je auf einem Breitenkreis liegen. Die gegenseitigen Abstände zwischen den Punkten P, Q, R und den Punkten L, M, N sind dann < 1 . Nun nehmen wir eine stetige Vergrößerung der Kugel unter Erhaltung ihres Mittelpunktes vor. Die Punkte A, B, C sollen dabei ihre Richtungen zum Mittelpunkt beibehalten, also auf dem Äquator verbleiben. Ihre gegenseitigen Abstände werden nun > 1 .

Die übrigen Punkte sollen so bewegt werden, daß ihre Abstände von den Äquatorpunkten, so weit sie vorher gleich 1 waren, gleich 1 bleiben. Die Breitenkreise rücken dabei näher an den Äquator heran, und die gegenseitigen Abstände der Punkte auf einem Breitenkreis wachsen an. Die stetige Vergrößerung der Kugel soll nun so weit durchgeführt werden, bis diese Abstände genau gleich 1 geworden sind. Wir erhalten so eine störungsfreie Lagerung von 9 Punkten auf einer Kugel (Fig. 24). In dem entsprechenden Graphen haben alle Punkte 4. Grad. Es treten 8 Dreiecke und 3 kongruente sphärische Rhomben auf. Die Winkel der Rhomben seien γ_0, δ_0 . In 3 Punkten (A, B, C) stoßen je 2 Dreiecke mit den Winkeln α_0 und 2 Rhomben mit den Winkeln γ_0 zusammen. In den übrigen 6 Punkten stoßen je 3 Dreiecke und 1 Rhombus mit dem Winkel δ_0 zusammen. Es ist also

$$2\alpha_0 + 2\gamma_0 = 360^\circ$$

$$3\alpha_0 + \delta_0 = 360^\circ.$$

Hieraus läßt sich unter Benutzung der Gleichungen (1), (2), (16) (mit γ_0 statt β_0) die Größe der betreffenden Kugel berechnen. Man erhält:

$$\cos \alpha_0 = \frac{1}{4}; \quad \cos \alpha_0 = \frac{1}{8}; \quad r_0 = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Für den Winkel β_0 des regelmäßigen Vierecks mit der Seite a_0 ergibt sich nach (11)

$$\beta_0 = 120^\circ.$$

Da auf dieser Kugel 9 Punkte ohne Störung Platz haben, gilt für die entsprechenden Größen r, a, α, β der Minimalkugel

$$(19) \quad r \leq \frac{1}{2} \sqrt{3}; \quad \cos a \leq \frac{1}{3}; \quad \cos \alpha \leq \frac{1}{4}; \quad \beta \geq 120^\circ.$$

Es soll im folgenden bewiesen werden, daß die angegebene Figur eine Minimalfigur für $N = 9$ darstellt, daß also bei allen Ungleichungen (19) das Gleichheitszeichen gilt.

§ 13. Hilfssätze für $N = 9$.

Satz 11. Sind auf der Minimalkugel für $N = 9$ in einem Fünfeck mit der Seitenlänge a alle inneren Winkel $\geq \alpha$ und $\leq 180^\circ$, so sind alle Diagonalen $> a^3$.

Beweis: Da die inneren Winkel $\geq \alpha$ sind, ist jede Diagonale $\geq a$. Wäre die Diagonale BE des Fünfecks $ABCDE$ gleich a , so würde das Fünfeck in ein gleichseitiges Dreieck ABE und in ein Viereck $BCDE$ zerfallen. Einer der beiden Viereckswinkel δ, ϵ bei B oder E ist mindestens gleich dem Winkel β des regelmäßigen Vierecks. Dann ist der gesamte innere Winkel an diesem Punkt $\geq \alpha + \beta$. Das verstößt aber gegen die Voraussetzung, da α jedenfalls $> 60^\circ$ und β auf der Minimalkugel nach (19) $\geq 120^\circ$, also $\alpha + \beta > 180^\circ$ ist.

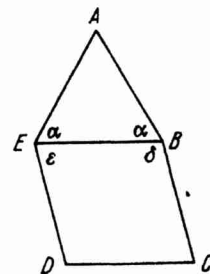


Fig. 25.

Satz 12. Ein irreduzibler Graph von 9 Punkten auf der Minimalkugel enthält nur Dreiecke und Vierecke.

Beweis: Nach Satz 9 können außerdem nur Fünfecke auftreten. $ABCDE$ sei ein Fünfeck eines irreduziblen Graphen. Jeder innere Winkel muß $< 180^\circ$ sein. Wir halten CDE fest und bewegen A, B mit seinen Verbindungen so weit, daß ein möglichst kleiner Flächeninhalt entsteht. Dabei sollen alle inneren Winkel $\leq 180^\circ$ bleiben. Das Minimum liegt, wie HABICHT und v. D. WAERDEN in der früher zitierten Arbeit bewiesen haben, immer am Rand des zulässigen Bereichs. Nach Satz 11 ist es nicht möglich, daß eine Diagonale $\leq a$ wird. Daher tritt die Randlage nur dann ein, wenn einer der inneren Winkel, etwa der bei E , gleich 180° geworden ist. Nun halten wir die gestreckte Seite AED fest und verschieben die übrigen Punkte mit ihren Verbindungen so, daß der Flächeninhalt möglichst klein wird. Das Minimum tritt wiederum bei einer Randlage ein, bei der ein weiterer innerer Winkel gleich 180° ist. Es ergibt sich so ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a und den Schenkeln $2a$. γ sei der Basiswinkel, δ der halbe Scheitelwinkel. Die Winkelsumme φ des ursprünglichen Fünfecks ist durch die Verschiebungen höchstens kleiner geworden. Es gilt also

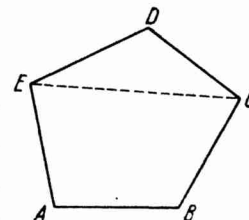


Fig. 26.

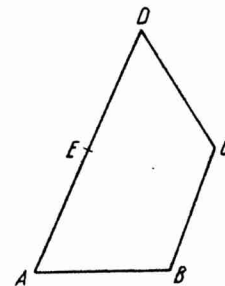


Fig. 27.

$$\varphi \geq 360^\circ + 2\gamma + 2\delta.$$

²⁾ Der Satz läßt sich übrigens auch bis $N = 12$ ausdehnen.

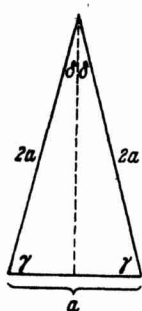


Fig. 28.

Dabei ist

$$\cos \gamma = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} 2\alpha} = 1 - \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{2 \cos \alpha (1 + \cos \alpha)}$$

$$\sin \delta = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}}$$

Für die Minimalkugel ist $\cos \alpha \leq \frac{1}{3}$, also

$$\cos \gamma \leq 1 - \frac{3}{4} - \frac{9}{8} = -\frac{7}{8} \quad \gamma > 151^\circ$$

$$\sin \delta \geq \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad \delta > 66^\circ$$

$$\varphi > 360^\circ + 2(151^\circ + 66^\circ) = 794^\circ.$$

Nach HABICHT und v. D. WAERDEN findet man eine untere Grenze des Flächeninhaltes außerhalb des Fünfecks, indem man die übrigen Polygone des Graphen in Dreiecke zerlegt, jedes n -Eck in $(n-2)$ Dreiecke, und für jedes Dreieck den Flächeninhalt Δ des gleichseitigen Dreiecks mit dem Winkel α rechnet. Bei der Dreieckzerlegung treten außerhalb des Fünfecks 11 Dreiecke auf mit der gesamten Winkelsumme 33α . Nach Abzug der vier Punkte, die außerhalb des Fünfecks liegen, verbleibt für die Außenwinkel des Fünfecks eine Winkelsumme von mindestens

$$33\alpha - 4 \cdot 360^\circ.$$

Daraus folgt

$$\varphi + 33\alpha - 4 \cdot 360^\circ \leq 5 \cdot 360^\circ$$

$$33\alpha \leq 9 \cdot 360^\circ - \varphi < 3240^\circ - 794^\circ = 2446^\circ < 33 \cdot 75^\circ$$

$$\alpha < 75^\circ.$$

Das steht aber im Widerspruch zu der bei der Minimalkugel geltenden Beziehung

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{4}.$$

Es ist also nicht möglich, daß in einem irreduziblen Graphen von 9 Punkten auf der Minimalkugel ein Fünfeck auftritt, da dann die übrigen vier Punkte nicht mehr genügend Platz außerhalb des Fünfecks haben würden.

Somit kommen als irreduzible Graphen für $N = 9$ nur in Betracht:

a) Irreduzible Graphen, in denen nur Dreiecke und Vierecke auftreten. Diese müssen nach Satz 7 alle 9 Punkte enthalten.

b) Irreduzible Graphen, in denen ein Fünfeck auftritt. Diese dürfen nach Satz 12 nicht alle 9 Punkte enthalten.

Hieraus folgt:

Minimalfigur für $N = 9$ ist

a) *entweder ein irreduzibler Graph von 9 Punkten, in dem nur Dreiecke und Vierecke auftreten,*

b) *oder ein irreduzibler Graph mit weniger als 9 Punkten, in dem ein Fünfeck auftritt, ergänzt durch einen oder mehrere Punkte, deren Entfernungen von den Punkten des Graphen > 1 sind.*

Um die möglichen Graphen zu entwickeln, werden noch einige Hilfssätze benötigt.

Satz 13. Zu jedem Dreieck eines irreduziblen Graphen gehört mindestens ein Punkt von höherem als 3. Grade.

Beweis: Hat ein Punkt 2. Grad, so ist der Graph von vornherein reduzibel. Angenommen, alle Eckpunkte eines Dreiecks PQR haben 3. Grad. Es ist zu zeigen, daß der Graph auch dann durch eine kleine Verschiebung der Punkte in nicht zusammenhängende Teile zerlegt werden kann. Die an das Dreieck angrenzenden Strecken seien PA , QB und RC . Wenn die drei von einem Punkt ausgehenden Strecken einem Winkelraum von 180° angehören, so läßt sich der betreffende Punkt wegschieben, d. h. der Graph ist dann reduzibel. Dies möge nirgends der Fall sein. Dann gehen die Verlängerungen von AP und BQ ins Innere des Dreiecks, schneiden sich also in einem Punkt Z im Innern des Dreiecks PQR . Nun erteile man dem Dreieck PQR eine kleine Drehung um Z , und zwar nach rechts oder nach links, je nachdem ob der Strahl ZR rechts oder links von C vorbeigeht. Geht ZR genau durch C , so ist es gleichgültig, ob nach rechts oder nach links gedreht wird. Auf jeden Fall werden alle drei Entfernungen AP , BQ und CR durch die Drehung größer. Die sphärische Entfernung ZA ist nämlich $< 180^\circ$, also ist ZPA vor der Drehung die kürzeste Verbindung von Z mit A , ebenso ZQB von Z mit B , und ebenso ZRC von Z mit C , wenn Z, R, C in einer Geraden liegen. Liegt aber C nicht in der Verlängerung von ZR , so bewegt sich R bei der Drehung in einer Richtung, die nicht tangential zum Kreis durch R um C ist, also bewegt sich R von dem Kreis weg, also wächst CR auch in diesem Fall.

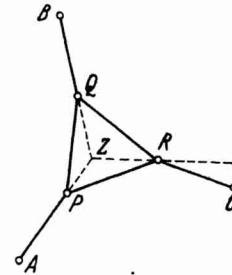


Fig. 29.

Satz 14. Haben zwei Dreiecke eines irreduziblen Graphen eine gemeinsame Seite, so besitzen deren Endpunkte höheren als 3. Grad.

Beweis: Zwei Dreiecke mögen die gemeinsame Seite PQ besitzen. Hätte einer der Punkte P, Q nur 3. Grad, so würden alle von diesem Punkt ausgehenden Strecken in einem Winkelraum von $2\alpha < 180^\circ$ liegen, und der Graph wäre reduzibel.

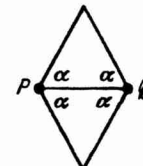


Fig. 30.

Satz 15. Stoßen in einem Punkt P 3. Grades ein Dreieck und zwei Vierecke zusammen, so haben die dem Punkt P gegenüberliegenden Viereckpunkte nicht größeren als 3. Grad.

Beweis: Die Viereckwinkel bei P seien γ und δ . Es gilt

$$\gamma < 2\alpha, \quad \delta < 2\alpha, \quad \alpha + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

Daraus folgt

$$360^\circ - \gamma = \alpha + \delta < 3\alpha$$

$$360^\circ - \delta = \alpha + \gamma < 3\alpha.$$

Die Außenwinkel $360^\circ - \gamma$ und $360^\circ - \delta$ der gegenüberliegenden Viereckpunkte Q, R können also nicht durch zwei Strecken des Graphen unterteilt sein, da sie sonst $\geq 3\alpha$ sein müßten. D. h. Q, R haben nicht größeren als 3. Grad.

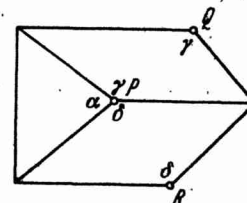


Fig. 31.

Satz 16. In einem irreduziblen Graphen sind zwei nicht benachbarte Fünfeckpunkte nicht mit demselben Punkt verbunden.

Beweis: Ein außerhalb des Fünfecks $ABCDE$ gelegener Punkt P möge mit zwei nicht benachbarten Fünfeckpunkten, etwa mit A und C verbunden sein. Dann bildet das Innere des Fünfecks zusammen mit dem vom Streckenzug $ABCP$ umschlossenen Gebiet eine Umgebung des Punktes B . Im Inneren des Fünfecks liegt definitionsgemäß kein Punkt. Aber auch das von dem Streckenzug $ABCP$ umschlossene Gebiet enthält nach Satz 7 keinen Punkt. Folglich hat B 2. Grad, und der Graph ist daher nicht irreduzibel.

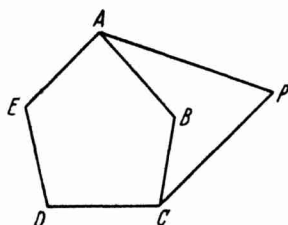


Fig. 32.

Es sei wiederum β der Winkel des regelmäßigen Vierecks mit Seite a . Dann haben wir

Satz 17. Auf der Minimalkugel für $N = 9$ ist $3\alpha + \beta < 360^\circ$.

Beweis: Nach der Abschätzungsformel von FEJES TÓTH gilt für die Minimalkugel

$$\alpha \leq \frac{N}{N-2} \cdot 60^\circ,$$

also im Falle $N = 9$

$$\alpha \leq 77 \frac{1}{7}^\circ.$$

Hiernach erhält man für β (nach der Formel $\cos \beta = 2 \cos \alpha - 1$)

$$\beta < 124^\circ,$$

also

$$3\alpha + \beta < 231 \frac{1}{7}^\circ + 124^\circ < 360^\circ.$$

§ 14. Irreduzible Graphen mit 9 Punkten auf der Minimalkugel für $N = 9$.

Nach § 13 (Satz 12) treten nur Dreiecke und Vierecke auf. Da nach (19) $\alpha > 72^\circ$ ist, gibt es keine Punkte 5. Grades. Die irreduziblen Graphen enthalten also nur Punkte 3. und 4. Grades. In den folgenden Figuren stellt immer $\circ$ einen Punkt 3. Grades und $\bullet$ einen Punkt 4. Grades dar.

Je nachdem, wieviele Dreiecke in einem Punkt zusammenstoßen und unmittelbar aneinandergrenzen, unterscheiden wir drei Fälle:

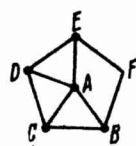


Fig. 33.

I. Fall. In einem Punkt stoßen drei Dreiecke zusammen.

In A mögen die Dreiecke ABC , ACD und ADE zusammenstoßen. Nach Satz 17 ist

$$3\alpha + \beta < 360^\circ, \text{ also } \angle BAE > \beta.$$

Folglich grenzt an A noch ein Viereck $ABFE$, wobei die Winkel ABF und AEF kleiner als β sind. Demnach sind die Außenwinkel CBF und DEF größer als 2α . Die Punkte B und E haben also 4. Grad. Nach Satz 14 haben auch C und D 4. Grad. Es gehen also von B, C, D, E je eine weitere Verbindung aus, von F eine oder zwei weitere Verbindungen (Fig. 34).

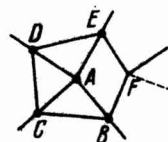


Fig. 34.

Von den Punkten B, C, D, E, F können höchstens zwei benachbarte Punkte mit einem weiteren Punkt verbunden sein.

Beweis: 1. Wären etwa B und D mit einem weiteren Punkt G verbunden, so müßte auch C mit G verbunden sein, da für die freie Verbindung von C

keine andere Möglichkeit bliebe. Dann würden in C vier Dreiecke zusammenstoßen, was nicht möglich ist wegen $4\alpha < 360^\circ$.

2. Wären C und F mit G verbunden, so müßte auch B mit G verbunden sein. Man hätte in A wie in B drei Dreiecke und 1 Viereck, was nicht möglich ist, da das Viereck $ABFE$ nicht regelmäßig sein kann.

3. Wären B und E mit G verbunden, so müßte auch F mit G verbunden sein. An F würden zwei Dreiecke angrenzen, und F hätte 3. Grad entgegen Satz 14.

Für die anderen Fälle gilt aus Symmetriegründen das Entsprechende.

Hat nun F 4. Grad, so können die drei weiteren Punkte G, H, I nur so angeschlossen sein, daß der eine Punkt mit E und F , der zweite mit F und B , der dritte mit C und D verbunden ist. Damit nur Dreiecke und Vierecke entstehen, muß ferner I mit G und H verbunden sein. Durch Vergleich mit den Winkeln bei A geht hervor, daß $\angle GFH$ ein Dreieckswinkel ist. Folglich ist auch GH verbunden. Der so entstandene Graph ist mit dem in § 12 angegebenen (Fig. 24) identisch.

Es bleibt der Fall, daß F 3. Grad hat. Dann dürfen in F nur Vierecke zusammenstoßen (weil sonst die Winkelsumme von 360° nicht erreicht wird). F darf also weder mit B noch mit E einen gemeinsamen Verbindungspunkt haben. Dann sind die drei weiteren Punkte so verbunden, daß B, C und D, E je zu demselben Punkt gehören, während F mit dem 3. Punkt verbunden ist. Damit nur Dreiecke und Vierecke entstehen, müssen G, H, I ein Dreieck bilden. Dann hat I 3. Grad und gehört zu einem Dreieck und zwei Vierecken. Das ist nicht möglich, da dann B und E nach Satz 15 auch 3. Grad haben müßten.

Es ergibt sich also im I. Fall nur der Graph des § 12 (Fig. 24).

II. Fall. Zwei Dreiecke haben eine gemeinsame Seite, und es stoßen nicht drei Dreiecke in einem Punkt zusammen.

An der Strecke AB mögen Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten C, D liegen. Nach Satz 14 haben A und B 4. Grad. Die vierten Verbindungspunkte seien E bzw. F . Nach der Voraussetzung des II. Falles müssen über DAE und CAE Vierecke liegen. Die vierten Eckpunkte seien G und H . (Offenbar sind F, G und H verschiedene Punkte.) E und F können nicht verbunden sein; denn sonst würde $EABF$ einen Streckenzug bilden, der nach Satz 7 ein Gebiet umschließt, in dem kein Punkt liegt. C und D liegen aber zu verschiedenen Seiten dieses Streckenzuges. F kann auch nicht mit C oder D verbunden sein (wegen der Voraussetzung des II. Falles). Folglich kann F außer mit dem letzten Punkt nur noch mit G oder H verbunden sein. Da F mindestens 3. Grad besitzt, muß aber eine Verbindung zwischen F und G oder H bestehen. Aus Symmetriegründen kann angenommen werden, daß F mit G verbunden ist (Fig. 38).

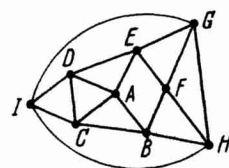


Fig. 35.

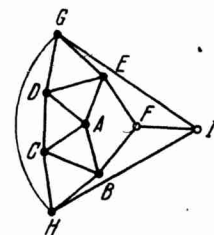


Fig. 36.

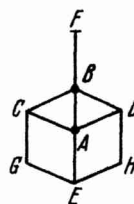


Fig. 37.

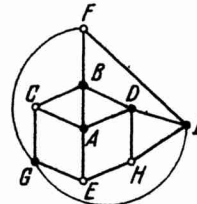


Fig. 38.

Dann hat C 3. Grad. In C stoßen 2 Vierecke und ein Dreieck zusammen. Folglich haben nach Satz 15 auch E und F 3. Grad. Wäre nun F mit H verbunden, so blieben für den letzten Punkt nur die Verbindungen mit G und H , d. h. der Punkt hätte 2. Grad, was gegen die Irreduzibilität des Graphen verstößt. Folglich sind F und H mit dem letzten Punkt I verbunden, und es ist auch D mit F verbunden (damit kein Fünfeck entsteht). Da D 4. Grad hat, darf wegen Satz 15 an E kein Dreieck angrenzen. Folglich sind G und H nicht verbunden. Damit kein Fünfeck entsteht, muß schließlich noch G mit I verbunden sein. Dann hat H 3. Grad, und an H grenzen 2 Vierecke und ein Dreieck, was gegen Satz 15 verstößt, da hiernach A 3. Grad haben müßte.

Im II. Fall ist also kein irreduzibler Graph möglich.

III. Fall. Es gibt ein Dreieck, aber keine gemeinsame Seite zweier Dreiecke.

ABC sei ein Dreieck. Dieses hat nach Satz 13 mindestens einen Punkt 4. Grades, etwa A . Dann liegen über AB und AC Vierecke $ABDE$ und $ACFG$ (Fig. 39).

IIIa) B und C haben 3. Grad.

Dann ist, da über BC ein Viereck liegt, D mit F verbunden (Fig. 40). Nach Satz 15 haben mit B und C auch D und F 3. Grad. Somit bleiben für die

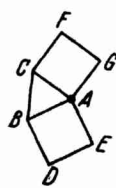


Fig. 39.

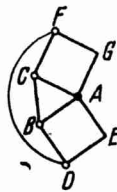


Fig. 40.

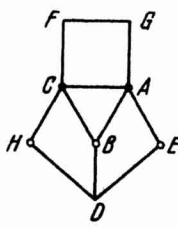


Fig. 41.

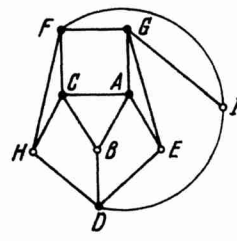


Fig. 42.

letzten beiden Punkte nur Verbindungsmöglichkeiten mit E und G , was für einen irreduziblen Graphen nicht ausreicht.

IIIb) B und C haben verschiedene Grade.

Es kann angenommen werden, daß B 3. Grad und C 4. Grad hat. C sei weiterhin mit H verbunden. Da über BC ein Viereck liegt, ist auch D mit H verbunden (Fig. 41). Nach Satz 15 haben mit B auch E und H 3. Grad.

E ist nicht mit H verbunden, da sonst D 3. Grad hätte und nach Satz 15 auch A und C 3. Grad haben müßten.

E ist nicht mit F verbunden, da sonst G 2. Grad hätte. Ebenso ist nicht H mit G verbunden.

D ist nicht mit F verbunden, da sonst $DHCF$ ein Gebiet umschließen würde, in dem nach Satz 7 kein Punkt liegt, so daß H nur mit F verbunden sein könnte. Dann würden aber an FH zwei Dreiecke grenzen, wobei H 3. Grad hat entgegen Satz 14. Ebenso ist D nicht mit G verbunden.

Es sind also außer Verbindungen mit dem letzten Punkt nur noch Verbindungen zwischen F und H bzw. G und E möglich.

Wären weder HF noch GE verbunden, so müßten E, F, G, H mit dem letzten Punkt I verbunden sein. Dann hätten F und G 3. Grad, und an diese Punkte würden je zwei Vierecke und ein Dreieck angrenzen, was gegen Satz 15

verstößt, da hiernach auch A und C 3. Grad haben müßten. Folglich ist FH oder GE verbunden.

Aus Symmetriegründen kann angenommen werden, daß H mit F verbunden ist (Fig. 42). Hätte F 3. Grad, so würde CFH ein Dreieck mit zwei Eckpunkten 3. Grades bilden. Dann läge (mit anderen Bezeichnungen) der Fall IIIa vor, der bereits als unmöglich erkannt ist. Folglich muß F 4. Grad haben, also F mit I verbunden sein. Da über FH ein Viereck liegt, ist auch I mit D verbunden.

Wäre EG unverbunden, so müßte I mit E und G verbunden sein, und G wäre ein Punkt 3. Grades, an den zwei Vierecke und ein Dreieck stoßen. Das ist nicht möglich, da dann nach Satz 15 C 3. Grad haben müßte. Also ist EG verbunden.

Wäre IG unverbunden, so ergäbe sich derselbe Widerspruch. Also ist auch IG verbunden. Nun kann nicht mehr I und E verbunden sein, da sonst zwei Dreiecke eine gemeinsame Seite besäßen.

Es ergibt sich so ein Graph, der in anderer Form auch gemäß Fig. 43 dargestellt werden kann.

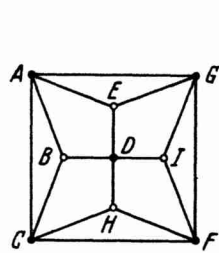


Fig. 43.

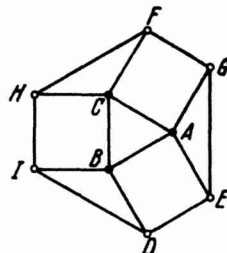


Fig. 44.

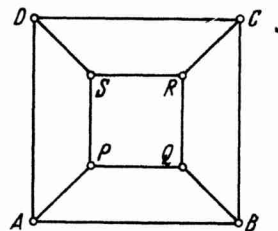


Fig. 45.

IIIc) B und C haben 4. Grad.

Dann liegt über jeder Seite von ABC ein Viereck. Diese seien $ABDE$, $ACFG$ und $BCHI$ (Fig. 44).

Wäre F mit E verbunden, so könnte G nur noch mit E verbunden sein, und G hätte 3. Grad mit angrenzendem Dreieck und zwei angrenzenden Vierecken. Das verstößt gegen Satz 15, da hiernach C 3. Grad haben müßte.

Wäre H mit E verbunden, so bliebe für F nur die Verbindung mit H , was wiederum (mit den Punkten F und A) gegen Satz 15 verstößt.

Aus Symmetriegründen ergibt sich weiterhin, daß nur die Verbindungen EG , DI und FH möglich sind. Dann tritt aber ein Sechseck $DEGFHI$ entgegen Satz 9 auf.

Im Falle III ist also nur der in Fig. 43 angegebene Graph möglich.

IV. Fall. Es treten nur Vierecke auf.

Dann ist die Anzahl K der Strecken gleich $2G$, wenn G die Anzahl der Vierecke ist. Aus der EULERSchen Polyederformel folgt

$$G + 9 = K + 2 = 2G + 2, \text{ also } G = 7, K = 14.$$

Das ist nur möglich, wenn 1 Punkt 4. Grad und 8 Punkte 3. Grad besitzen. Es muß dann mindestens ein Viereck $PQRS$ aus Punkten 3. Grades zusammengesetzt sein (Fig. 45). Die Punkte P, Q, R, S seien ferner der Reihe nach mit

A, B, C, D verbunden. Da nur Vierecke auftreten sollen, müssen A, B, C, D voneinander verschieden und so untereinander verbunden sein, daß $ABCD$ ebenfalls einen geschlossenen Streckenzug bildet. Nach Satz 7 hat nun kein weiterer Punkt ohne Störung Platz. Ein irreduzibler Graph mit 9 Punkten ist also in diesem Falle gar nicht möglich.

Die einzigen irreduziblen Graphen mit 9 Punkten auf der Minimalkugel sind also die in den Fig. 24 und 43 angegebenen.

§ 15. Irreduzible Graphen mit weniger als 9 Punkten.

Wir haben in § 13 schon gesehen, daß ein irreduzibler Graph mit weniger als 9 Punkten auf der Minimalkugel für $N = 9$ ein Fünfeck enthalten muß.

$ABCDE$ sei ein Fünfeck des Graphen. Nach Satz 11 bestehen keine Diagonalverbindungen. Von den Fünfeckpunkten muß mindestens je eine Verbindung zu weiteren Punkten ausgehen (da jeder Punkt mindestens 3. Grad hat). Nach Satz 16 können nur benachbarte Fünfeckpunkte mit dem gleichen Punkt verbunden sein. Folglich muß es mindestens 3 weitere Punkte geben, mit denen die Fünfeckpunkte verbunden sind. Dann enthält der Graph aber bereits 8 Punkte, und es können nicht mehr Punkte in dem Graphen auftreten. Für die Verbindungen zwischen den Fünfeckpunkten und den weiteren Punkten P, Q, R kommen auf Grund des Satzes 16 nur folgende zwei Fälle in Betracht.

I. Ein Fünfeckpunkt (etwa A) ist mit zwei weiteren Punkten P, Q verbunden. Die an A angrenzenden Fünfeckpunkte B und E sind ebenfalls mit P bzw. Q verbunden. Die übrigen Fünfeckpunkte C und D sind mit dem letzten Punkt R verbunden (Fig. 46).

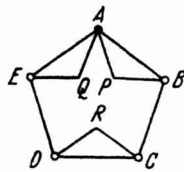


Fig. 46.

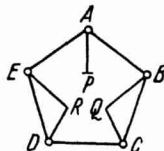


Fig. 47.

II. Ein Punkt P ist nur mit einem Fünfeckpunkt (etwa A) verbunden, während die Punkte Q, R mit je zwei Fünfeckpunkten B, C bzw. D, E verbunden sind (Fig. 47).

Für diese beiden Fälle sind noch die Verbindungsmöglichkeiten zwischen P, Q und R zu untersuchen.

Fall I. Nach Satz 13 hat R 4. Grad, ist also noch mit P und Q verbunden. Gleichgültig, ob P mit Q verbunden ist oder nicht, wir können immer folgendermaßen schließen:

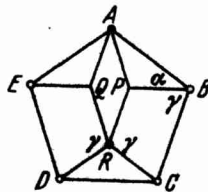


Fig. 48.

Aus $\sphericalangle APR = \sphericalangle AQR$
folgt $\sphericalangle BPR = \sphericalangle EQR$.

Folglich ist auch

$$\sphericalangle PRC = \sphericalangle QRD = \sphericalangle PBC = \gamma.$$

Die Winkelsumme bei R ist somit

$$360^\circ = \alpha + 2\gamma + \sphericalangle PRQ \geq 2\alpha + 2\gamma.$$

Daraus folgt

$$\alpha + \gamma \leq 180^\circ.$$

Es liegen also alle von B ausgehenden Strecken in einem Winkelraum $\leq 180^\circ$. Demnach ist der Graph nicht irreduzibel.

Fall II. Da P mindestens 3. Grad hat, ist P mit Q und R verbunden. Nach Satz 13 haben Q und R 4. Grad, sind also untereinander verbunden. Hiermit ergibt sich (Fig. 49) der einzig mögliche irreduzible Graph mit einem Fünfeck. Soll dieser Graph in einer Minimalfigur für $N = 9$ auftreten, so muß der 9. Punkt im Innern des Fünfecks liegen.

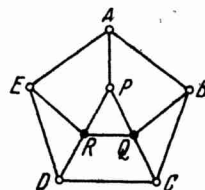


Fig. 49.

§ 16. Die Minimalkugel für $N = 9$.

Nach § 14 und § 15 kommen als Minimalfiguren für $N = 9$ nur folgende Graphen in Betracht:

- Der in § 12 angegebene Graph (Fig. 24).
- Der in § 14 unter III b gefundene Graph (Fig. 43).
- Der in § 15 unter II gefundene Graph (Fig. 49), ergänzt durch einen isolierten Punkt im Fünfeck.

Die beiden letzten Graphen besitzen noch je einen Freiheitsgrad. Die darin auftretenden Winkel lassen sich als Funktionen eines einzigen Winkels angeben. Um die Minimalkugel zu finden, untersuchen wir, ob diese Funktionen *konkav* (mit fallender Ableitung) oder *konvex* (mit wachsender Ableitung) sind. Dazu benötigen wir den

Satz 18. Eine fallende konkave Funktion $\varphi(\psi(\gamma))$ einer konvexen Funktion $\psi(\gamma)$ ist eine konkave Funktion von γ .

Beweis: Ist $\psi(\gamma)$ eine konvexe Funktion, so gilt

$$\frac{d^2 \psi}{d \gamma^2} > 0.$$

φ ist eine fallende konkave Funktion von ψ bei

$$\frac{d \varphi}{d \psi} < 0, \quad \frac{d^2 \varphi}{d \psi^2} < 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{d^2 \varphi}{d \gamma^2} = \frac{d^2 \varphi}{d \psi^2} \cdot \left(\frac{d \psi}{d \gamma} \right)^2 + \frac{d \varphi}{d \psi} \cdot \frac{d^2 \psi}{d \gamma^2} < 0.$$

D. h. $\varphi(\psi(\gamma))$ ist eine konkave Funktion von γ .

In dem Graphen b) sei jetzt Z derjenige Punkt 4. Grades, der mit vier Punkten 3. Grades A, B, C, D in dieser Reihenfolge verbunden ist (Fig. 50). Die übrigen Punkte 4. Grades P, Q, R, S mögen so liegen, daß die vier Dreiecke APS , BPQ , CQR und DRS sind. Der Rhombus $PQRS$ habe bei P und R den Winkel δ , bei Q und S den Winkel δ' . Die anderen an P und R angrenzenden Rhomben haben an diesen Punkten den gleichen Winkel γ . Ebenso haben die anderen an Q und S angrenzenden Rhomben hier den gleichen Winkel ε . Die anderen Winkel der Rhomben mit γ bzw. ε seien γ' bzw. ε' .

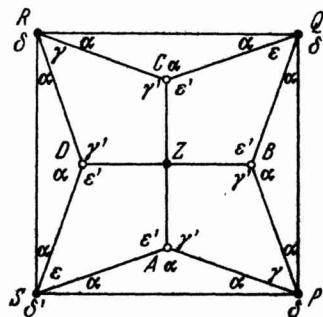


Fig. 50.

Nach Satz 10 ist γ' eine konkave Funktion von γ , ebenso δ' eine konkave Funktion von δ . Da $\delta = 360^\circ - 2\alpha - \gamma$ ist, ist δ' auch eine konkave Funktion von γ . Dann ist $\varepsilon = 360^\circ - 2\alpha - \delta'$ eine konvexe Funktion von γ .

Ferner ist nach Satz 10 ε' eine konkave Funktion von ε , und zwar eine fallende. ε' ist also eine fallende konkave Funktion einer konvexen Funktion $\varepsilon(\gamma)$ und somit nach Satz 18 selbst eine konkave Funktion von γ .

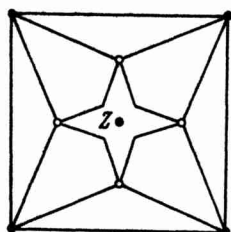


Fig. 51.

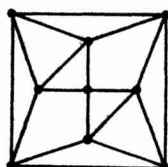


Fig. 52.

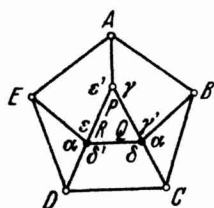


Fig. 53.

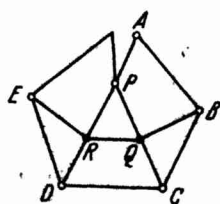


Fig. 54.

Mit γ' und ε' ist auch $\gamma' + \varepsilon'$ eine konkave Funktion von γ . Ihr Minimum liegt am Rande des für γ zulässigen Bereiches. Hat nun γ nicht eine Randlage, so läßt sich also durch eine kleine Veränderung des Winkels γ erreichen, daß die Winkelsumme $\gamma' + \varepsilon'$, die bei A, B, C, D auftritt, vermindert wird. Dadurch spalten sich die von den Punkten 3. Grades nach Z führenden Verbindungen auf und die Ecken der vorher bei Z zusammenstoßenden Rhomben rücken auseinander. Der Punkt Z kann nun zwischen diesen Ecken so untergebracht werden, daß er von allen

übrigen Punkten des Graphen isoliert ist. Daraus folgt: Der Graph ist nur irreduzibel, wenn γ einen zulässigen Extremwert annimmt. Ein solcher liegt nur dann vor, wenn zwischen zwei bisherigen Punkten 3. Grades (etwa A und B) eine zusätzliche Verbindung zu ziehen ist. Dann ist $\gamma' = 2\alpha$, und es ist auch C mit D zu verbinden. Man erhält einen Graphen (Fig. 52), der mit dem Graphen a) identisch ist.

Bei dem Graphen c) seien P, Q, R die nicht zu dem Fünfeck gehörenden Punkte, und zwar sei P der Punkt 3. Grades (Fig. 53). Die Winkel der an das Dreieck PQR angrenzenden Rhomben seien in dieser Reihenfolge $\gamma, \gamma', \delta, \delta', \varepsilon, \varepsilon'$, wobei γ, γ' zu demselben Rhombus gehören, ebenso δ, δ' und $\varepsilon, \varepsilon'$. Dabei mögen γ und ε' die Winkel bei P sein.

Wir halten das Dreieck PQR fest und verändern γ , und zwar so, daß die an PQR angrenzenden Dreiecke und Vierecke als solche bestehen bleiben und sich außer im Punkt P wie vorher aneinanderschließen, während sich evtl. die von P ausgehende Rhombuseite PA aufspaltet.

Es ist nun nach Satz 10 γ' eine konkave Funktion von γ , also $\delta = 360^\circ - 2\alpha - \gamma'$ eine konvexe Funktion von γ . δ' ist eine fallende konkave Funktion von δ , also nach Satz 18 eine konkave Funktion von γ . Dann ist $\varepsilon = 360^\circ - 2\alpha - \delta'$ eine konvexe Funktion von γ . ε' ist eine fallende konkave Funktion von ε , also nach Satz 18 eine konkave Funktion von γ . Dann ist auch $\gamma + \varepsilon'$ eine konkave Funktion von γ .

Die bei P auftretende Winkelsumme $\gamma + \varepsilon'$ nimmt also ihr Minimum nur am Rande des für γ zulässigen Bereiches ein. Hat γ nicht einen zulässigen Extremwert, so kann man durch eine kleine Verschiebung erreichen, daß die Winkelsumme $\gamma + \varepsilon'$ bei P verkleinert wird, daß also die bei P zusammenstoßenden Rhomben hier auseinanderfallen (Fig. 54). Beläßt man nun den Punkt A bei einem dieser Rhomben, etwa bei $APQB$, so fällt

die Verbindung AE fort. Der Punkt A erhält also 2. Grad, und der Graph ist reduzibel. Daraus folgt:

Soll der Graph c) irreduzibel sein, so muß der Winkel γ einen Extremwert

annehmen. Das ist nur dann der Fall, wenn eine zusätzliche Verbindung zwischen zwei bisherigen Punkten 3. Grades besteht, und hierfür kommt nur eine Verbindung zwischen P und B oder E in Betracht. Aus Symmetriegründen kann man sich darauf beschränken, daß P mit B verbunden ist. Es entsteht ein Teilgraph des Graphen a). Dieser legt die Kugel bereits fest, ergibt also dieselbe Kugel wie der Graph a). Ein 9. Punkt S , der mit A, C, D und E verbunden ist, kann hier noch zugefügt werden (Fig. 55).

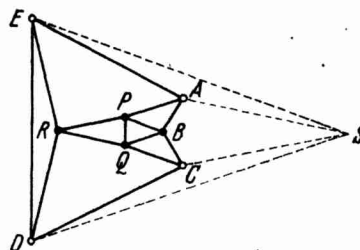


Fig. 55.

Hiermit ist gezeigt, daß die Minimalfigur für $N = 9$ durch den Graphen a) dargestellt wird. Der Radius der Minimalkugel ist also gemäß § 12

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

§ 17. Einige Lagerungen von mehr als 9 Punkten auf der Kugel.

In den Fällen $N > 9$ ist außer für $N = 12$ kein genauer Wert des Minimalkugelradius bekannt. Es lassen sich aber hier einige Graphen angeben, die wahrscheinlich die entsprechenden Minimalfiguren darstellen. Jedenfalls liefern sie für die Radien der Minimalkugeln Abschätzungen nach oben.

Bei der Auswahl der Graphen hat man darauf zu achten, daß die einzelnen Punkte möglichst hohen Grad erhalten, so daß die Punkte möglichst nahe aneinanderrücken und die Kugel möglichst klein gehalten wird.

$N = 10$

Punkte 5. Grades dürfen nicht auftreten, da sonst ein Ikosaeder der Kugel einbeschrieben werden kann und die Kugel sicher nicht minimal ist. Ein Graph, in dem alle Punkte 4. Grad besitzen, ist bei $N = 10$ nicht möglich, wohl aber ein Graph mit 2 Punkten 3. Grades und 8 Punkten 4. Grades.

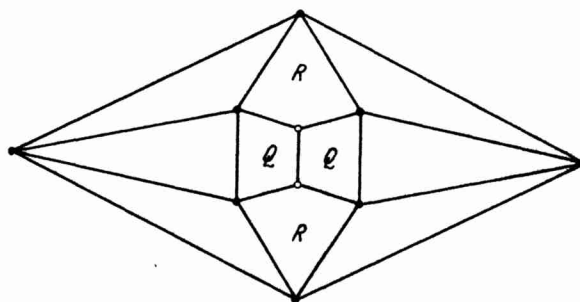


Fig. 56.

Hier treten 6 Dreiecke mit den Winkeln α und 5 Vierecke auf, und zwar 2 regelmäßige Vierecke Q mit den Winkeln β , 2 kongruente Rhomben R mit den Winkeln $360^\circ - 2\beta$, $360^\circ - 2\alpha - \beta$ und ein Rhombus mit den Winkeln $360^\circ - 3\alpha$, $2\beta - 2\alpha$. Der letztgenannte Rhombus bildet in Fig. 56 die äußere Umrandung. Aus den Forderungen, daß einerseits $360^\circ - 2\beta$ und

$360^\circ - 2\alpha - \beta$, andererseits $360^\circ - 3\alpha$ und $2\beta - 2\alpha$ Winkel eines Vierecks bilden sollen, läßt sich die Größe der Kugel berechnen. Man erhält für den Radius r die algebraische Gleichung

$$16r^6 - 44r^4 + 34r^2 - 7 = 0.$$

$N = 11$ und $N = 12$

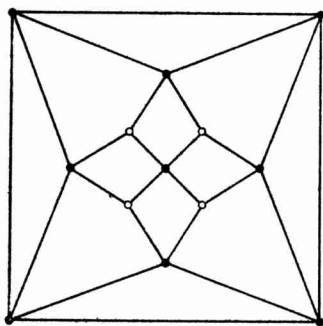


Fig. 57.

Für $N = 12$ ist die dem Ikosaeder der Kantenlänge 1 umbeschriebene Kugel die Minimalkugel. Diese stellt wahrscheinlich auch die Minimalkugel für $N = 11$ dar.

$N = 13$

Mit $N = 13$ wird anscheinend zuerst der Radius 1 überschritten. Eine verhältnismäßig günstige Lagerung von 13 Punkten erhält man, wenn man einen Punkt in den Nordpol legt und die übrigen zu je Vieren zonal anordnet, und zwar symmetrisch und mit möglichst geringen Abständen. Die numerische Auswertung für den Radius des durch Fig. 57 dargestellten Graphen ergibt

$$r = 1,045 \dots$$

$N = 14$

Eine günstige Lagerung von 14 Punkten wird durch einen Graphen angegeben, in dem alle Punkte 4. Grad besitzen. Es treten hier 8 Dreiecke und zwei Gruppen von je 4 Rhomben auf. Bei der einen Gruppe von Rhomben tritt der Winkel 90° auf. Ist γ der andere Winkel dieser Rhomben, so sind die Winkel der zweiten Rhombengruppe

$$\delta = 180^\circ - \alpha \text{ und}$$

$$\varepsilon = 360^\circ - 2\alpha - \gamma.$$

Hierdurch wird die Größe der Kugel festgelegt. In Fig. 58 ist ein 7. Punkt im Unendlichen anzunehmen.

$N = 15$

Man erhält eine günstige Lagerung, wenn man in 5 Zonen je 3 Punkte so anordnet, daß die Punkte einer Zone auf dem gleichen

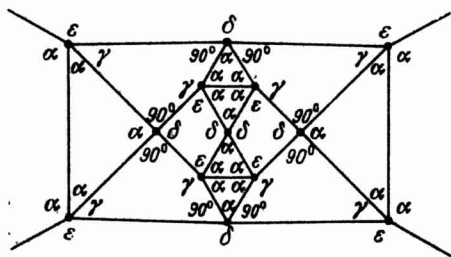


Fig. 58.

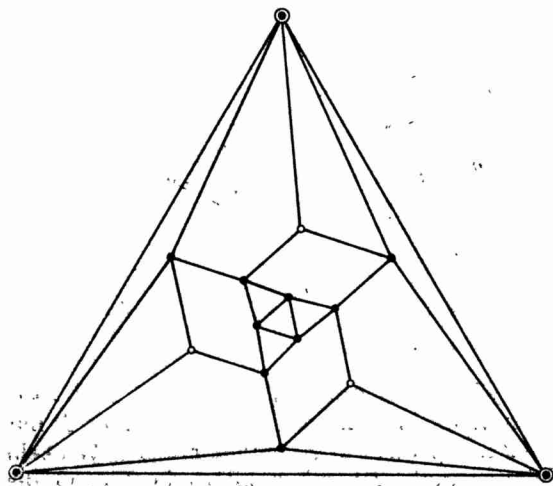


Fig. 59.

Breitenkreis liegen und daß ihre Längengrade jeweils um 120° differieren. Dabei sollen die Punkte der 1. (nördlichsten) und 5. (südlichsten) Zone je ein gleichseitiges Dreieck mit dem Minimalabstand als Seitenlänge bilden. Die 2. und 4. Zone ist so zu wählen, daß hier jeder Punkt von je zwei Punkten der 1. bzw. 5. Zone den Minimalabstand besitzt. Um nun mit einer möglichst kleinen Kugel auszukommen, wird für die 3. Zone nicht der Äquator genommen, sondern eine etwas unsymmetrische Anordnung gewählt. Man hat die nördlichen Punkte (1. und 2. Zone) gegenüber den entsprechenden südlichen Punkten (4. und 5. Zone) in geeigneter Weise um die Polachse zu verdrehen, so daß man die Punkte der 3. Zone so dazwischenlegen kann, daß jeder Punkt der 3. Zone von je einem Punkt der 2., 4. und 5. Zone gerade den Mindestabstand erhält. Der entsprechende Graph ist in Fig. 59 angegeben. Die Punkte der 5. Zone besitzen 5. Grad, die Punkte der 3. Zone 3. Grad, alle übrigen 4. Grad. Durch den Graphen ist die Größe der Kugel eindeutig festgelegt.

$$N = 16$$

Als günstig erweist sich eine zonale Anordnung von je 4 Punkten, bei der alle Punkte 4. Grad besitzen. Hierbei treten 8 Dreiecke und 10 Rhomben auf. Die Kugel wird durch den Graphen der Fig. 60 eindeutig festgelegt.

$$N = 24$$

Eine besonders günstige Anordnung ist die der Fig. 21. Die Figur stellt einen von Archimedes gefundenen halbrekulären Körper dar, begrenzt von 32 Dreiecken und 6 Vierecken. In jeder Ecke stoßen 4 Dreiecke mit dem Winkel α und ein Viereck mit dem Winkel β zusammen; man hat also

$$(20) \quad \beta = 360^\circ - 4\alpha.$$

Aus Fig. 22 entnimmt man ferner

$$(21) \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \cdot \cos \alpha = 1.$$

Aus (20) und (21) erhält man

$$\operatorname{tg}^2 2\alpha \cdot \cos \alpha = 1.$$

Setzt man darin den Wert von $\cos \alpha$ nach (2) ein, so erhält man schließlich

$$(22) \quad \operatorname{tg}^2 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\alpha = 65^\circ 11' 16'' \dots$$

$$\cos \alpha = 0,41965 \dots$$

Für das Quadrat des Kugeldurchmessers erhält man den auffallend kleinen Wert

$$d^2 = 7,223 \dots$$

$$N = 32$$

Setzt man 12 Punkte in die Ecken eines Ikosaeders und 20 Punkte in die Mitten der Dreiecke, so erhält man eine recht günstige Lagerung von 32

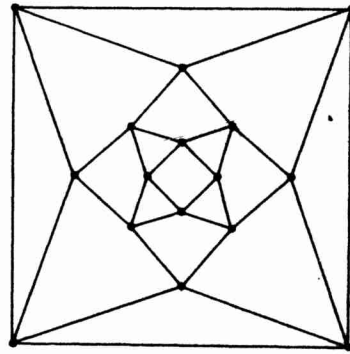


Fig. 60.

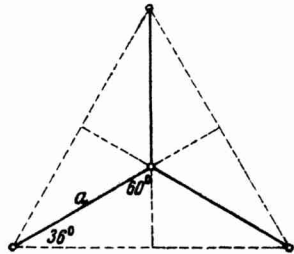


Fig. 61.

Punkten. Die 12 Punkte haben den Grad 5, die 20 Punkte den Grad 3. Der Teil des Graphen, der in einem Dreieck liegt, ist in Fig. 61 dargestellt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck mit Winkeln 36° und 60° und Hypotenuse a entnimmt man

$$\cos a = \cot 60^\circ \cot 36^\circ$$

$$= 0,7947 \dots$$

$$d^2 = \frac{2}{1 - \cos a} = 9,740 \dots$$

§ 18. Tabellarische Übersicht.

In der nachstehenden Übersicht sind die Größen der Minimalkugeln angegeben, die sich aus den untersuchten Graphen ergeben. Als Maß für die Größe der Kugel ist das Quadrat

$$d^2 = 4 r^2$$

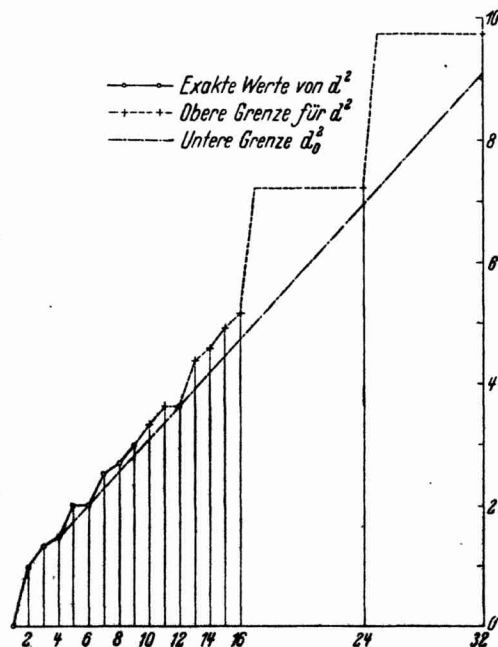
des Durchmessers genommen. Die eingeklammerten Zahlen sind die nur vermuteten Werte. Zum Vergleich sind die entsprechenden Werte $d_0^2 (\leq d^2)$ danebengestellt, die sich aus der Abschätzungsformel von FEJES TÓTH ergeben. Die in der letzten Spalte stehende prozentuale Abweichung

$$p = \frac{d^2 - d_0^2}{d_0^2} \cdot 100\%$$

stellt ein Maß dar für die Dichte der günstigsten Lagerung von N Punkten.

N	d^2	d_0^2	p
2	1	—	—
3	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	0%
4	1,5	1,5	0%
5	2	1,742 ..	15%
6	2	2	0%
7	2,532 ..	2,264 ..	12%
8	2,707 ..	2,532 ..	7%
9	3	2,802 ..	7%
10	(3,358 ..)	3,073 ..	(9%)
11	(3,618 ..)	3,345 ..	(8%)
12	3,618 ..	3,618 ..	0%
13	(4,373 ..)	3,891 ..	(12%)
14	(4,587 ..)	4,165 ..	(11%)
15	(4,909 ..)	4,439 ..	(11%)
16	(5,159 ..)	4,713 ..	(10%)
24	(7,222 ..)	6,911 ..	(5%)
32	(9,740 ..)	9,113 ..	(7%)

Fig. 62.



(Eingegangen am 23. Oktober 1950.)