Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II.

Von

E. Hecke in Hamburg[1]).

Inhaltsverzeichnis.

Teil 2. Die Theorie der Funktionen der Stufe Q.

Der vorliegende Teil gibt die allgemeine Theorie der Modulformen und der Operatoren T_n für die Stufe Q. Die Hauptergebnisse sind

[1]) Der I. Teil der Arbeit findet sich Mathem. Annalen 114 (1937), S. 1—28.

Satz 39 über das Euler-Produkt der Matrizen aus Dirichlet-Reihen, welche den Formen der Stufe Q zugeordnet sind, Satz 42 und die Sätze über die Reduktion dieser Matrizen mit Hilfe der irreduziblen Darstellungen der Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ in § 11. Schon in der ersten Aussage treten an Stelle der einen Matrix bei der Stufe 1 mehrere Matrizen auf; die Modulformen müssen in Teilscharen aufgespalten werden nach den Teilern, welche die Exponenten in ihren Potenzreihen mit der Stufe gemein haben, und nach ihrem Verhalten bei einer (Abelschen) Untergruppe von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$, weil die Definition der Operatoren T_m mit $(m, Q) > 1$ für die einzelnen Scharen verschieden ist. Dieser Umstand macht die ganze Theorie für höhere Stufe Q weniger durchsichtig, so daß mir die gesonderte Durchführung für die 1. Stufe im Teil 1 berechtigt schien, obwohl diese Theorie hier als Spezialfall $Q = 1$ enthalten ist.

Bezeichnungen: In diesem Teile bedeuten k, Q feste natürliche Zahlen, und bei Aussagen über „alle" Formen werden stets nur Formen desselben k, Q in Betracht gezogen. Das Zeichen n soll durchweg eine natürliche Zahl bedeuten, welche zur Stufe Q teilerfremd ist, auch wenn es nicht besonders erwähnt wird.

§ 5.

Die Operatoren T_n für die Stufe Q mit $(n, Q) = 1$.

Zur Übertragung der in § 2 bis 4 entwickelten Begriffe auf Modulformen der Stufe Q soll zunächst der Grad n der zu T_n führenden Transformation zur Stufe Q prim vorausgesetzt werden. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Ist L eine binäre Transformation von ω_1, ω_2 mit rationalen Koeffizienten

$$(1) \quad L(\omega_1, \omega_2) = (a\omega_1 + b\omega_2,\ c\omega_1 + d\omega_2); \quad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc > 0,$$

so werde mit L gleichzeitig der Operator bezeichnet, der jede Form F in

$$F \mid L = F(L(\omega_1, \omega_2))$$

überführt. Die Zusammensetzung zweier solcher Operatoren L_1, L_2 werde isomorph zu der der Substitutionen L_1, L_2 definiert:

$$F \mid L_1 L_2 = (F \mid L_1) \mid L_2 = F(L_1 L_2(\omega_1, \omega_2)).$$

Ferner werde der Operator αL für eine komplexe Zahl α erklärt durch

$$F \mid \alpha L = F \mid L\alpha = \alpha F(L(\omega_1, \omega_2)) = \alpha F \mid L.$$

Die Addition $\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$ soll nicht die Addition der Matrizen bedeuten, sondern der Operator $V = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2$ wird definiert durch

$$F \mid V = F \mid \alpha_1 L_1 + F \mid \alpha_2 L_2 = \alpha_1 F \mid L_1 + \alpha_2 F \mid L_2.$$

Die Operatoren L erzeugen nach diesen Festsetzungen einen **Ring** mit den komplexen Zahlen als Multiplikatoren. Eine Form F heiße **Eigenfunktion eines Operators A aus diesem Ring**, wenn $F \mid A = c \cdot F$ mit einer Konstanten c, dem Multiplikator. Hat die Matrix L aus (1) die Determinante 1 und mod. Q ganze Koeffizienten, so ist für jede Modulform der Stufe Q das Zeichen

$$F([L](\omega_1, \omega_2))$$

eindeutig erklärt, wenn $[L]$ irgend eine Substitution aus $\overline{\Gamma}(1)$ bedeuten soll mit

$$[L] \equiv L \,(\text{mod.}\, Q), \quad [L] \text{ in } \overline{\Gamma}(1).$$

Wir setzen

$$F \mid [L] = F([L](\omega_1, \omega_2)).$$

Endlich führen wir noch spezielle Operatoren ein durch die **Definition**:

$$S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Zur Erklärung des Operators T_n für die Stufe Q gehen wir auf die vollen Repräsentantensysteme von Transformationen der Determinante n aus § 2, Satz 8 zurück:

Satz 31. *Die Transformationen*

$$R_a \cdot \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}, \tag{3}$$

wo a, b, d alle ganzen Zahlen mit $ad = n$, $d > 0$, b mod. d, durchlaufen, bilden ein volles System nach $\overline{\Gamma}(1)$ nicht-äquivalenter ganzzahliger Transformationen mit der Determinante n. Sie sind alle $\equiv S_n$ (mod. Q). Ihre Anzahl ist wieder gleich der Summe der positiven Teiler von n, $= \sigma_1(n)$.

Beweis folgt unmittelbar aus Satz 8 in § 2.

Für eine Form F der Art $(-k, Q)$ ist die Menge der $\sigma_1(n)$ Funktionen

$$F \mid R_a \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

bis auf die Reihenfolge allein durch n und F bestimmt, unabhängig von der speziellen Wahl der Transformationen. Daher definieren wir jetzt für die homogenen Formen der Art $(-k, Q)$ den Operator T_n durch die **Definition**:

$$T_n = n^{k-1} \sum_{\substack{ad = n \\ b \text{ mod. } d \\ d > 0}} R_a \cdot \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}. \tag{4}$$

T_n hängt von k nur durch den Faktor n^k ab, dagegen hängt er wesentlich von Q durch die Zeichen R_a ab. Für die inhomogene Gestalt $F(\tau) = \omega_2^k F(\omega_1, \omega_2)$ verstehen wir unter $F(\tau) \mid T_n$ das Produkt von $F(\omega_1, \omega_2) \mid T_n$ mit ω_2^k.

Satz 32. *Für jede Form F der Art $(-k, Q)$ gehört $F \mid T_n$ wieder zur Stufe Q. Liegt L in $\overline{\Gamma}(1)$, so ist ferner $F \mid T_n L = F \mid [S_n L S_n^{-1}]\, T_n$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Transformationen (3) aus Satz 31 in irgend einer Reihenfolge mit N_h $(h = 1, 2, \ldots, \sigma_1(n))$, alsdann sind $N_h L$ wieder alle Klassen nach $\overline{\Gamma}(1)$, also gibt es zu jedem h ein h' und dazu ein L_h aus $\overline{\Gamma}(1)$, so daß

$$N_h L = L_h \cdot N_{h'} \qquad (L_h \text{ aus } \overline{\Gamma}(1)).$$

Hieraus folgt

$$L_h = N_h \cdot L \cdot N_{h'}^{-1} \equiv S_n L S_n^{-1} \pmod{Q},$$

und

$$L_h = [S_n L S_n^{-1}]$$

ist also mod. Q von h unabhängig. Mithin ist

$$F \mid \sum_h N_h L = \sum_h F \mid L_h \cdot N_{h'} = \sum_h F \mid [S_n L S_n^{-1}]\, N_h = F \mid [S_n L S_n^{-1}]\, T_n.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bei der naturgemäßen Beschränkung auf Formen der Stufe Q ist also für die Operatoren die Relation bewiesen:

$$T_n \cdot L = [S_n L S_n^{-1}] \cdot T_n \text{ für } L \text{ aus } \overline{\Gamma}(1). \tag{5}$$

Insbesondere formulieren wir

Satz 33. *Zwischen T_n, R_a, U bestehen die Beziehungen*

$$T_n \cdot R_a = R_a \cdot T_n, \quad T_n \cdot U^n = U \cdot T_n, \quad R_n U^{n^2} R_n^{-1} = [U] \quad (\text{für } (a, Q) = 1).$$

Wir zeigen jetzt wieder die Vertauschbarkeit aller T_n untereinander und die Reduktion auf T_p von Primzahlordnung p.

Hilfssatz 1. Wenn $(n, m) = 1$ und $(n, Q) = (m, Q) = 1$, so ist

$$T_n \cdot T_m = T_{n \cdot m} = T_m \cdot T_n.$$

Beweis: Wird

$$T_n = n^{k-1} \sum_{a, b, d} R_a \begin{pmatrix} a, & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad T_m = m^{k-1} \sum_{A, B, D} R_A \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

gesetzt, so ist mit Benutzung von Satz 33

$$T_n \cdot T_m = m^{k-1}\, T_n \cdot \sum_{A, B, D} R_A \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix} = m^{k-1} \sum_{A, B, D} R_A \cdot T_n \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Hier ist weiter

$$T_n \cdot \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix} = n^{k-1} \sum_{a, b, d} R_a \cdot \begin{pmatrix} a & bQ \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & BQ \\ 0 & D \end{pmatrix} = n^{k-1} \sum_{a, b, d} R_a \begin{pmatrix} aA & (aB + bD)Q \\ 0 & dD \end{pmatrix}$$

$$T_n \cdot T_m = (nm)^{k-1} \sum_{\substack{A, B, D \\ a, b, d}} R_A\, R_a \begin{pmatrix} aA & (aB + bD)\, Q \\ 0 & dD \end{pmatrix} = T_{n \cdot m},$$

denn $aB + bD$ durchläuft wegen $(a, D) = (d, D) = 1$ ein volles Restsystem mod. $d \cdot D$ bei festem d, D.

Hilfssatz 2: Für eine Potenz p^r der Primzahl p (die nicht in Q aufgeht) ist

$$T(p^r)\cdot T(p) = T(p^{r+1}) + p^{k-1}\cdot R_p\cdot T(p^{r-1}) \qquad (r \geqq 1).$$

Hierbei steht vorübergehend der Deutlichkeit wegen $T(n)$ für T_n.

Beweis:

$$(6) \qquad T(p^r)\cdot T(p) = T(p^r)\cdot p^{k-1} R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + T(p^r)\cdot p^{k-1} \sum_{l \bmod. p} \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$T(p^r) - p^{k-1}\cdot\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{h_s \bmod. p^s \\ 0 \leqq s \leqq r}} R_{p^{r-s+1}} \begin{pmatrix} p^{r-s} & h_s Q \\ 0 & p^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{0 \leqq s \leqq r \\ h_s \bmod. p^s}} R_{p^{r+1-s}} \begin{pmatrix} p^{r+1-s} & h_s Q \\ 0 & p^s \end{pmatrix}$$

$$(7) \qquad = T(p^{r+1}) - p^{(r+1)(k-1)} \sum_{h \bmod. p^{r+1}} \begin{pmatrix} 1 & hQ \\ 0 & p^{r+1} \end{pmatrix}.$$

Ferner ist die zweite Summe rechts in (6)

$$T(p^r)\, p^{k-1} \sum_{l \bmod. p} \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix} = p^{(r+1)(k-1)} \sum_{\substack{0 \leqq s \leqq r \\ h_s \bmod. p^s,\, l \bmod. p}} R_{p^{r-s}} \begin{pmatrix} p^{r-s} & h_s Q \\ 0 & p^s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

$$= p^{(r+1)(k-1)} \sum_{s,\, h_s,\, l} R_{p^{r-s}} \begin{pmatrix} p^{r-s} & (p^{r-s} l + h_s p) Q \\ 0 & p^{s+1} \end{pmatrix}.$$

Für $r - s \geqq 1$ enthalten alle vier Koeffizienten der letzten Matrix den Faktor p, der unter Berücksichtigung der Homogenität der Modulformen als p^{-k} vor die ganze Summe gezogen werden kann. Die Summe über h_s, bei festem s, l wird dann offenbar von l unabhängig, also auch gleich p multipliziert mit der Summe über s, h_s bei $l = 0$; das ist gerade

$$p^{k-1}\cdot R_p\cdot T(p^{r-1}).$$

Schließlich sind die Glieder mit $s = r$ gerade die in (7) mit dem Minuszeichen auftretenden Glieder. Damit ist der Hilfssatz 2 bewiesen.

Hierbei ist R_p ein mit allen $T(p^r)$ vertauschbares Symbol. Nach der Bemerkung beim Beweise von Satz 10 in I, § 2 folgt hieraus aber

$$T(p^r)\cdot T(p^s) = \sum_{0 \leqq u \leqq r,\, s} T(p^{r+s-2u})\cdot p^{u(k-1)}\cdot R_{p^u}$$

und daraus allgemeiner:

Satz 34. *Bei* $(n, Q) = (m, Q) = 1$ *ist*

$$T(n)\cdot T(m) = \sum_{d \mid n,\, m} T\left(\frac{n\,m}{d^2}\right)\cdot d^{k-1}\cdot R_d.$$

Hierbei durchläuft d alle positiven gemeinsamen Teiler von n, m. Insbesondere sind alle $T(n)$ untereinander vertauschbare Operatoren.

Für den Bereich der Modulformen der Art $(-k, Q)$ erzeugen also die T_n zusammen mit den endlich vielen R_d einen kommutativen Ring von Operatoren, der überdies diesen Funktionsbereich auf sich abbildet.

§ 6.

Normierung der Formen der Stufe Q. Formen vom Teiler t und Charakter $\varepsilon(n)$.

Unser Ziel ist, die Formenschar von der Art $(-k, Q)$ in möglichst viele zueinander fremde Teilscharen zu zerlegen, die bei allen Operatoren T_n in sich übergehen, und dann Aussagen über die Koeffizienten der Potenzreihen daraus herzuleiten in Analogie mit den Aussagen im ersten Teil. Während aber dort zunächst die volle Schar den Operatoren T_n unterworfen und erst nachher die Zerfällung diskutiert wurde, ist jetzt, um eine Matrix mit Euler-Produkt zu erhalten, schon vorher eine Zerlegung in gewisse Teilscharen nötig. Der Grund dafür ist die Existenz der Primfaktoren q der Stufenzahl Q: Die Operatoren T_q müssen für die verschiedenen Teilscharen verschieden definiert werden.

Die Spaltung der Gesamtschar in die passenden Teilscharen wird nach dem Verhalten der Formen bei den Substitutionen von $\overline{\Gamma}(1)$ vorgenommen. Der erste Schritt der Zerlegung wird hier in § 6, 7 für beliebige Stufe Q durchgeführt. Dabei hat man nur das Verhalten bei $\overline{\Gamma}_0(Q)$ in Betracht zu ziehen. Genau wie im ersten Teil erhalten wir dann in § 8 und 9 die Matrizen mit dem Euler-Produkt und nehmen in § 10 die — hier nicht so einfache — vollständige Reduktion des Systems der Eisenstein-Reihen vor.

Zur weiteren Zerlegung der Formenschar muß man das Verhalten bei der ganzen Gruppe $\overline{\Gamma}(1)$ berücksichtigen, und dazu ist dann in § 11 ein näheres Eingehen auf die endliche Gruppe $\Gamma(1)/\Gamma(Q)$, vor allem auf ihre einfachen Charaktere erforderlich. Ich führe diese weitere Reduktion in allen Einzelheiten dann in § 12 für Primzahlstufe durch.

Zur Erklärung des ersten Schrittes bedenken wir zunächst, daß die Operatoren L aus $\overline{\Gamma}_0(Q)$ $\left(\text{d. h. } L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ L \text{ aus } \overline{\Gamma}(1),\ c \equiv 0 \ (\text{mod. } Q)\right)$ für die Formen der Stufe Q nur mod. Q in Frage kommen, und diese mod. Q reduzierten Substitutionen eine Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ innerhalb der endlichen Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ bilden. Sie wird durch U und die R_n erzeugt. Die Gruppe der Operatoren aus $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ als Ganzes ist mit allen T_n vertauschbar. Denn es ist

$$T_n \cdot [L] = [S_n L S_n^{-1}] \cdot T_n, \tag{5}$$

und wenn L zu $\overline{\Gamma}_0(Q)$, so gehört $[S_n L S_n^{-1}]$ wieder zu $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$. Durch die Substitutionen aus $\overline{\Gamma}_0(Q)$ wird in der Schar aller Formen von der Art $(-k, Q)$ eine Gruppe linearer homogener Substitutionen induziert, die eine Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ ist. Eine naheliegende Zerlegung ist die Zerfällung dieser Darstellung in ihre irreduziblen Bestandteile und die damit gegebene Spaltung der Formenschar in Teilscharen, die sich bei $\overline{\Gamma}_0(Q)$ nach einer irreduziblen Darstellung der $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ umsetzen. Wir brauchen für unsere Zwecke aber eine etwas weniger feine Einteilung, die wir unmittelbar vornehmen.

An den Potenzreihen ist zunächst zu sehen, daß wir die Erzeugenden der vollen Formenschar so wählen können, daß in ihrer Potenzreihe nur die Exponenten je einer festen Restklasse mod. Q auftreten; das bedeutet, daß die Formen Eigenfunktionen für den Operator U sind. Alle vorkommenden Exponenten in einer solchen Reihe haben mit Q denselben gr. gem. Teiler. Wegen

$$R_n U^{n^2} R_n^{-1} = [U],$$

ist dann auch $F|R_n$ eine Reihe von dieser speziellen Gestalt, mit einer im allgemeinen anderen Restklasse für die Exponenten, aber mit demselben erwähnten Teiler. Wir nennen weiter eine Modulform der Stufe Q **zur Klasse t gehörig** oder **vom Teiler t,** wenn in ihrer Potenzreihe alle vorkommenden Exponenten mit Q denselben größten gemeinsamen Teiler t haben. Das ist gleichbedeutend mit: Sie ist eine Summe von Eigenfunktionen von U, deren Multiplikatoren primitive $\frac{Q}{t}$-te Einheitswurzeln sind Auch wenn F identisch Null, heiße F vom Teiler t.

Eine Modulform der Stufe Q heiße **normiert,** wenn sie Eigenfunktion für alle Operatoren R_n ist. Der Multiplikator $\varepsilon(n)$ bei R_n ist dann notwendig ein Restklassencharakter von n mod. Q, $\varepsilon(n)$ heiße der **Charakter der Form.** Wegen $F \mid R_{-1} = (-1)^k \cdot F$, können nur Charaktere mit $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ auftreten.

Satz 35. *Eine normierte Form geht durch alle T_n, R_n in eine normierte Form vom selben Charakter über. Ebenso geht eine Form der Klasse t durch T_n, R_n wieder in eine Form der Klasse t über.*

Beides folgt sofort aus Satz 33.

Da die R_n eine endliche Abelsche Gruppe bilden, lassen sich die unabhängigen Formen der Klasse t überdies als normiert wählen.

Normierte Formen derselben Klasse, aber von verschiedenem Charakter hängen auf folgende Art zusammen:

Satz 36. *Sei*

$$\omega_2^k F(\omega_1, \omega_2) = F(\tau) = \sum_N a(N) z_Q^{Nt} \qquad \left(\left(N, \frac{Q}{t}\right) = 1\right)$$

die Potenzreihe einer normierten Form vom Teiler t, mit dem Charakter $\varepsilon(n)$. Es bedeute ferner $\chi(n)$ einen Restklassen-Charakter mod. $\frac{Q}{t}$. *Dann ist*

$$\omega_2^k G(\omega_1, \omega_2) = G(\tau) = \sum_N a(N)\chi(N) z_Q^{Nt}$$

wieder eine normierte Form vom selben Teiler t mit dem Charakter $\varepsilon(n)\cdot\chi(n^2)$. Dabei ist wieder gesetzt $z_Q = e^{\frac{2\pi i\tau}{Q}}$.

Beweis: Zunächst ist G wieder von der Art $(-k, Q)$. Denn mit F gehört auch $F|U^l$ für $l = 1, 2, \ldots$ zur Stufe Q, daher auch die Teilreihen der Reihe F, deren Exponenten Nt nur eine feste Restklasse mod. Q durchlaufen, mithin auch die Linearkombination G. G ist offenbar vom Teiler t. Aus

$$G(\tau) = F\Big|\frac{1}{Q}\sum_{l,\,a \bmod. Q} \zeta^{-lta}\chi(a)\,U^l \qquad \left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Q}}\right)$$

folgt dann

$$G\Big|R_n = \frac{1}{Q}F\Big|R_n\cdot\sum_{l,\,a}\zeta^{-lta}\chi(a)\,U^{ln^2} = \varepsilon(n)\,\chi(n^2)\cdot G.$$

Da man von G durch einen analogen Prozeß wieder zu F gelangt, so erhält man durch diese Methode aus der linearen Schar der Formen mit demselben t, $\varepsilon(n)$ auch die volle lineare Schar der Formen vom Teiler t und dem Charakter $\varepsilon(n)\,\chi(n^2)$.

§ 7.

Die Operatoren T_m^t mit $(m, Q) > 1$.

Wir ziehen jetzt gewisse Operatoren W_r heran, erklärt als lineare homogene Substitutionen der ω_1, ω_2 mit der Matrix

$$W_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad (r > 0).$$

Für sie gilt die Grundformel

$$W_r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}W_r^{-1} = \begin{pmatrix} a & br^{-1} \\ cr & d \end{pmatrix}, \tag{8}$$

speziell

$$W_r^{-1}\,U\,W_r = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ist jetzt F eine Modulform der Stufe Q aus der Klasse t, so ist

$$F|U^{t_1} = F \qquad \left(t_1 = \frac{Q}{t}\right), \tag{10}$$

und daraus folgt leicht der

Hilfssatz 1. Wenn F zur Klasse t, so gehört $F|W_q$ noch zur Stufe Q, falls q/t.

Denn in der Tat ist nach (8) $W_q L W_q^{-1}$ ganzzahlig, wenn L zu $\overline{\Gamma}(Q)$, und ist mod. Q kongruent einer Potenz von U^{t_1}.

Hilfssatz 2. Für die Formen der Klasse t sind R_n und W_q vertauschbar, falls q/t.

Denn $W_q R_n W_q^{-1} R_n^{-1}$ ist ganzzahlig und kongruent mod. Q einer Potenz von U^{t_1}.

Hilfssatz 3. Für die Formen der Klasse t sind W_q und T_n vertauschbar, falls q/t.

Zum Beweise darf man sich nach § 5 auf den Fall beschränken, daß $n =$ einer Primzahl p ist, die nicht in Q aufgeht. Nun ist aber

$$T_p \cdot W_q = p^{k-1} \cdot R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot W_q + p^{k-1} \sum_{l \bmod. p} W_p \cdot U^{lQ} \cdot W_q .$$

Hier sind die Bestandteile des ersten Summanden rechts vertauschbar, und die Summe ist nach (9) und Hilfssatz 2

$$= W_p \cdot \sum_l W_q U^{lQq} = W_q \sum_{l \bmod. p} W_p U^{lQq},$$

also

$$W_q T_p = T_p W_q .$$

Hilfssatz 4. Für eine Form F der Klasse t ist $F | W_q U^{lt_1}$ nur von dem Werte l mod. q abhängig, wenn q/t und t_1 der komplementäre Teiler $\frac{Q}{t}$.

Beweis folgt aus der Grundformel (8).

Für Formen F der Klasse t werde jetzt der Operator T_q^t, wo q ein Primfaktor von t ist, durch folgende nach Hilfssatz 4 eindeutige **Definition** erklärt:

$$T_q^t = q^{k-1} \sum_{l \bmod. q} W_q U^{lt_1} \qquad \left(t_1 = \frac{Q}{t}\right). \tag{11}$$

Nach Hilfssatz 1 gehört dann $F | T_q^t$ wieder zur Stufe Q. Für die inhomogene Gestalt $F(\tau)$ soll wieder $F(\tau) | T_q^t$ die Bedeutung des Produktes $F(\omega_1, \omega_2) | T_q^t$ mit ω_2^k haben.

Hilfssatz 5. Für Formen der Klasse t ist T_q^t mit R_n vertauschbar.

Denn nach Hilfssatz 1 und 2 ist der einzelne Summand in $T_q^t R_n$

$$W_q U^{lt_1} R_n = W_q R_n U^{lt_1 n^2} = R_n W_q U^{lt_1 n^2}$$

und nach Hilfssatz 4 also $T_q^t R_n = R_n T_q^t$.

Satz 37. *Jede normierte Form F vom Teiler t geht durch den Operator T_q^t in eine normierte Form vom selben Teiler und vom selben Charakter über. Geht die Primzahl q überdies auch in $\frac{Q}{t}$ auf, so ist $F | T_q^t = 0$.*

Beweis: Nach Hilfssatz 5 ist $F|T_q^t$ wieder normiert und vom selben Charakter wie F. Weiter folgt aus der Potenzreihe für F

$$F(\tau) = \sum_{\left(N, \frac{Q}{t}\right)=1} a(N)\, z_Q^{Nt}$$

$$(12) \qquad F(\tau)|T_q^t = \frac{1}{q} \sum_{l \text{ und } q} F\left(\frac{\tau + l t_1}{q}\right) = \sum_{\left(N q, \frac{Q}{t}\right)=1} a(N q)\, z_Q^{Nt}.$$

Die Summationsbedingung $\left(N q, \frac{Q}{t}\right) = 1$ zeigt, daß $F|T_q^t$ identisch Null ist, wenn q in $\frac{Q}{t}$ aufgeht, und daß im anderen Falle $F|T_q^t$ wieder den Teiler t hat.

Dieser Satz gestattet, Operatoren T_q^t mit gleichem t hintereinander auszuführen. Für zwei Primfaktoren p und q von t (gleich oder nicht) ergibt sich zunächst die Vertauschbarkeit von T_p^t und T_q^t unmittelbar aus der Potenzreihe (12) durch

$$F|T_p \cdot T_q = \sum_N a(N p q)\, z_Q^{Nt} = \frac{1}{p q} \sum_{l \text{ mod. } q p} F\left(\frac{\tau + l t_1}{p q}\right).$$

Und dann geben wir als **Definition:**

Geht jeder Primfaktor der natürlichen Zahl m in t auf, so definieren wir durch Rekursion für jeden Primfaktor q von t

$$T_m^t \cdot T_q^t = T_{m q}^t = (m q)^{k-1} \sum_{l \text{ mod. } m q} W_{m q}\, U^{l t_1}.$$

Hilfssatz 6. Alle diese Operatoren T_m^t mit gleichem t sind untereinander und mit allen T_n vertauschbar.

Denn nach Hilfssatz 3 ist zunächst für die Primteiler q von t: $T_n W_q = W_q T_n$ und nach Satz 33 (§ 5) also

$$T_n \cdot W_q \cdot U^{n l t_1} = W_q \cdot T_n \cdot U^{n l t_1} = W_q \cdot U^{l t_1} \cdot T_n.$$

Durch Summation nach l folgt wegen $(n, Q) = 1$

$$T_n \cdot T_q^t = T_q^t \cdot T_n$$

und daraus die Behauptung.

Endlich werde T_m^t für eine beliebige zu $\frac{Q}{t}$ teilerfremde natürliche Zahl m **definiert:** Es sei n der größte zu Q prime Faktor von m und

$$m = n \cdot r, \quad \left(m, \frac{Q}{t}\right) = (n, Q) = 1.$$

r enthält also keine anderen Primfaktoren als t. Dann setze man

$$(13) \qquad T_m^t = T_n \cdot T_r^t = T_r^t \cdot T_n; \quad (\text{also } T_m^1 = T_m = T_n; \quad T_n^t = T_n).$$

Ein Analogieschluß nach Teil I läßt vermuten, daß zur Untersuchung der Formen vom Teiler t nur die Operatoren T_m^t gebraucht werden, wo m

zu $\frac{Q}{t}$ prim ist. Das ist in der Tat richtig. Man könnte den Operator T_q^t durch (11) auch für Primteiler q von Q definieren, die nicht in t aufgehen. Dann würde $F|T_q^t = 0$ sein. Indessen brauchen wir eben nur solche Primfaktoren von Q, welche nicht in $\frac{Q}{t}$, also in t aufgehen.

Als Schlußresultat formulieren wir zusammenfassend:

Satz 38. *Es sei t ein Teiler von Q, $t \cdot t_1 = Q$, $(m, t_1) = 1$ und wie eben $m = n r$, dann gilt:*

1. *Die Operatoren T_m^t mit gleichem t sind untereinander und mit allen R_n vertauschbar. Sie sind erklärt für alle Formen vom Teiler t.*

2. *Die Schar der normierten Formen mit dem Charakter $\varepsilon(n)$ und dem Teiler t geht durch alle T_m^t in sich über.*

3. *Die Operatoren $T_m^t = T^t(m)$ für die Formen unter 2. erfüllen die Regel:*

$$T^t(m_1) \cdot T^t(m_2) = \sum_{d \mid m_1, m_2} T^t\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) \varepsilon(d)\, d^{k-1}. \tag{14}$$

Hierbei ist der Wert des Charakters $\varepsilon(d)$ wie üblich gleich 0 gesetzt, wenn d mit dem Modul Q nicht teilerfremd ist.

4. *Die Bedeutung von T_m^t für eine Form unter 2. ist*

$$F(\omega_1, \omega_2)|T_m^t = m^{k-1} \sum_{\substack{a d = n \\ b \bmod. d \\ l \bmod. r}} \varepsilon(a) F\left(\begin{pmatrix} a & b Q \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l t_1 \\ 0 & r \end{pmatrix} \omega_1, \omega_2\right)$$

und nach Multiplikation mit ω_2^k für die inhomogenen Funktionen

$$F(\tau)|T_m^t = \frac{n^{k-1}}{r} \sum_{a, b, d, l} \varepsilon(a) F\left(\frac{a\tau + a l t_1 + b Q r}{r d}\right) d^{-k},$$

wofür wir endlich kürzer unter Beachtung der Festsetzung bei 3. schreiben

$$F(\tau)|T_m^t = m^{k-1} \sum_{\substack{a d = m \\ b \bmod. d \\ d > 0}} \varepsilon(a) F\left(\frac{a\tau + b t_1}{d}\right) d^{-k}. \tag{15}$$

Denn $a l + b t' r$ durchläuft bei festem r, d ein volles Restsystem mod. $r d$.

§ 8.

Der Matrizenring der $\lambda(m)$ und das Euler-Produkt für die Formen von festem Teiler und Charakter.

Nunmehr läßt sich die im 1. Teil für die Stufe 1 entwickelte Theorie auch für die Stufe Q ohne Schwierigkeit übertragen. Beim Beweise des Hauptsatzes werden die Formen vom festen Teiler t getrennt von den übrigen behandelt, und der folgende Beweis verläuft daher für den Fall

$t = 1$ auch nur unter Benutzung der T_n aus § 5, ohne die §§ 6 und 7 heranzuziehen. Die Kenntnis dieses Umstandes ist zur ersten Orientierung nützlich.

Das volle System linear unabhängiger Modulformen der Art $(-k, Q)$ denken wir uns in der Normalgestalt nach § 6 gegeben: jedes Individuum normiert und zu einem bestimmten Teiler gehörig. Es sei für eine Klasse t und einen Charakter $\varepsilon(n)$: $F^\varrho(\tau)$ $(\varrho = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ das volle Formensystem und es seien

$$F^\varrho(\tau) = \sum_{\left(N, \frac{Q}{t}\right)=1} a^\varrho(N) z_Q^{Nt}$$

die Potenzreihen. Der Summationsbuchstabe N durchläuft in diesem Paragraphen immer nur die zu $\frac{Q}{t}$ teilerfremden Zahlen $\geqq 0$. Nach (15) ist dann bei $\left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1$

$$F^\varrho(\tau) | T_m^t = m^{k-1} \sum_{N; d | m} a^\varrho(N d) \varepsilon(a) d^{1-k} z_Q^{N a t}$$

$$= \sum_{d | m, N} a^\varrho\left(\frac{N m}{d^2}\right) \varepsilon(d) z_Q^{N t} \cdot d^{k-1} = \sum_N b_m^\varrho(N) z_Q^{N t}$$

$$(16) \quad b_m^\varrho(N) = \sum_{d | m, N} a^\varrho\left(\frac{N m}{d^2}\right) \varepsilon(d) d^{k-1}; \quad \left(m, \frac{Q}{t}\right) = \left(N, \frac{Q}{t}\right) = 1, \quad m \geqq 1.$$

Andererseits wird die Schar der $F^\varrho(\tau)$ durch die Operatoren T_m^t nach Satz 36 und 38 in sich übergeführt; es gibt also eine von τ unabhängige Matrix $\lambda(m)$ des Grades $\varkappa$ mit den Elementen $\lambda_{\varrho\sigma}(m)$ $(\varrho, \sigma = 1, \ldots, \varkappa)$, so daß

$$F^\varrho | T_m^t = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(m) F^\sigma,$$

also nach (16)

$$\sum_{d | m, N} a^\varrho\left(\frac{N m}{d^2}\right) \varepsilon(d) d^{k-1} = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(m) a^\sigma(N).$$

Hier ist wie im 1. Teil, § 3,

$$(17) \qquad \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(m) a^\sigma(N) = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(N) a^\sigma(m)$$

und mit $N = 1$

$$a^\varrho(m) = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(m) a^\sigma(1) \qquad m \geqq 1.$$

Aus (17) folgt wie früher die Existenz von $\varkappa$ konstanten Matrizen

$$\mathsf{B}^\nu = (b_{\varrho\sigma}^\nu)$$

mit

$$\lambda(m) = \sum_{\nu} a^{\nu}(m)\,\mathsf{B}^{\nu} \qquad m \geqq 1. \tag{18}$$

Diese Gleichung soll auch für $m = 0$ gelten und dient zur Definition der Matrix $\lambda(0)$, falls $m = 0$ mit der Bedingung $\left(m, \frac{Q}{t}\right) = 1$ verträglich ist, d. h. nur für $t = Q$. Sonst sei

$$\lambda(0) = 0 \text{ für } t < Q \text{ und } \lambda(m) = 0, \text{ wenn } \left(m, \frac{Q}{t}\right) > 1.$$

Die $\varkappa^2$ Funktionen

$$f_{\varrho\sigma}(\tau) = \lambda_{\varrho\sigma}(0) + \sum_{m \geqq 1} \lambda_{\varrho\sigma}(m)\, z_Q^{mt}$$

sind dann linear äquivalent mit den $\varkappa$ Funktionen $F^{\varrho}(\tau)$. Die Kompositionsregel der T_m^t nach (14) geht in die entsprechende für die Matrizen $\lambda(m)$ über:

$$\lambda(m_1)\cdot\lambda(m_2) = \sum_{d \mid m_1,\, m_2} \lambda\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\right)\cdot \varepsilon(d)\cdot d^{k-1}. \tag{19}$$

Die Matrix aus Dirichlet-Reihen (absolut konvergent für $\Re(s) > k$)

$$\Phi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)\,(t\,m)^{-s}$$

hat dann eine Eulersche Produktentwicklung. Hier sind aber die Primfaktoren von Q für sich zu behandeln:

Geht die Primzahl p nicht in Q auf, so ist nach I, § 3, Satz 14

$$\Psi_p(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(p^r)\,p^{-rs} = (\mathsf{E} - \lambda(p)\cdot p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\cdot \mathsf{E})^{-1}.$$

Ist dagegen q ein Primteiler von t, der nicht in $\frac{Q}{t}$ aufgeht, so ist

$$\lambda(q^{r+1}) = \lambda(q^r)\cdot\lambda(q) = \lambda(q)^{r+1} \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

und daher

$$\Psi_q(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda(q^r)\,q^{-rs} = (\mathsf{E} - \lambda(q)\,q^{-s})^{-1}.$$

Und damit schließlich

$$\Phi(s) = t^{-s} \prod_{q \mid t} (\mathsf{E} - \lambda(q)\,q^{-s})^{-1} \cdot \prod_{(p),\, Q=1} (\mathsf{E} - \lambda(p)\cdot p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1} \tag{20}$$

p, q durchlaufen die Primzahlen mit den angegebenen Bedingungen[2]). Für (20) können wir offenbar auch das Produkt über alle Primzahlen p schreiben:

$$\Phi(s) = t^{-s} \prod_{p} (\mathsf{E} - \lambda(p)\,p^{-s} + \varepsilon(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1}. \tag{20a}$$

---

[2]) $\lambda(q)$ ist 0, wenn q in $\frac{Q}{t}$ aufgeht, und $\varepsilon(p) = 0$, wenn p in Q aufgeht.

Damit ist der zu I, Satz 15 analoge Hauptsatz bewiesen:

Satz 39. *Das volle System von Modulformen der Art* $(-k, Q)$ *vom Teiler* t, *die bei* R_n *denselben Faktor* $\varepsilon(n)$ *annehmen, sei* $F^\varrho(\tau)$ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$ *Es gibt dazu* $\varkappa$ *konstante Matrizen* B^ν *des Grades* $\varkappa$, *welche die Basis eines kommutativen Ringes vom Range* $\varkappa$ *bilden, derart, daß die Dirichlet-Reihen*

$$\varphi^\varrho(s) = \sum_{m \geqq 1} a^\varrho(m)(mt)^{-s}$$

zu

$$F^\varrho(\tau) = \sum_{m \geqq 0} a^\varrho(m) z_Q^{mt}$$

die Matrix

$$\Phi(s) = \sum_\nu \varphi^\nu(s)\mathsf{B}^\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)(mt)^{-s}$$

mit der Eulerschen Produktentwicklung (20) *zusammensetzen.*

Ebenso wie für die Stufe 1 im ersten Teil (Satz 17 und 19 in § 3) ergibt sich hier, daß die B^ν die Symmetrie-Eigenschaft $b^\nu_{\varrho o} = b^\sigma_{\varrho\nu}$ haben und daß der Ring der Matrizen B^ν maximal ist.

Der Satz 39 gilt sinngemäß auch für jede Teilschar der Formen von festem Teiler t und Charakter, welche durch alle Operatoren T^t_m in sich übergeht.

§ 9.

Die charakteristischen Wurzeln der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$. Unmöglichkeit anderer Euler-Produkte für Dirichlet-Reihen der Schar.

Wir verstehen wieder unter einer **Eigenfunktion des Operatorenringes** der T^t_m eine normierte Form der Art $(-k, Q)$ vom Teiler t, welche durch alle T^t_m bis auf einen konstanten Faktor in sich übergeht. Dabei ist nun folgendes zu beachten: Ist Q_1 ein Teiler von Q, aber $< Q$, so ist jede Form der Art $(-k, Q_1)$ auch von der Art $(-k, Q)$, aber als Form der Stufe Q betrachtet, hat sie eine andere Dirichlet-Reihe und einen anderen Teiler, und wenn sie Eigenfunktion auf der Stufe Q_1 ist, ist sie im allgemeinen nicht mehr Eigenfunktion auf der Stufe Q. Das sieht man etwa für $Q_1 = 1$: Eine Form erster Stufe hat auf der Stufe Q den Teiler Q, weil ihre Potenzreihe jetzt in z_Q und nicht mehr in z_1 anzusetzen ist. Bleibt sie durch den Operator T_Q der ersten Stufe bis auf einen Faktor invariant, so folgt daraus nicht die Invarianz bei dem ganz anders definierten Operator T^Q_Q, der dann auf der Stufe Q heranzuziehen ist.

Für die Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ des vorigen Paragraphen lassen sich nun wieder durch geeignete Wahl der erzeugenden Funktionen F^ϱ innerhalb ihrer

linearen Schar gewisse einfachere Normalformen erreichen. Vor allem ergibt sich durch Reduktion auf Dreiecksgestalt:

Satz 40. *Die charakteristischen Wurzeln jeder Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *aus* § 8 *gehören der Schar der* F^{ϱ} *selbst an. Jede dieser Wurzeln ist Eigenfunktion des Operatoren-Ringes. Ihre Dirichlet-Reihe hat eine Eulersche Produktentwicklung von der Gestalt* (20), *wo die* $\lambda(m)$ *durch Matrizen ersten Grades zu ersetzen sind.*

Um eine Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, behandeln wir gleich die viel allgemeinere Frage, welche Art von Euler-Produkten überhaupt bei Dirichlet-Reihen zu Modulformen möglich ist. Es wird sich das bemerkenswerte Resultat ergeben, daß keine einzige dieser Dirichlet-Reihen eine wesentlich andere Art von Eulerscher Produkt-Entwicklung aufweisen kann als die charakteristischen Wurzeln der Matrizen $\Phi(s)$.

Dieses Ergebnis beruht auf folgendem allgemeinen Satz über Modulformen:

Satz 41. *Wenn eine Modulform der Art* $(-k, Q)$ *durch eine primitive Transformation* L *von der Ordnung* n (>1) *wieder in eine Form der Stufe* Q *übergeht, und* $(n, Q) = 1$, *so ist die Form* F *identisch Null.*

Dabei heißt wie üblich $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ primitiv, wenn a, b, c, d ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, und $ad - bc = n$ heißt die Ordnung.

Zum Beweise bedenken wir, daß man bekanntlich jede primitive Transformation der Ordnung n aus einer beliebigen von ihnen, z. B. $S_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, in der Gestalt $A S_n B$, wo A und B zu $\overline{\Gamma}(1)$, erzeugen kann; wir dürfen daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich voraussetzen, daß $L = S_n$. Ist nun $F|S_n$ wieder zur Stufe Q gehörig, so ist

$$F|S_n U^{Q} = F|S_n; \; F|S_n U^{Q} S_n^{-1} = F; \; F\left|\begin{pmatrix} n & Q \\ 0 & n \end{pmatrix}\right. = n^k \cdot F.$$

Die Potenzen dieser letzten Transformation sind nicht primitiv, deshalb wählen wir

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \text{ aus } \overline{\Gamma}(Q) \text{ mit } 1 \equiv a_1 \equiv c_1 \pmod{n},$$

und mit

$$V = A \cdot \begin{pmatrix} n & Q \\ 0 & n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & Q \\ 0 & Q \end{pmatrix} \pmod{n}$$

ist dann auch

$$F|V = n^k \cdot F,$$

während alle Potenzen V^l jetzt primitiv sind. Mit passendem B, C aus $\overline{\Gamma}(1)$ ist daher $V^l = B S_n^{2l} C$, und wenn endlich $n^l \equiv 1 \pmod{Q}$ genommen wird,

ist V^l kongruent der Identität E (mod. Q), also auch $BC \equiv E$ (mod. Q). Das bedeutet aber: $F|B$ ändert sich bei S_n^{2l} nur um den Faktor n^{kl} und muß also offenbar identisch verschwinden.

Zwei Folgerungen heben wir besonders hervor: Es sei $F(\tau) = \sum_m a(m) z_Q^m$ eine Form der Art $(-k, Q)$. Dann gilt

Hilfssatz 1. Wenn für eine feste Primzahl p, welche kein Teiler der Stufe Q ist, stets $a(m) = 0$, sobald m nicht durch p teilbar ist, so ist die Form F identisch Null.

Denn in diesem Falle ist $F\left(\tau + \frac{Q}{p}\right) = F(\tau)$ und da die Transformation $\begin{pmatrix} p & Q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ primitiv ist, so ist Satz 42 anwendbar.

Ein erwähnenswertes Gegenstück ist

Hilfssatz 2. Wenn für eine Primzahl p, die kein Teiler der Stufe Q ist, stets $a(m) = 0$, sobald m durch p teilbar, so ist die Form F identisch Null.

Denn nach Satz 32, § 5, ist

$$F|T_p = p^{k-1} F|R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p^{k-1} \sum_{l \bmod. p} F|\begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}$$

eine Form der Stufe Q. Hier ist aber die Summe über l wegen der Voraussetzung identisch Null, und daher ist bereits $F|R_p \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zur Stufe Q gehörig, muß also nach Satz 41 verschwinden.

Um mit diesen Sätzen die oben gestellte Frage nach den möglichen Euler-Produkten übersichtlich erledigen zu können, führen wir folgende Bezeichnung ein: Wenn die Koeffizienten einer Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s) = \sum_m a(m)\, m^{-s} \tag{21}$$

für eine gewisse Primzahl p die Eigenschaft haben:

$$a(m p^r) = a(m) \cdot c(p^r), \text{ wenn } (m, p) = 1,\ r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

wobei $c(p^r)$ von m unabhängig ist, so sagen wir, $\varphi(s)$ ist ein **Euler-Produkt bezüglich der Primzahl p.** Aus (22) folgt ja im Gebiete absoluter Konvergenz die Produkt-Darstellung

$$\varphi(s) = \sum_{(m,p)=1} a(m)\, m^{-s} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c(p^r)\, p^{-rs}.$$

Der zweite Faktor rechts mag der **p-Bestandteil** heißen. Es gilt dann der folgende wichtige Satz:

Satz 42. *Die Primzahl p gehe nicht in Q auf. Damit die Dirichlet-Reihe* (21) *einer Modulform F von der Art $(-k, Q)$ ein Euler-Produkt be-*

züglich der Primzahl p ist, ist notwendig und hinreichend, daß $F(\omega_1, \omega_2)$ Eigenfunktion für die beiden Operatoren R_p und T_p ist, also

$$F \mid R_p = \varepsilon \cdot F, \quad F \mid T_p = \alpha \cdot F$$

mit konstantem ε, α. Der p-Bestandteil ist dann notwendig

$$\sum_{r=0}^{\infty} c(p^r)\, p^{-rs} = \frac{1}{1 - \alpha p^{-s} + \varepsilon p^{k-1-2s}}. \tag{23}$$

Beweis: Daß die Bedingung hinreichend ist, ergibt sich sogleich auf dem früheren Wege. Denn nach den Grundformeln (16) folgt aus (22)

$$\begin{aligned} &a(m\,p) = \alpha \cdot a(m), \\ &a(m\,p^{r+1}) + \varepsilon\, a(m\,p^{r-1})\, p^{k-1} = \alpha \cdot a(m\,p^r), \quad r \geqq 1 \end{aligned} \qquad (m, p) = 1.$$

Vollständige Induktion nach r zeigt, daß eine Zerlegung

$$a(m\,p^r) = a(m) \cdot c(p^r) \quad r = 0, 1, 2, \ldots, (m, p) = 1$$

gilt. Nach Hilfssatz 1 ist $a(m)$ nicht immer Null für $(m, p) = 1$, daher aus (22)

$$\begin{gathered} c(p) = \alpha, \; c(1) = 1, \\ c(p) \cdot c(p^r) = c(p^{r+1}) + \varepsilon \cdot p^{k-1} c(p^{r-1}), \quad r \geqq 1, \end{gathered}$$

was mit (23) gleichbedeutend ist.

Um die tiefer liegende Tatsache zu erkennen, daß die Bedingungen notwendig sind, bilde man zunächst die Form der Stufe Q

$$F \mid T_p = p^{k-1} G \left| \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + p^{k-1} \sum_{l \bmod. p} F \right| \begin{pmatrix} 1 & lQ \\ 0 & p \end{pmatrix}, \tag{24}$$

worin $G(\omega_1, \omega_2)$ die Form $G = F \mid R_p$ der Stufe Q bedeutet. Die Potenzreihe für die Summe über l in (24) ist

$$\frac{1}{p} \sum_l F\left(\frac{\tau + lQ}{p}\right) = \sum_m a(m\,p)\, z_Q^m.$$

Wegen $a(m\,p) = a(m) \cdot c(p)$ ist also

$$\frac{1}{p} \sum_l F\left(\frac{\tau + lQ}{p}\right) - c(p)\, F(\tau) = \sum_m \big(a(m\,p) - c(p)\, a(m)\big)\, z_Q^m$$

eine Potenzreihe in z_Q, deren sämtliche Exponenten durch p teilbar sind, ebenso wie bei $G(p\,\tau)$. Mithin ist nach Hilfssatz 1

$$F \mid T_p - c(p) \cdot F = 0$$

als Form der Stufe Q. F ist also Eigenfunktion von T_p.

Weiter folgt aber aus

$$p^{k-1} G(\tau) \left| \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = c(p) \cdot F(\tau) - \frac{1}{p} \sum_l F\left(\frac{\tau + lQ}{p}\right) = \sum_m \big(c(p)\, a(m) - a(m\,p)\big)\, z_Q^m, \right.$$

daß wegen $a(m\,p^2) = a(m) \cdot c(p^2)$ in der Reihe für

$$p^{k-1} G(p\,\tau) - \big(c(p)^2 - c(p^2)\big)\, F(p\,\tau) \tag{25}$$

alle Exponenten sogar durch p^2 teilbar sind. Schreibt man hier $\frac{\tau}{p}$ an Stelle von τ, so ist wieder nach Hilfssatz 1 die entstehende Reihe identisch Null und wegen der Bedeutung von G

$$F \mid R_p = \varepsilon \cdot F$$

mit

$$\varepsilon = \frac{c(p)^2 - c(p^2)}{p^{k-1}},$$

und F ist also auch Eigenfunktion von R_p, womit alles bewiesen ist.

Ein analoger Satz gilt mit trivialen Abänderungen im Beweis auch, wenn man als Koeffizienten der Reihen nicht Zahlen $a(m)$, sondern kommutative Matrizen zuläßt.

Für Euler-Produkte bezüglich einer Primzahl q, welche in der Stufe aufgeht, besteht ein ebensolcher Satz nicht, wie sich aus den nachher vorkommenden Beispielen bei den Eisenstein-Reihen ergibt. Die q-Bestandteile solcher Dirichlet-Reihen können auch noch andere Gestalt haben als in den Matrizen $\Phi(s)$.

Jedoch ergibt sich als Umkehrung von Satz 40

Satz 40a. *Damit eine Modulform charakteristische Wurzel einer Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *ist, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Dirichlet-Reihe ein Euler-Produkt von der Form* (20) *ist, oder auch, daß sie Eigenfunktion des Operatoren-Ringes der* R_n, T_m^t *mit passend gewähltem* t *ist.*

§ 10.

Das System der Eisenstein-Reihen und der Spitzenformen. Beispiel für nicht-voll-reduzible Systeme.

Wenn es vom Teiler t und einem Charakter $\varepsilon(n)$ Formen gibt, die nicht in allen Spitzen verschwinden, so zerfällt wie bei der Stufe eins das System dieser Formen in zwei Teilscharen, die Spitzenformen und die Eisenstein-Reihen. Denn zunächst besteht das System aller Formen der gleichen Art $(-k, Q)$ aus der Schar der Eisenstein-Reihen und den Spitzenformen. Jede dieser Teilscharen geht ferner durch alle Substitutionen aus $\overline{\Gamma}(1)$ in sich über. Durch Anwendung von U und R_n kann man daher aus beiden Systemen je die Schar der Formen vom Teiler t und dem Charakter $\varepsilon(n)$ isolieren.

Bezeichnen wir nun mit $E(t, \varepsilon, Q)$ bzw. $S(t, \varepsilon, Q)$ die lineare Schar der Eisenstein-Reihen und Spitzenformen der Stufe Q, vom Teiler t und Charakter $\varepsilon(n)$, so folgt zunächst

Satz 43. *Jede der Scharen* $E(t, \varepsilon, Q)$, $S(t, \varepsilon, Q)$ *geht durch alle Operatoren* T_m^t *in sich über.*

Beweis: Für jeden Operator L (Transformation höherer Ordnung), der als Summand in der Definition von T_m^t auftritt, gilt:

Durch L geht jede Spitzenform wieder in eine Spitzenform (eventuell von höherer Stufe) über.

Durch L geht jede Eisenstein-Reihe in ein lineares Aggregat von Eisenstein-Reihen (eventuell von höherer Stufe) über. Letzteres folgt unmittelbar aus der Definition dieser Reihen, auch noch für $k = 1, 2$, wenn man hier die von mir vorgeschlagene modifizierte Definition mit Hilfe der, absolute Konvergenz erzeugenden Faktoren benutzt[3]).

Auch durch T_m^t geht daher jede Form aus $S(t, \varepsilon, Q)$ wieder in eine solche über, weil der Begriff Spitzenform unabhängig von dem Wert der Stufe ist.

Aber auch jedes Individuum E aus $E(t, \varepsilon, Q)$ geht durch T_m^t wieder in ein solches über. Denn $E \mid T_m^t$ ist nach dem Vorangehenden eine lineare Kombination von Eisenstein-Reihen einer gewissen Stufe K, andererseits nach § 8 zur Stufe Q gehörig, also gibt es nach § 1, Satz 1 eine Kombination von Reihen der Stufe Q, etwa $F(\tau, Q)$, derart, daß $E \mid T_m^t - F(\tau, Q)$ eine Spitzenform ist. Diese aber ist, aufgefaßt als zur Stufe KQ gehörig, nach Satz 2 identisch Null.

Satz 44. *Die Dirichlet-Reihen zur Schar aller Eisenstein-Reihen der Stufe Q sind linear äquivalent mit den Reihen*

$$(t_1 t_2)^{-s} \cdot L(s, \chi_1) \cdot L(s - k + 1, \chi_2). \tag{26}$$

Hierin bedeuten t_1, t_2 zwei positive Teiler von Q; χ_1, χ_2 sind Restcharaktere mod. $\frac{Q}{t_1}$ bzw. $\frac{Q}{t_2}$, ferner

$$\chi_1(-1) \cdot \chi_2(-1) = (-1)^k, \quad L(s, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}.$$

Für $k = 2$ darf außerdem

(27) nicht gleichzeitig χ_1 der Hauptcharakter mod. $\frac{Q}{t_1}$ und $Q = t_2$ sein.

Beweis: Die Potenzreihen, welche in der Schar der Eisenstein-Reihen der Stufe Q auftreten, lassen sich — abgesehen vom konstanten Gliede, das für den Übergang zu Dirichlet-Reihen belanglos ist — nach I, Gleichung (4), § 1 folgendermaßen beschreiben: Man bilde mit einem beliebigen Paar a_1, a_2 von Restklassen mod. Q

$$g(a_1, a_2) = \sum_{\substack{m \cdot N > 0 \\ m \equiv a_1 \,(\mathrm{mod.}\, Q)}} N^{k-1} (sgn\, N)\, \zeta^{a_2 N} z_Q^{m N} = (-1)^k g(-a_1, -a_2); \quad (\zeta = e^{\frac{2\pi i}{Q}}). \tag{28}$$

---

[3]) E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen, Abh. Mathem. Sem. Hamburg 5 (1927).

Die genannten Potenzreihen sind dann beliebige lineare Verbindungen

(29) $$\sum_{a_1, a_2 \bmod. Q} c(a_1, a_2) \cdot g(a_1, a_2)$$

mit konstanten $c(a_1, a_2)$ mit der einzigen Bedingung:

(30) für $k = 2$ muß sein: $c(a_1, a_2) = c(-a_1, -a_2)$ und $\sum\limits_{a_1, a_2} c(a_1, a_2) = 0$.

Nun ist die Schar (29) ohne diese Bedingung (30) offenbar linear äquivalent mit

$$f(a_1, l) = \frac{1}{Q} \sum_{a \bmod. Q} \zeta^{-al} g(a_1, a). \qquad (a_1, l \bmod. Q)$$

Hier ist

$$f(a_1, l) = [a_1, l] + (-1)^k [-a_1, -l],$$

(31) $$[a_1, a_2] = \sum z_Q^{m_1 m_2} m_2^{k-1} \qquad (m_i \equiv a_i \,(\text{mod. } Q),\ m_i > 0).$$

Die Dirichlet-Reihen dazu sind

$$\{a_1, a_2\} = \sum \frac{1}{m_1^s} \cdot \frac{1}{m_2^{s-k+1}} \qquad (m_i \equiv a_i \,(\text{mod. } Q),\ m_i > 0).$$

Sind jetzt t_1, t_2 zwei positive Teiler von Q und χ_1, χ_2 Restcharaktere mod. $\frac{Q}{t_1}$ bzw. $\frac{Q}{t_2}$, so folgt durch Summation nach b_i mod. $\frac{Q}{t_i}$

$$\frac{t_2^{k-1}}{2} \sum_{b_i \bmod. \frac{Q}{t_i}} \chi_1(b_1) \chi_2(b_2) \left(\{b_1 t_1, b_2 t_2\} + (-1)^k \{-b_1 t_1, -b_2 t_2\}\right)$$

$$= \varrho \cdot t_2^{k-1} \sum_{b_i \bmod. \frac{Q}{t_i}} \chi_1(b_1) \chi_2(b_2) \{b_1 t_1, b_2 t_2\}$$

$$= \varrho \cdot (t_1 t_2)^{-s} \cdot L(s, \chi_1) \cdot L(s - k + 1, \chi_2),$$

wo

$$\varrho = \frac{1 + (-1)^k \chi_1(-1) \cdot \chi_2(-1)}{2}.$$

Hieraus folgt die Richtigkeit von Satz 44 für $k \neq 2$. Für $k = 2$ ist (31) auf die $g(a_1, a_2)$ umzurechnen und die Bedingung (30) anzusetzen. Man findet für χ_1, χ_2 die Bedingung

$$\sum_{\substack{b_i \bmod. \frac{Q}{t_i} \\ l \bmod. Q}} \chi_1(b_1) \cdot \chi_2(b_2) \zeta^{l b_2 t_2} = 0,$$

und das ist gleichwertig mit der in Satz 43 genannten Forderung (27).

Die Reihen (26) sind nicht alle linear unabhängig. Die zugehörigen Modulformen sind jedenfalls nach Satz 41 des vorigen Paragraphen alle normiert, vom Charakter

$$\varepsilon(n) = \chi_1(n) \cdot \chi_2(n)$$

und sind Eigenfunktionen aller Operatoren T_n. Denn die Dirichlet-Reihen sind Euler-Produkte bezüglich jeder Primzahl p, welche nicht in Q aufgeht.

Was den Teiler betrifft, so sieht man sofort, daß Formen vom Teiler $t = 1$ nur aus Linearkombinationen mit $t_1 \cdot t_2 = 1$, d. h. $t_1 = t_2 = 1$ entstehen können und alle Reihen mit $t_1 = t_2 = 1$ auch umgekehrt zum Teiler $t = 1$ gehören. Daraus folgt

Satz 45. *Die Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *der Schar der Eisenstein-Reihen* $E(1, \varepsilon, Q)$ *mit* $t = 1$ *ist auf reine Diagonalform reduzierbar.*

Denn die Anzahl der linear unabhängigen Elemente in der Schar ist nach dem Obigen gleich der Anzahl der linear unabhängigen, d. h. verschiedenen, charakteristischen Wurzeln der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$.

Eine kleine Rechnung zeigt, daß für $Q =$ Primzahl q oder Quadrat einer solchen auch die Scharen $E(t, \varepsilon, Q)$ mit $t = q$ oder $t = q^2$ ebensoviel verschiedene charakteristische Wurzeln in den Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ wie unabhängige Elemente enthalten, daß also auch hier $\mathsf{B}(\tau)$ auf Diagonalform transformierbar ist.

Dagegen ist bereits für die Stufe $Q = q^3$ diese volle Reduzibilität nicht mehr vorhanden:

Satz 45a. *Die Matrix* $\mathsf{B}(\tau)$ *zum System der Eisenstein-Reihen der Stufe* $Q = q^3$ *vom Teiler* $t = q^3 = Q$ *und dem Charakter* $\varepsilon(n)$ *ist nicht auf Diagonalgestalt transformierbar, falls* $q \neq 2$.

Zum Beweise genügt es, eine bei allen T_m^t invariante Schar von zwei Erzeugenden anzugeben, die nur eine einzige Eigenfunktion des Operatorenringes enthält. Wir bilden die Reihe (26) mit

$$Q = q^3, \quad t_1 = t_2 = q^2,$$
$$\chi_1, \chi_2 \text{ Charaktere mod. } q \quad \text{mit} \quad \chi_1(-1)\,\chi_2(-1) = (-1)^k,$$
$$\varphi(s) = q^{-4s} L(s, \chi_1) \cdot L(s - k + 1, \chi_2).$$

Der q-Bestandteil dieser Reihe ist q^{-4s}. Die zugehörige Modulform ist bis auf eine additive Konstante

$$F(\tau) = \text{const.} + \sum_{(n, q) = 1} a(n)\, z_Q^{n q^4}$$

und $F(\tau)$ ist Eigenfunktion aller T_n, R_n, vom Teiler $t = q^3$ und dem Charakter $\varepsilon(n) = \chi_1(n) \cdot \chi_2(n)$. Wegen

$$F\left(\tau + \frac{1}{q}\right) = F(\tau)$$

liefert der Operator

$$T_q^Q = q^{k-1} \cdot \sum_{l \bmod. q} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

die Form vom selben Teiler

$$F(\tau) | T_q^Q = \frac{1}{q} \sum_{l \bmod. q} F\left(\frac{\tau + l}{q}\right) = F\left(\frac{\tau}{q}\right) = H(\tau) \tag{32}$$

und

$$H(\tau)|T_q^Q = \frac{1}{q}\sum_{l \bmod. q} H\left(\frac{\tau+l}{q}\right) = 0. \tag{33}$$

Es sind also F, H Eigenfunktionen aller T_n, R_n; sie haben dabei die gleichen Multiplikatoren. Die Matrix $\lambda(q)$ für den Operator T_q^Q lautet für F, H nach (32), (33)

$$\lambda(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der einzigen Wurzel 0. Daher hat auch die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zu der Schar (F, H) nur eine einzige charakteristische Wurzel, nämlich $H(\tau)$.

§ 11.

Weitere Reduktion der Matrizen mit Hilfe der irreduziblen Darstellungen von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$.

Die Reduktion der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ läßt sich nun im allgemeinen noch weiter treiben. Es zeigt sich, daß die $\lambda(n)$ für die verschiedenen t, ε sich auf die mit $t = 1$ zurückführen lassen und daß diese entsprechend den irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{M}(Q)$ in Teilmatrizen zerfallen. Die Quelle dieser Sätze ist die Vertauschungsrelation Satz 32, § 5.

Bedeutet zunächst F^ϱ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$ ein volles System von Formen der Art $(-k, Q)$, so gibt es zu jedem n mit $(n, Q) = 1$ eine konstante Matrix des Grades $\varkappa$, $\lambda(n) = (\lambda_{\varrho\sigma}(n))$, so daß

$$F^\varrho | T_n = \sum_\sigma \lambda_{\varrho\sigma}(n) F^\sigma.$$

Andererseits geht aber auch durch jede Substitution L aus $\overline{\Gamma}(1)$ die Schar der F^ϱ in sich über, daher ist mit konstanten $c_{\varrho\sigma}(L)$

$$F^\varrho | L = \sum_\sigma c_{\varrho\sigma}(L) F^\sigma,$$

wo die Matrizen

$$C(L) = C([L]) = (c_{\varrho\sigma}(L))$$

offenbar eine Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ der endlichen Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ mod. Q bilden. Die Vertauschungsrelation

$$T_n \cdot L = [S_n L S_n^{-1}] \cdot T_n \tag{34}$$

hat dann die Matrizengleichung

$$\lambda(n) \cdot C(L) = C([S_n L S_n^{-1}]) \cdot \lambda(n) \tag{35}$$

zur Folge. Wir haben in den früheren Paragraphen eine Zerfällung der $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ und damit der Schar der F^ϱ vorgenommen, durch Einführung von Teiler und Charakter, die sich ungefähr mit der Zerfällung der Darstellung $\mathfrak{S}$ nach den irreduziblen Darstellungen der Untergruppe $\mathfrak{M}_0(Q)$ deckt. Für diese Bestandteile war dann die Definition der Ope-

ratoren T_m^t mit $(m, Q) > 1$ möglich. Das exakte Zurückgehen auf die irreduziblen Bestandteile von $\mathfrak{S}$ ist deshalb eigentümlich kompliziert, weil sich zeigt, daß im allgemeinen die Darstellung $\mathfrak{S}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ mit der Darstellung $C([S_n L S_n^{-1}])$ nicht äquivalent ist. Und bei der hier zu konstatierenden Verknüpfung verschiedener irreduzibler Darstellungen tritt dann merkwürdigerweise die Klassenzahl definiter binärer quadratischer Formen aller Diskriminanten auf, welche Teiler der Stufe Q sind.

Zur Diskussion dieser Beziehungen sei jetzt F_i $(i = 1, \ldots, f)$ ein System von f Formen der Art $(-k, Q)$, das sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach einer irreduziblen Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{M}(Q)$ vom Grade f umsetzt. Wenn dann für L aus $\overline{\Gamma}(1)$ mit konstanten $c_{ir}(L)$

$$F_i | L = \sum_{r=1}^{f} c_{ir}(L) F_r, \qquad C(L) = (c_{ir}(L)),$$

so setzen sich für festes n die f Formen

$$G_i = F_i | T_n \qquad (i = 1, \ldots, f) \tag{36}$$

bei der Substitution L aus $\overline{\Gamma}(1)$ wegen (34) nach den Matrizen

$$C([S_n L S_n^{-1}]) \tag{37}$$

um. Diese bilden wiederum eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{M}(Q)$, welche aus $\mathfrak{D}$ durch den Automorphismus

$$[L] \to [S_n L S_n^{-1}]$$

hervorgeht. Sie sei mit $\xi_n \mathfrak{D}$ bezeichnet. Der Automorphismus ξ_n hängt offenbar nur von n mod. Q ab, und die ξ_n bilden ersichtlich eine endliche Abelsche Gruppe.

Es kommt nun weiterhin darauf an, wie viele unter den Darstellungen $\xi_n \mathfrak{D}$ für die verschiedenen n nicht äquivalent sind. Der Automorphismus ist ein innerer und $\mathfrak{D}$ also mit $\xi_n \mathfrak{D}$ äquivalent, wenn n quadratischer Rest mod. Q ist, $n \equiv g^2$ (mod. Q). Denn dann ist

$$S_n \equiv S_{g^2} \equiv \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \cdot R_g \ (\text{mod. } Q),$$

$$[S_n L S_n^{-1}] \equiv R_g L R_g^{-1} \ (\text{mod. } Q),$$

wo nun R_g zu $\overline{\Gamma}(1)$ gehört. Es gibt also unter den $\xi_n \mathfrak{D}$ höchstens soviel nichtäquivalente, als es verschiedene Arten von quadratischen Nichtresten mod. Q gibt. Nennen wir zwei Darstellungen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ **verwandt**, wenn $\mathfrak{D}_2 = \xi_n \mathfrak{D}_1$ mit irgendeinem n („verwandt" ist offenbar symmetrisch und transitiv), so wollen wir zuerst den einfachsten Fall untersuchen:

(38) I. Alle mit $\mathfrak{D}$ verwandten Darstellungen seien äquivalent.
Ein solches $\mathfrak{D}$ heiße **von erster Art.**

Alsdann läßt sich bekanntlich die Darstellung $\mathfrak{D}$ zu einer irreduziblen Darstellung vom selben Grade f für diejenige Gruppe erweitern, welche

aus $\mathfrak{D}$ durch Hinzunahme der Automorphismen ξ_n entsteht. Das ist die Gruppe der ganzzahligen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mod. Q (wo $a\,d - b\,c$ eine beliebige zu Q teilerfremde Zahl sein darf), innerhalb welcher $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ ein Normalteiler vom Index $\varphi(Q)$ (= Eulerscher Funktion von Q) ist mit Abelscher Faktorgruppe. Wir brauchen diese Tatsache nicht in vollem Umfang und geben für den erforderlichen Teil gleich den Beweis: Wegen (38) gibt es zu n eine Matrix A_n vom Grade f, so daß für alle L aus $\overline{\Gamma}(1)$

$$C([S_n L S_n^{-1}]) = A_n \cdot C(L) \cdot A_n^{-1}. \tag{39}$$

Wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{D}$ ist A_n hierdurch eindeutig bis auf einen skalaren Zahlfaktor bestimmt. Diesen wählen wir nun in bekannter Weise so, daß die A_n eine mit den ξ_n isomorphe Gruppe bilden mit

$$A_{n_1} \cdot A_{n_2} = A_{n_1 \cdot n_2},$$

$$A_1 = A_n^{\varphi(Q)} = E_f = \text{Einheitsmatrix vom Grade } f.$$

Die aus den Produkten der A_n und $C(L)$ bestehenden Matrizen bilden offenbar eine endliche Gruppe. In ihr ist die Untergruppe der $C(L)$ mit L aus $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ mit allen A_n vertauschbar, weil für ihre Erzeugenden $C(U)$, $C(R_a)$ gilt:

$$C(R_a) \text{ mit } A_n \text{ vertauschbar}, \quad ((a, Q) = 1). \tag{40}$$

$$A_n \cdot C(U)^n \cdot A_n^{-1} = C(U). \tag{41}$$

Wir wollen nun eine bestimmte *Normalform dieser Gruppe* erreichen. Zunächst nehmen wir wie in § 6 an, daß jede der Formen F_i zu je einem bestimmten Teiler t_i gehört. Das bedeutet, daß in der Schar der $F_i | U^l$ für festes i und $l = 1, 2, \ldots, Q$ nur Eigenfunktionen von U auftreten, deren Multiplikatoren primitive $\frac{Q}{t_i}$-te Einheitswurzeln sind. Das ist sicher dann der Fall, wenn die in $\mathfrak{D}$ enthaltene Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ bereits in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt ist. Wegen (40), (41) zerfallen dann die Matrizen A_n ebenfalls in den Teilern entsprechende Teilmatrizen, und jede dieser (Abelschen) Teilmatrizen wollen wir sodann noch auf Diagonalform gebracht denken. Dann haben auch die Matrizen $C(R_n)$ schon Diagonalform, weil wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{D}$ aus (39) folgt

$$C(R_n) = A_{n^2} \cdot \chi(n). \tag{42}$$

Der skalare Faktor $\chi(n)$ muß offenbar ein Restcharakter von n mod. Q sein.

Eine Darstellung $\mathfrak{D}$ heiße nun im Falle I. **normiert**, wenn

1. Die Darstellung von $\mathfrak{M}_0(Q)$ in $\mathfrak{D}$ zerlegt ist in solche mit je einem Teiler;

2. Die Matrizen A_n Diagonalform haben, $A_n = (\chi_i(n)\,\delta_{ik})$.

Damit ist dann bewiesen:

Satz 46. *Jede irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$, welche mit allen verwandten Darstellungen äquivalent ist, ist mit einer normierten Darstellung äquivalent.*

Wir setzen weiterhin $\mathfrak{D}$ als normiert voraus. Dann folgt endlich das erste Resultat:

Satz 47. *Die f Formen F_i $(i = 1, 2, \ldots, f)$ mögen sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach einer irreduziblen normierten Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ der ersten Art umsetzen. Für jedes n erfahren dann die f Funktionen*

$$\bar{\chi}_i(n) \cdot F_i | T_n \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

bei $\overline{\Gamma}(1)$ dieselben linearen Transformationen wie die F_i.

Dabei bedeutet $\bar{\chi}_i(n)$ das i-te Diagonalelement in A_n^{-1}.

Denn nach dem Vorangehenden setzen sich die $F_i | T_n$ nach den Matrizen $A_n \cdot C(L) A_n^{-1}$ um, das System $A_n^{-1}(F_1 | T_n, \ldots, F_f | T_n)$ also ebenfalls nach den Matrizen $C(L)$ wie die F_i.

Endlich sei nun $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ die endliche Gruppe linearer homogener Substitutionen, welche ein volles System unabhängiger Modulformen der Art $(-k, Q)$ bei $\overline{\Gamma}(1)$ erfährt. Diese Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ denken wir in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegt. Die Darstellung $\mathfrak{D}$ von der ersten Art aus Satz 47 sei in $\mathfrak{S}$ genau $\varkappa$-mal enthalten. Es gibt daher genau $\varkappa$ Systeme von Formen $(F_1^\varrho, \ldots, F_f^\varrho)$ $(\varrho = 1, \ldots, \varkappa)$, deren jedes sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach derselben (normierten) Darstellung $\mathfrak{D}$ umsetzt. Aus der Irreduzibilität von $\mathfrak{D}$ folgt dann der Hauptsatz der Reduktionstheorie:

Satz 48. *Zu jedem n gibt es eine konstante Matrix $\alpha(n) = (\alpha_{\varrho\sigma}(n))$ des Grades $\varkappa$, so daß für alle $i = 1, 2, \ldots, f$*

$$\bar{\chi}_i(n) \cdot F_i^\varrho | T_n = \sum_\sigma \alpha_{\varrho\sigma}(n) F_i^\sigma \qquad (\varrho = 1, \ldots, \varkappa). \tag{43}$$

Hierbei ist wichtig, daß die Matrix $\alpha(n)$ von i unabhängig ist. Man sieht, daß jedes der f Systeme $(F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{\varkappa})$ $(i = 1, \ldots, f)$ eine bei allen T_n invariante Schar vom Range $\varkappa$ bildet. Jede Schar hat einen gewissen Teiler t_i, und der Charakter ist nach (42)

$$\varepsilon_i(n) = \chi_i(n^2) \cdot \chi(n).$$

Die Matrizen $\chi_i(n) \cdot \alpha(n)$ für festes i setzen sich nach (43) isomorph mit den Operatoren T_n zusammen. Aus Satz 34, § 5 folgt also

Satz 49.

$$\alpha(n_1) \cdot \alpha(n_2) = \sum_{d | n_1, n_2} \alpha\left(\frac{n_1 n_2}{d^2}\right) \chi(d) \cdot d^{k-1}.$$

Bei denjenigen F_i, welche den Teiler $t = 1$ haben, ist nach § 8 nun die Heranziehung weiterer Operatoren nicht erforderlich, und da sie eine

bei den T_n invariante Teilschar bilden, so gilt die Theorie der in § 8 mit $\lambda(n)$ bezeichneten Matrizen für diese $\lambda(n) = \chi_i(n)\,\alpha(n)$. Es ist damit bewiesen:

Satz 50. *Die Schar der Modulformen vom Teiler 1 enthält mehrere, gegenüber den T_n invariante Teilscharen, welche den irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{D}$ der Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ von erster Art entsprechen. Der Grad der einzelnen Teilschar und damit der Grad der nach § 8 zugehörigen Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ ist gleich der Vielfachheit $\varkappa$, mit welcher $\mathfrak{D}$ in der Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ enthalten ist.*

Komplizierter liegen die Verhältnisse bei den F_i mit $t_i > 1$. Denn nach der Theorie aus § 8 muß man wissen, wie sich diese F_i bei den Operatoren $T_m^{t_i}$ verhalten. Im allgemeinen gehen aber hierbei die F_i in Formen über, welche zu andern irreduziblen Darstellungen von $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ gehören. Eine abgeschlossene Aussage darüber scheint erst nach genauerer Kenntnis der einfachen Charaktere der Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$ möglich zu sein. Für Primzahlstufe wird die Theorie in den nächsten Paragraphen vollständig erledigt werden.

II. Sind unter den mit $\mathfrak{D}$ verwandten Darstellungen genau r nichtäquivalente, $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_r$ ($\mathfrak{D}$ heiße dann **von r-ter Art**), welche aus $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1$ durch die Automorphismen

$$\xi_{n_l}\,\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_l \qquad (l = 1, \ldots, r)$$

hervorgehen, so gelangen wir durch folgende Abänderung des Gedankenganges zu einem ähnlichen Resultat: Wir ziehen die Untergruppe $\mathfrak{A}$ derjenigen Automorphismen ξ_N heran, welche $\mathfrak{D}_1$ in eine äquivalente Darstellung überführen. Zu jedem n gibt es dann genau eines der obigen n_l, so daß

$$n \equiv N \cdot n_l \pmod{Q} \qquad (\xi_N \subset \mathfrak{A}).$$

Die Darstellung $\mathfrak{D}_1$ setzen wir wieder als **normiert** voraus, d. h.

1. Die in $\mathfrak{D}_1$ enthaltene Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}_0(Q)$ soll in solche von je einem Teiler zerlegt sein.

2. Die Matrizen A_N mit $\xi_N \subset \mathfrak{A}$, welche die Automorphismen ξ_N von $\mathfrak{D}_1$ vermitteln, sollen eine mit $\mathfrak{A}$ isomorphe Gruppe von Diagonalmatrizen $A_N = (\chi_i(N)\,\delta_{ik})$ sein.

Aus den Matrizen $C_1(L)$ von $\mathfrak{D}_1$ definieren wir dann die Matrizen $C_l(L)$ aus $\mathfrak{D}_l$ durch

$$C_l(L) = C_1([S_{n_l} L S_{n_l}^{-1}]). \tag{44}$$

Die $\mathfrak{D}_l$ sind also auch sämtlich normiert. Und analog zu Satz 47 folgt

Satz 47a. *Die f Formen F_i ($i = 1, 2, \ldots, f$) mögen sich bei $\overline{\Gamma}(1)$ nach der irreduziblen normierten Darstellung $\mathfrak{D}_l$ von r-ter Art umsetzen. Für jedes n erfahren dann die f Funktionen*

$$\bar{\chi}_i(N) F_i \,|\, T_n \qquad (i = 1, \ldots, f)$$

bei $\overline{\Gamma}(1)$ *die linearen Transformationen* $C_v(L)$ *aus* $\mathfrak{D}_v$. *Dabei bestimmen sich* v, N *aus*:

$$\xi_N = \xi_n \cdot \xi_{n_l} \cdot \xi_{n_v}^{-1} \text{ zu } \mathfrak{A}; \quad v = v(n, l).$$

Seien ferner die Darstellungen $\mathfrak{D}_l$ in der Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, Q)$ genau mit den Vielfachheiten $\varkappa_l$ enthalten. Diese $\varkappa_l$ sind im allgemeinen voneinander verschieden.

Durch T_n gehen nach Satz 47a die Formen von $\mathfrak{D}_l$ in die von $\mathfrak{D}_v$ über; und die vermittelnden linearen Substitutionen haben also im allgemeinen rechteckige Matrizen. Man betrachte daher das volle System der F_i mit festem i für sämtliche mit $\mathfrak{D}_1$ verwandten Darstellungen $\mathfrak{D}_l$, das aus

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_r$$

Elementen besteht. Es geht durch alle T_n in sich über, hat einen bestimmten Teiler und den Charakter

$$\varepsilon_i(n) = \chi_i(n^2) \cdot \chi(n),$$

so daß für den Teiler $t_i = 1$ die Theorie von § 8 anwendbar ist. An Stelle von Satz 50 tritt dann

Satz 50a. *Jede der Matrizen* $\mathsf{B}(\tau)$ *mit* $t = 1$ *aus* § 8 *zerfällt in Teilmatrizen, welche zugeordnet sind den Mengen miteinander verwandter irreduzibler Darstellungen von* $\overline{\mathfrak{M}}(Q)$. *Der Grad jeder dieser Teilmatrizen ist gleich der Summe der Vielfachheiten, mit der diese verwandten Darstellungen in* $\mathfrak{S}(k, Q)$ *enthalten sind.*

Die Abhängigkeit dieser Matrizen vom Index i besteht dann aber bei den Darstellungen höherer Art nicht nur in dem Auftreten eines skalaren Faktors $\chi_i(n)$. Die Untersuchung der hier vorliegenden Gesetzmäßigkeiten bietet gerade ein besonderes Interesse und soll im folgenden für Primzahlstufe vollständig durchgeführt werden.

§ 12.

Durchführung der Theorie für Primzahlstufe q.

Es sei jetzt die Stufe Q eine ungerade Primzahl q. Hier kennt man für die Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ alle irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}_f$ vom Grade f. Ihre Charaktere sind von Frobenius berechnet worden. Tabellen für $\mathfrak{M}(q)$ und $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ finden sich in den angegebenen Arbeiten[4]); ich stelle hier die nötigen Angaben zusammen:

---

[4]) G. Frobenius, Berliner Akad. 1896, S. 985. I. Schur, Crelles Journal f. d. r. u. angew. Math. 132, S. 128; E. Hecke, Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), S. 235; H. Feldmann, Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), S. 331.

Aus der Struktur der Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ folgt, indem man die Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mod. q mit $ad - bc \equiv 1$ mod. q als Elemente von $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ wählt, daß die einzelnen Klassen konjugierter Elemente in $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ vollständig durch ihre Spur $a + d$ bestimmt sind, außer wenn die Spur kongruent ± 2 mod. q ist. Die verschiedenen Klassen mit diesen Spuren werden dann repräsentiert durch

$$\pm U, \ \pm U^{\nu} \qquad (\nu \text{ ein quadratischer Nichtrest mod. } q)$$

und noch durch $\pm E$ (E = Einheitsmatrix).

Außer inneren Automorphismen gibt es unter den ξ_n wesentlich einen einzigen anderen, nämlich für n = quadratischer Nichtrest mod. q. Dieser Automorphismus vertauscht die beiden Klassen U, U^{ν} und ebenso $-U$, $-U^{\nu}$, während alle anderen Klassen bei ξ_n fest bleiben. Die Darstellungen der ersten Art von $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ sind daher diejenigen, wo die Charaktere $\chi(U)$, $\chi(U^{\nu})$ gleich sind, die anderen Darstellungen sind von zweiter Art. Es gibt irreduzible Darstellungen $\mathfrak{G}_f$ nur von den Graden

$$f = q, \ q+1, \ q-1, \ \frac{q+1}{2}, \ \frac{q-1}{2}$$

und dazu noch die identische Darstellung. Aus den Tabellen ersieht man

Satz 51. *Die Darstellungen der Grade $\frac{q+1}{2}$, $\frac{q-1}{2}$ (es gibt je zwei davon) sind von zweiter Art, alle übrigen von erster Art.*

Zur Durchführung der Theorie aus § 11 müssen wir noch die charakteristischen Wurzeln der Matrizen $C(U)$ und $C(R_n)$ in den einzelnen $\mathfrak{G}_f$ kennen. Für die Spuren $\chi(U)$ und $\chi(R_n)$ in den einzelnen irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}_f$ entnimmt man aus den Tabellen folgende Werte: Es sei g eine Primitivzahl mod. q, $R = R_g = \begin{bmatrix} g^{-1} & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$, ferner $\varepsilon = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$, $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{q-1}}$, a läuft mod. $q-1$, $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}$.

	$\mathfrak{G}_q$	$\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q-1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q-1}{2}}$	$\mathfrak{G}^{(i)}_{q+1}$	$\mathfrak{G}^{(i)}_{q-1}$
$\chi(U)$	0	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	1	-1
$\chi(U^{\nu})$	0	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon q}$	1	-1
$\chi(R^a)$	1	$(-1)^a$	$(-1)^a$	0	0	$\varrho^{ia} + \varrho^{-ia}$	0

Eine kleine Rechnung ergibt dann

Satz 52. *Die Matrix $C(U)$ in der irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}_f$ hat folgende charakteristische Wurzeln:*

1. $f = q - 1$: *alle ζ^l mit $(l, q) = 1$.*
2. $f = q$: *alle ζ^l mit $l = 0, 1 \ldots q - 1$.*

3. $f = q + 1$: *alle* ζ^l *mit* $(l, q) = 1$ *als einfache Wurzel, überdies* 1 *als Doppelwurzel.*

4. $f = \frac{q-1}{2}$: ζ^l *mit* $(l, q) = 1$ *und zwar für die eine dieser Darstellungen alle quadratischen Reste* l mod. q, *für die andere alle Nichtreste* l mod. q.

5. $f = \frac{q+1}{2}$: ζ^l *mit* $\left(\frac{l}{q}\right) = +1$ *bzw.* -1 *wie unter* 4., *dazu noch* 1 *als einfache Wurzel.*

Schließlich ziehen wir noch die irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{A}_r$ vom Grade r von $\mathfrak{M}_0(q)$ heran. Aus der Relation

$$R_n U^{n^2} R_n^{-1} = U$$

folgt sofort, daß r nur die Werte 1 und $\frac{q-1}{2}$ haben kann.

Denn hat die dem Element U zugeordnete Matrix in $\mathfrak{A}_r$ als charakteristische Wurzel 1, so sei φ eine bei U invariante Verbindung der Variabeln: $\varphi \mid U = \varphi$. Auch für jeden Restcharakter $\chi(n)$ bleibt $g(\chi) = \sum_n \varphi \mid R_n \cdot \chi(n)$ bei U invariant und ist Eigenfunktion bei R_n. Nicht für alle χ kann $g(\chi) = 0$ sein, weil sonst auch $\varphi = 0$ wäre, also ist ein $g(\chi_0) \neq 0$ und erzeugt eine Darstellung ersten Grades von $\mathfrak{M}_0(q)$, daher ist $r = 1$, wenn $\mathfrak{A}_r$ irreduzibel.

Hat aber jene Matrix zu U in $\mathfrak{A}_r$ als charakteristische Wurzel $\zeta^a \neq 1$ und ist

$$\varphi \mid U = \zeta^a \cdot \varphi,$$

so bilde man die $\frac{q-1}{2}$ Verbindungen $\varphi \mid R_n = f_n \left(n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}\right)$. Da R_{-1} mit allen Elementen in $\mathfrak{M}_0(q)$ vertauschbar ist, so ist für irreduzible $\mathfrak{A}_r$ die R_{-1} entsprechende Matrix notwendig bis auf den Faktor ± 1 die Einheitsmatrix. Die $\frac{q-1}{2}$ Verbindungen f_n setzen sich daher bei allen L aus $\mathfrak{M}_0(q)$ untereinander um und sind unabhängig, weil sie bei U verschiedene Faktoren annehmen. Für irreduzible $\mathfrak{A}_r$ ist daher $r = \frac{q-1}{2}$. Der Charakter $\chi(R_l)$ in dieser Darstellung ist offenbar Null, wenn $l \neq \pm 1$ (mod. q).

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Tabellen für die Charaktere der $\mathfrak{G}_f$, so erhält man folgende Übersicht:

Satz 53. *Irreduzible Darstellungen* $\mathfrak{A}_r$ *von* $\mathfrak{M}_0(q)$ *sind in den* $\mathfrak{G}_f$ *folgendermaßen verteilt:*

1. $f = q - 1$: *Jede* $\mathfrak{G}_{q-1}$ *enthält zwei* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$.

2. $f = q$: $\mathfrak{G}_q$ *enthält die identische Darstellung von* $\mathfrak{M}_0(q)$ *und außerdem zwei* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$.

3. $f = q + 1$: $\mathfrak{G}_{q+1}$ *enthält zwei verschiedene (konjugiert-komplexe) Darstellungen* $\mathfrak{A}_1$ *und zwei* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$. *Verschiedene* $\mathfrak{G}_{q+1}$ *enthalten nie dieselben* $\mathfrak{A}_1$.

4. $f = \frac{q-1}{2}$: *Beide* $\mathfrak{G}_{\frac{q-1}{2}}$ *enthalten je eine* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$, *aber nicht dieselbe.*

5. $f = \frac{q+1}{2}$: *Beide* $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ *enthalten die von der Identität verschiedene reelle Darstellung* $\mathfrak{A}_1$ *und noch eine* $\mathfrak{A}_{\frac{q-1}{2}}$, *aber nicht dieselbe.*

Damit läßt sich nun die im vorigen Paragraphen skizzierte Reduktionstheorie durchführen. Wir denken uns zunächst die Darstellung $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$, welche von dem vollen Formensystem zur Dimension $-k$ geliefert wird, in die irreduziblen Bestandteile $\mathfrak{G}_f$ zerlegt:

$$(45) \qquad \mathfrak{S} = e \cdot \mathfrak{E} + x\,\mathfrak{G}_q + y_1\,\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}} + y_2\,\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}} + w_1\,\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q-1}{2}} + w_2\,\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q-1}{2}} + \sum_i u_i\,\mathfrak{G}^{(i)}_{q+1} + \sum_i v_i\,\mathfrak{G}^{(i)}_{q-1}.$$

Hierbei sind die verschiedenen $\mathfrak{G}_f$ vom selben Grade durch obere Indizes unterschieden. $\mathfrak{E}$ ist die identische Darstellung, die e, x, y, u, v, w sind die Multiplizitäten. Wir merken gleich an, daß einige Darstellungen bei allen geraden k, andere bei allen ungeraden k fehlen, weil jede Form durch den Operator R_{-1} sich mit $(-1)^k$ multipliziert. Unter anderem hat das zur Folge:

I. k gerade: $y_1 = y_2 = 0$ für $q \equiv 3 \pmod{4}$,
$w_1 = w_2 = 0$ für $q \equiv 1 \pmod{4}$,

II. k ungerade: $e = 0$, $x = 0$,
$y_1 = y_2 = 0$ für $q \equiv 1 \pmod{4}$,
$w_1 = w_2 = 0$ für $q \equiv 3 \pmod{4}$.

Die Aussagen über die verschiedenen $\mathfrak{G}_f$ der Fälle 1 bis 5 formulieren wir nun der Reihe nach in den Sätzen:

Satz 54. $f = q - 1$. *Jedes* $\mathfrak{G}^{(l)}_{q-1}$ *enthält kein* $\mathfrak{A}_1$, *also nur Funktionen vom Teiler* 1. *Für jedes in* $\mathfrak{S}$ *vertretene* $\mathfrak{G}^{(l)}_{q-1}$ *gibt es daher* $q-1$ *Matrizen* $\Phi_i(s) = \Phi_i^{(l)}(s, \varepsilon_i)$ $(i = 1, \ldots, q-1)$ *vom Grade* v_l, *deren Elemente die Dirichlet-Reihen zu den Funktionen* F_i *aus* $\mathfrak{G}^{(l)}_{q-1}$ *vom Charakter* $\varepsilon_i(n)$ *sind, mit*

$$(46) \qquad \Phi_i(s) = \prod_{p \neq q} (\mathsf{E} - \lambda_i(p)\,p^{-s} + \varepsilon_i(p)\,p^{k-1-2s}\,\mathsf{E})^{-1}.$$

Man erhält die Φ_i *für die verschiedenen* i *aus einer von ihnen, indem man* p^{-s} *durch* $\chi_0(p)\,p^{-s}$ *ersetzt, wobei* $\chi_0(n)$ *ein beliebiger Restcharakter* mod. q *ist.*

In der Tat ist ja nach Satz 36 in § 6 mit $\sum_n a(n) z_Q^n$ vom Charakter $\varepsilon(n)$ auch $\sum_n a(n) \chi_0(n) z_Q^n$ wieder eine Eigenfunktion von R_n und gehört zur selben Darstellung $\mathfrak{G}_{q-1}^{(l)}$ wie jene, und man erhält daher durch den Übergang von $\lambda_i(p)$, $\varepsilon_i(p)$ zu $\lambda_i(p)\chi_0(p)$, $\varepsilon_i(p)\chi_0(p^2)$ auch eine Matrix Φ. Andererseits hängen nach Satz 48, 49 alle Matrizen Φ_i für die verschiedenen i auch wirklich stets auf diese Art zusammen. Es kommt also ein Charakter $\varepsilon_l(n)$ entweder zweimal vor — wenn nämlich $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ — oder garnicht.

Die beiden Matrizen $\Phi(s)$, welche zu den Funktionen mit demselben Charakter $\varepsilon(n)$ gehören, sind ersichtlich die beiden

$$\Phi(s) = \prod_{p \neq q} (\mathsf{E} - \lambda(p)\varrho(p)p^{-s} + \varepsilon(p)p^{k-1-2s}\mathsf{E})^{-1},$$

wo $\varrho(n)$ einer der beiden reellen Charaktere mod. q ist (Hauptcharakter oder quadratischer Restcharakter).

Satz 55. *$f = q$. (Also k gerade.) Für die Funktionen zu $\mathfrak{G}_q$ vom Teiler 1 gilt die zu Satz 54 analoge Aussage über die Matrizen Φ_i ($i = 1, 2, \ldots, q-1$) vom Grade x. Dagegen bilden die Funktionen vom Teiler q aus $\mathfrak{G}_q$ (welche übrigens ja alle den Charakter $\varepsilon(n) = 1$ haben) erst zusammen mit denen aus $\mathfrak{E}$ ein bei allen Operatoren T_m^q invariantes System vom Range $e + x$. Die zugehörige Matrix Φ vom Grade $e + x$ hat die Gestalt*

$$\Phi(s) = q^{-s}(\mathsf{E} - \lambda(q)q^{-s})^{-1} \cdot \Psi(s),$$

worin Ψ von dem Typus (46) (ohne q-Bestandteil) ist.

Daß die Funktionen vom Teiler q und Charakter 1 (d. h. die Invarianten von $\Gamma_0(q)$) ein bei allen Operatoren T_m^q invariantes System bilden, folgt aus dem Satz 38. Aus Satz 53 erkennt man, daß solche Funktionen nur bei den Darstellungen $\mathfrak{G}_q$ und $\mathfrak{E}$ vorkommen können.

Die Matrix $\Psi(s)$ zerfällt ersichtlich wegen Satz 48 in zwei Matrizen: $\Psi_0(s)$ vom Grade e und $\Psi_1(s)$ vom Grade x; $\Psi_1(s)$ ist eine der (beiden) im ersten Teil von Satz 55 erwähnten Matrizen zu den Funktionen vom Charakter 1, aber Teiler 1 aus $\mathfrak{G}_q$, während $\Psi_0(s)$ die für die Funktionen der Stufe 1 definierte Matrix ist, in welcher der q-Bestandteil fortgelassen ist.

Eine ausgezeichnete Stellung haben hierbei der Wert $k = 2$, wo bekanntlich $e = 0$ ist, und, wenn man sich auf Spitzenformen beschränkt, auch die Werte $k = 4, 6, 8, 10$, wo ebenfalls $e = 0$ ist.

Satz 56. *$f = q + 1$. Bei den Funktionen aus $\mathfrak{G}_{q+1}^{(l)}$ liefern wieder die vom Teiler 1 eine analoge Reihe von $q - 1$ Matrizen $\Phi_i(s)$ wie bei Satz 54, vom Grade u_l. Weiter seien in der normierten Darstellung $\mathfrak{G}_{q+1}^{(l)}$*

aus Satz 47 $F_q(\tau)$ *und* $F_{q+1}(\tau)$ *die beiden Funktionen vom Teiler* q; *sie haben nach Satz* 53, 3. *verschiedene konjugiert-komplexe Charaktere, etwa* $\varepsilon_0(n)$, $\bar{\varepsilon}_0(n)$. *Dann sind in der Bezeichnung von Satz* 48 (*mit* $\varkappa = u_1$) *die beiden Scharen* $(F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{(\varkappa)})$ $(i = q, q+1)$ *invariant bei allen Operatoren* T_m^q, *und zu jeder von ihnen gehört nach dem Hauptsatz* 39 *eine Matrix* $\Phi_i(s)$ *von der Gestalt*

$$\Phi_q(s) = q^{-s}(\mathsf{E} - \lambda_q(q)\, q^{-s})^{-1}\, \Phi_{r_0}(s),$$
$$\Phi_{q+1}(s) = q^{-s}(\mathsf{E} - \lambda_{q+1}(q)\, q^{-s})^{-1}\, \Phi_{r_1}(s).$$

$\Phi_{r_i}(s)$ *ist jedesmal eine der beiden zu Anfang erwähnten Matrizen zum Charakter* ε_0 *bzw.* $\bar{\varepsilon}_0$.

Daß jede der beiden Scharen auch bei dem Operator T_q^q in sich übergeht, folgt aus dem Zusatz in Satz 53, 3. Und dieser beruht auf der Kenntnis aller einfachen Charaktere der Gruppe $\overline{\mathfrak{M}}(q)$. Die Mehrdeutigkeit in der Schlußaussage von Satz 56 stellt wieder ein bemerkenswertes transzendentes Problem von der Art der Vorzeichenbestimmung der Gaußschen Summen.

Hiermit sind alle Darstellungen erster Art von $\overline{\mathfrak{M}}(q)$ erledigt.

Satz 57. $f = \frac{q \pm 1}{2}$. *Für die beiden Paare von verwandten Darstellungen* $\left(\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q-1}{2}}, \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q-1}{2}}\right)$, $\left(\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}}, \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}\right)$, *die man im allgemeinen in den Euler-Produkten nicht trennen kann, gelten die Aussagen von Satz* 47a *und* 50a *mit dem Zusatz, daß, wenn* $f = \frac{q-1}{2}$, *nur Funktionen vom Teiler* 1 *in Frage kommen, daß aber für* $f = \frac{q+1}{2}$ *die zu den beiden Darstellungen gehörende Schar vom Teiler* q *durch den Operator* T_q^q *in sich übergeht.*

§ 13.

Zusammenhänge mit der Theorie der binären Thetareihen und der imaginär-quadratischen Körper $K(\sqrt{-q})$. Charakteristische Eigenschaften der Zetafunktionen dieser Körper.

Bei den Darstellungen zweiter Art sind nun, wenn $q \equiv 3 \pmod 4$, bemerkenswerte Zusammenhänge mit der Theorie der imaginär-quadratischen Zahlkörper und den binären Thetareihen vorhanden. Ich habe sie in einer früheren Arbeit über Dirichlet-Reihen schon in den Grundzügen besprochen[5]).

[5]) E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung. Mathem. Annalen 112 (1936), S. 694.

Die Bestimmung der Darstellung $\mathfrak{S}(k, q)$, d. h. die Berechnung der Multiplizitäten $x, y, u, \ldots$ in (45) ist für Primzahlen q im wesentlichen geleistet, sobald $k \geqq 2$[4]). (Für $k = 1$ treten besondere Schwierigkeiten auf, welche mit dem Riemann-Rochschen Satz zusammenhängen.) Das Ergebnis ist, daß in $\mathfrak{S}$ alle algebraisch-konjugierten irreduziblen Darstellungen dieselbe Vielfachheit haben, insbesondere auch die in Satz 57 genannten Darstellungen, sobald $q \equiv 1 \pmod{4}$. Ist dagegen $q \equiv 3 \pmod{4}$, so haben die beiden verwandten Darstellungen $\mathfrak{G}_f^{(1)}$, $\mathfrak{G}_f^{(2)}$ $\left(f = \frac{q+1}{2}\right.$ für gerade k, und $\left. f = \frac{q-1}{2} \text{ für ungerade } k\right)$ nicht die gleiche Vielfachheit, und der Charakter von $\mathfrak{S}$ ist eine nichtreelle Zahl aus $K(\sqrt{-q})$. Daß die konjugierten algebraischen Zahlen in bezug auf das, scheinbar durch rationale Angaben bestimmte algebraische Gebilde $\Gamma(q)$ nicht gleichberechtigt sind, hat seinen Grund darin, daß die einfachen Charaktere von $\mathfrak{M}(q)$ zwar für $q \equiv 1 \pmod{4}$ alle reell sind, nicht aber für $q \equiv 3 \pmod{4}$, wo gerade nur die Charaktere der beiden $\mathfrak{G}_f$ nicht reell sind. Die positiv imaginären Zahlen sind dann durch die Existenz der Modulfunktionen nur in der oberen Halbebene ausgezeichnet.

Die Differenz der Multiplizitäten

$$y_1 - y_2 \text{ für gerade } k; \quad w_1 - w_2 \text{ für ungerade } k$$

erweist sich nun[6]) bis auf den Faktor ± 1 als die Klassenzahl $h = h(\sqrt{-q})$ des Körpers $K(\sqrt{-q})$ und zwar positiv, wenn die Bezeichnung der Indizes 1, 2 so gewählt wird, daß die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ in den $C(U)$ die Zahlen ζ^n mit $n =$ quadratischer Rest mod. q (und eventuell noch die Wurzel 1) sind. Es gibt also genau h Funktionen-Systeme zu den $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ mehr als zu $\mathfrak{G}_f^{(2)}$.

Andererseits kann man aus binären Thetareihen, in deren Exponenten die binären quadratischen Formen der Diskriminante $-q$ vorkommen, sich genau h Systeme von je f Modulformen zur Darstellung $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ bilden. Ihre Dirichlet-Reihen sind in der Theorie von $K(\sqrt{-q})$ bekannt als „*Zetafunktionen mit Größencharakteren*" und besitzen eine Eulersche Produktentwicklung. Die Thetareihen sind daher charakteristische Wurzeln der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$, die nach Satz 50a zu diesen Darstellungen $\mathfrak{G}_f^{(1)} + \mathfrak{G}_f^{(2)}$ gehört. Dadurch sind sie also endlich-vieldeutig bestimmt.

---

[6]) E. Hecke, Über das Verhalten der Integrale 1. Gattung ..., Abh. Math. Sem. Hamburg 8 (1931), S. 280. Hier ist die Rechnung für $k = 2$ durchgeführt, vgl. auch H. Spies, Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod. q^n ... Mathem. Annalen 111 (1935), S. 346.

Im einzelnen liegen die Verhältnisse so: Die Größencharaktere[7]) der Zahlen μ des Körpers $K(\sqrt{-q})$ sind die Potenzen

$$\lambda^{k-1}(\mu) = \left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

(Die übliche Bezeichnung „$\lambda(\mu)$" wird wohl keine Verwechslung mit den Matrizen $\lambda(n)$ erzeugen). Für Ideale $\mathfrak{a}$ werden in bestimmter Weise damit zusammenhängende Größencharaktere mod. $\sqrt{-q}$ erklärt von der Form

$$\lambda_{k-1}(\mathfrak{a}) \cdot \psi(\mathfrak{a}),$$

wo $\psi(\mathfrak{a})$ ein Klassencharakter mod. $\sqrt{-q}$ ist. Für Hauptideale $\mathfrak{a} = (\mu)$ sind sie von der Gestalt

$$\lambda^{k-1}(\mu) \cdot \psi(\mu)$$

mit einem Restcharakter $\psi(\mu)$ mod. $\sqrt{-q}$ mit $\psi(-1) = (-1)^{k-1}$. Wegen der Multiplikationseigenschaften der $\lambda(\mathfrak{a})$ besteht für $\Re(s) > 1$ die Gleichung

$$(47) \qquad \zeta(s, k-1, \psi) = \sum_{\mathfrak{a}} \lambda_{k-1}(\mathfrak{a}) \cdot \psi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$
$$= \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \lambda_{k-1}(\mathfrak{p}) \psi(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

$\mathfrak{a}$ durchläuft die ganzen Ideale $\neq 0$, $\mathfrak{p}$ die Primideale aus $K(\sqrt{-q})$. Für $k = 1$ und $\psi \equiv 1$ kommt die Dedekindsche Zetafunktion des Körpers heraus, die anderen Funktionen sind ganze Funktionen. Die Funktionalgleichungen aller dieser Funktionen werden bekanntlich durch Zurückgehen auf die Potenzreihen bewiesen, die sich als Modulformen der Art $(-k, q)$ herausstellen. Man bilde nämlich zunächst die Teilsummen der Reihe (47), die durch die Ideale $\mathfrak{a}$ einer (absoluten) Idealklasse, repräsentiert durch das Ideal $\mathfrak{b}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, h)$, entstehen. So kommt man auf die Reihen

$$(48) \qquad \zeta(s, \lambda_{k-1}, \psi, \mathfrak{b}_l) = N(\mathfrak{b}_l)^s \cdot \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{b}_l)} \lambda^{k-1}(\mu) \psi(\mu) N(\mu)^{-s}$$
$$= N(\mathfrak{b}_l)^s \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{b}_l)} \mu^{k-1} \psi(\mu) N(\mu)^{-\left(s + \frac{k-1}{2}\right)}.$$

Die Potenzreihen zu $\zeta\left(s - \frac{k-1}{2}, \lambda_{k-1}, \psi, \mathfrak{b}_l\right)$ sind endlich die binären Thetareihen[8])

$$(49) \qquad \vartheta_k(\tau, \psi, \mathfrak{b}_l) = \sum_{\mu \equiv 0 \,(\mathrm{mod.}\, \mathfrak{b}_l)} \mu^{k-1} \psi(\mu) e^{2\pi i \tau \frac{N(\mu)}{Bq}}.$$

---

[7]) E. Hecke, Über eine neue Art von Zetafunktionen ... II. Mathem. Zeitschr. 6 (1920), S. 43.

[8]) E. Hecke, Zur Theorie der elliptischen Modultunktionen. Mathem. Annalen 97 (1926), § 3, S. 222.

B ist die Norm von $\mathfrak{b}_l$. Diese Reihen für festes k, l und variables $\psi(\mu)$ bilden ein System von f Modulformen von der Art $(-k, q)$, welches sich nach der Darstellung $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ umsetzt. Das Verhalten bei dem Operator $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ergibt dann das System von Funktionalgleichungen für $\zeta(s, \lambda)$. Die Kombinationen

$$\zeta\left(s - \frac{k-1}{2}, \lambda_{k-1}, \psi\right)$$

mit festem k und variablem Bestandteil ψ sind linear äquivalent mit (48) für $s - \frac{k-1}{2}$ und haben eine Eulersche Produktentwicklung von der in § 8 betrachteten Art. Also sind sie nach Satz 42 charakteristische Wurzeln der betreffenden Matrizen $\Phi(s)$. Damit ist bewiesen:

Satz 58. *Für $k \geqq 2$ sind zu der einen Darstellung $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ h verschiedene Systeme von je f Eigenfunktionen des Operatorenringes der T_n bzw. der T_m^q vorhanden. Für $k = 1$ sind unter den Funktionen* (49) *dagegen nur $\frac{h+1}{2}$ verschiedene Systeme vorhanden.*

Der letzte Teil folgt daraus, daß bei $k = 1$ eine jede Idealklasse im wesentlichen dieselben Funktionen wie die reziproke Klasse liefert.

Nun werden nach dem allgemeinen Satz 47a die Funktionen von $\mathfrak{G}_f^{(1)}$ durch den Operator T_n in Funktionen von $\mathfrak{G}_f^{(2)}$ übergeführt, falls n quadratischer Nichtrest mod. q ist. Der scheinbare Widerspruch mit der Eigenschaft „Eigenfunktion aller T_n" findet seine Erklärung durch

Satz 59. *Für jede der in Satz* 58 *genannten Eigenfunktionen F gilt*

$$F | T_n = 0,$$

wenn n quadratischer Nichtrest mod. q *ist.*

Es genügt, den Satz für Primzahlen $n = p$ zu beweisen. Da folgt er aber aus der Gestalt des p-Bestandteiles in dem Euler-Produkt für die Primideale zweiten Grades durch die Anwendung von Satz 42, § 9.

Bei $k = 1$ sind, wie erwähnt, die fraglichen Anzahlen w_1, w_2 noch nicht bestimmt worden. Immerhin läßt sich hier wenigstens für die Dedekindsche Zetafunktion eine charakteristische Eigenschaft angeben. Ihre Potenzreihe ist charakteristische Wurzel der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zu den verwandten Darstellungen $\mathfrak{G}_f^{(1)} + \mathfrak{G}_f^{(2)}$. Ihr konstantes Glied ist von Null verschieden, weil die Dirichlet-Reihe bei $s = 1$ einen Pol hat. Also muß nach § 10 diese Wurzel zu der Schar der Eisenstein-Reihen gehören. Aus meiner allgemeinen Theorie der Eisenstein-Reihen[9]) folgt aber, daß nur

[9]) Vgl. die in [3]) zitierte Arbeit, S. 214.

zur Darstellung $\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}}$, nicht aber zu $\mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$ solche Reihen gehören. Und zwar gibt es nur ein einziges System, das zu dieser Darstellung gehört. Also gibt es dafür auch nur eine einzige Eigenfunktion vom Teiler q, und da die Eigenfunktionen vom Teiler 1 bei $\tau = \infty$ offenbar verschwinden müssen, so folgt

Satz 60. *Die Zetafunktion von $K(\sqrt{-q})$ ist die Dirichlet-Reihe derjenigen eindeutig bestimmten Modulform von der Art $(-k, q)$, welche charakteristische Wurzel der Matrizen $\mathsf{B}(\tau)$ zu den Darstellungen $\mathfrak{G}^{(1)}_{\frac{q+1}{2}} + \mathfrak{G}^{(2)}_{\frac{q+1}{2}}$ ist und bei $\tau = \infty$ nicht verschwindet.*

Beispiele und Anwendungen der allgemeinen Theorie auf die Theorie der quadratischen Formen von mehr als zwei Variabeln sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Hamburg, 20. Januar 1937.

(Eingegangen am 20. 1. 1937.)