Zu den Entwicklungen nach Eigenfunktionen linearer symmetrischer Integralgleichungen.

Von

Otto Blumenthal in Aachen.

E. Schmidt[1]) hat mit Hilfe einer klassisch gewordenen Schlußreihe die Entwickelbarkeit einer quellenmäßig dargestellten Funktion nach den Eigenfunktionen einer linearen Integralgleichung mit symmetrischem Kern unmittelbar auf die Tatsache der Existenz der Eigenwerte gegründet. Die folgende Darstellung benutzt ein schärferes Hilfsmittel, nämlich eine obere Grenze für den n-ten Eigenwert, und kommt dadurch zu einer expliziten oberen Schranke für den Rest der Entwicklung, in welche der Stetigkeitsgrad des Kerns als wesentliches Element eingeht. Diese Verbesserung wird ermöglicht durch Kelloggs[2]) schönes Iterationsverfahren zur Berechnung eines Eigenwertes. — Da die neue Anordnung auch sonst Vorteile zu haben scheint, gebe ich sie lückenlos, ohne für bekannte Schlüsse auf Literatur zu verweisen.

1. Von dem symmetrischen Kern $K(s,t)$[3]) setzen wir voraus, daß $\int K^2(s,t)\,ds$ für alle t des abgeschlossenen Intervalls existiert und beschränkt ist und daß außerdem $\int (K(s,t)-K(s,t_1))^2\,ds$ mit $|t-t_1|$ gegen Null geht[4]). Unter diesen Bedingungen gelten Kelloggs Resultate, von denen wir folgende gebrauchen: Ausgehend von einer Funktion $f_0(t)$ mit endlichem und von Null verschiedenem $\int f_0^2(s)\,ds$ wird gebildet:

$$\bar f_0(t) = \frac{f_0(t)}{\sqrt{\int f_0^2(s)\,ds}}, \qquad f_1(t) = \int K(s,t)\,\bar f_0(s)\,ds;$$
$$\vdots$$
$$\bar f_i(t) = \frac{f_i(t)}{\sqrt{\int f_i^2(s)\,ds}}, \qquad f_{i+1}(t) = \int K(s,t)\,\bar f_i(s)\,ds;$$
$$\vdots$$

---

1) Math. Ann. **63** (1907).

2) Math. Ann. **86** (1922).

3) s und t sind ein- oder mehrdimensionale Variable, wir bevorzugen aber im folgenden die eindimensionale Sprechweise.

4) Die Konvergenz gegen Null ist *gleichmäßig in t*, d. h. es existiert bei gegebenem ε eine Größe δ, so daß *für alle t*

$$\int (K(s,t)-K(s,t_1))^2\,ds < \varepsilon \quad \text{für} \quad |t-t_1| < \delta.$$

Dies zeigt man leicht mit einem dem Beweis des Satzes von der gleichmäßigen Stetigkeit nachgebildeten Verfahren.

Falls $f_1(t)$ nicht identisch verschwindet, ist

$$\int f_i^2(s)\,ds \leqq \int f_{i+1}^2(s)\,ds \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

und

$$\lim_{i \to \infty} \int f_i^2(s)\,ds = \frac{1}{\lambda^2},$$

wo λ ein Eigenwert ist. Das Gleichheitszeichen in $\leqq$ gilt nur, wenn $f_{i-1}(s)$ bereits Eigenfunktion ist, und wird im folgenden weggelassen.

Insbesondere ist also $\int f_1^2(s)\,ds < \frac{1}{\lambda^2}$. Diese Ungleichung verwenden wir, indem wir $f_0(t) = K(t, \tau)$ mit festem τ wählen. Dabei ist τ der Einschränkung unterworfen, daß $\int K^2(s, \tau)\,ds$ nicht verschwindet. Dann wird

$$f_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\int K^2(s,\tau)\,ds}} \int K(s,t)\,K(s,\tau)\,ds = \frac{J(t,\tau)}{\sqrt{\int K^2(s,\tau)\,ds}},$$

wo also $J(t, \tau)$ eine Abkürzung für den sonst $K^{(2)}(t, \tau)$ genannten iterierten Kern ist:

$$J(t,\tau) = \int K(s,t)\,K(s,\tau)\,ds. \tag{1.1}$$

Unter unseren Voraussetzungen über $K(s, t)$ [man berücksichtige Fußnote [4])] ist $J(t, \tau)$ eine stetige Funktion beider Veränderlicher. Sie ist außerdem nicht identisch Null, weil $J(\tau, \tau) = \int K^2(s, \tau)\,ds > 0$. Also folgt

$$\lambda^2 < \frac{\int K^2(s,\tau)\,ds}{\int J^2(s,\tau)\,ds} \tag{1.2}$$

mit von Null verschiedenem Nenner [5]).

2. Wir bezeichnen mit $K_n(s, \tau)$ den „verarmten" Kern

$$K_n(s,\tau) = K(s,\tau) - \sum_1^n \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu} \tag{2.1}$$

[$\varphi_\nu(s)$ orthogonale, normierte Eigenfunktionen],

dessen absolut kleinster Eigenwert λ_{n+1} ist, und finden als seinen Iterierten

$$J_n(s,\tau) = J(s,\tau) - \sum_1^n \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu^2}, \tag{2.2}$$

insbesondere

$$\int K_n^2(s,\tau)\,ds = J_n(\tau,\tau) = \int K^2(s,\tau)\,ds - \sum_1^n \frac{\varphi_\nu^2(\tau)}{\lambda_\nu^2}. \tag{2.21}$$

---

[5]) Natürlich läßt sich auch aus E. Schmidts Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte mittels der iterierten Kerne eine obere Grenze für den Eigenwert gewinnen, diese ist aber weniger einfach und für das folgende unhandlich.

Die Ungleichung (1.2), auf $K_n(s,\tau)$ angewandt, ergibt

(2.3) $$\lambda_{n+1}^2 < \frac{\int K_n^2(s,\tau)\,ds}{\int J_n^2(s,\tau)\,ds} < \frac{\int K^2(s,\tau)\,ds}{\int J_n^2(s,\tau)\,ds} \qquad \text{[wegen (2.21)]}$$

und daher

(2.4) $$\lim_{n\to\infty} \int J_n^2(s,\tau)\,ds = 0\,[6]).$$

3. Hilfssatz aus der Reihenlehre. *Ist Σa_ν^2 konvergent, so ist die Reihe $\Sigma a_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}$ absolut und gleichmäßig konvergent.*

Denn aus (2.21) folgt die Konvergenz von $\sum \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}$. Demnach ist

$$\sum_p^q \left| a_\nu \frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu} \right| \leqq \sqrt{\sum_p^q a_\nu^2 \cdot \sum_p^q \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}} < \sqrt{\sum_p^q a_\nu^2}\sqrt{\sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}}$$
$$\leqq \sqrt{\sum_p^q a_\nu^2} \cdot \sqrt{J(s,s)}.$$

$J(s,s)$ ist beschränkt, daher bleiben die Reste für alle s unter einer allein durch die Güte der Konvergenz von Σa_ν^2 festgelegten Schranke.

Insbesondere konvergiert

(3.1) $$L(s;\tau) = \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu^2}$$

für jedes τ absolut und gleichmäßig in s und stellt daher eine stetige Funktion von s dar.

4. Infolgedessen läßt sich in (2.4) das lim-Zeichen unter das Integral ziehen, und wir erhalten

$$\int [J(s,\tau) - L(s;\tau)]^2\,ds = 0.$$

Daraus folgt aber wegen der Stetigkeit von $J(s,\tau)$ und $L(s;\tau)$ in s

(4.1) $$J(s,\tau) = L(s;\tau) = \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu^2};$$

insbesondere also

(4.11) $$\int K^2(s,\tau)\,ds = J(\tau,\tau) = \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu^2(\tau)}{\lambda_\nu^2} \quad \text{(Parsevalsche Gleichung).}$$

[6]) Diese Limes-Gleichung gilt erst recht auch in dem oben ausgeschlossenen Fall, daß $\int K^2(s,\tau)\,ds$, oder allgemeiner ein $\int K_{n_0}^2(s,\tau)\,ds$ verschwindet. Denn dann verschwindet nach der Schwarzschen Ungleichung $J_{n_0}(s,\tau)$ für alle s und nach (2.21) verschwinden alle $\varphi_\nu(\tau)\,(\nu > n_0)$.

5. Zum Beweis des Entwicklungssatzes betrachten wir in bekannter Weise eine quadratisch integrierbare Funktion $h(s)$ und das Integral

$$R_n(\tau) = \int h(s) K_n(s,\tau)\, d s. \tag{5.1}$$

Wegen

$$R_n^2(\tau) \leqq \int h^2(s)\, d s \int K_n^2(s,\tau)\, d s$$

und (2.21) und (4.11) geht $R_n(\tau)$ mit wachsendem n gegen Null, also ist

$$\int h(s) K(s,\tau)\, d s = \sum_1^\infty \varphi_\nu(\tau) \cdot \frac{1}{\lambda_\nu} \int h(s)\, \varphi_\nu(s)\, d s. \tag{5.2}$$

Hiermit ist die Konvergenz der Entwicklung bewiesen; es fehlen aber noch die Angaben über *Unbedingtheit und Gleichmäßigkeit* der Konvergenz.

Diese erhält man aus dem Hilfssatz in **3.**, indem man $a_\nu = \int h(s) \varphi_\nu(s)\, d s$ setzt, weil $\Sigma \left[\int h(s)\, \varphi_\nu(s)\, d s\right]^2$ nach der Besselschen Ungleichung konvergent ist. Damit ist dann die Schmidtsche Theorie der Entwicklung nach den Eigenfunktionen vollständig wiedergewonnen.

Die erhaltene Schranke für die gleichmäßige Konvergenz ist aber unbefriedigend, denn sie hängt in unübersichtlicher Weise von der Funktion $h(s)$ ab. Es ist z. B. nicht zu übersehen, ob für eine Klasse von Funktionen $h(s)$ mit beschränktem Quadratintegral die Gleichmäßigkeit der Konvergenz auch gleichartig ist. Die folgenden Entwicklungen verschärfen die bisherigen Resultate und beantworten unter anderem die eben aufgeworfene Frage.

6. Dazu leiten wir aus der Ungleichung (1.2) eine obere Grenze für $\int K^2(s,\tau)\, d s$ ab. Sei also dieser Ausdruck, d. h. $J(\tau,\tau)$, von Null verschieden. Dann läßt sich wegen der Stetigkeit von $J(s,\tau)$ um den Punkt $s = \tau$ eine s-Umgebung von der Größe δ abgrenzen, in der $J(s,\tau) \geqq \frac{1}{2} J(\tau,\tau)$ ist. Daher ist

$$\int J^2(s,\tau)\, d s > \frac{\delta}{4} J^2(\tau,\tau) = \frac{\delta}{4} \left[\int K^2(s,\tau)\, d s\right]^2,$$

und also folgt aus (1.2) die Existenz eines Eigenwertes, für den

$$\lambda^2 < \frac{4}{\delta} \frac{1}{\int K^2(s,\tau)\, d s} \quad \text{oder} \quad \int K^2(s,\tau)\, d s < \frac{4}{\delta} \frac{1}{\lambda^2}. \tag{6.1}$$

Das ist die gesuchte Abschätzung [7]).

---

[7]) Die obere Grenze (6.1) für λ ist von gleicher Bauart wie die aus der Neumannschen Reihe erhältliche untere Grenze [vergl. Goursat, Cours d'Analyse III (1915), S. 346]

$$\lambda^2 > \frac{1}{S} \frac{1}{\max \int K^2(s,\tau)\, d s} \quad (S = \text{Länge des Integrationsintervalls}).$$

Man darf aber nicht vergessen, daß δ noch von τ abhängig ist, weil in seine Definition der Wert $J(\tau,\tau)$ eingeht. Diese Schwierigkeit macht die Hilfsbetrachtungen in **7.** notwendig.

7. Hilfssatz über die Stetigkeit der verarmten iterierten Kerne. Die iterierten Kerne $J_n(s, \tau)$ sind gleichartig stetig, d. h. *es besteht bei gegebenem ε eine von s, τ und n unabhängige Größe Δ, so daß*

$$|J_n(s, \tau) - J_n(\sigma, t)| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad (s-\sigma)^2 + (t-\tau)^2 \leqq \Delta^2.$$

Wir brauchen den Satz nur in dem Sonderfall $t = \tau$ (wenn also nur s variiert) und beweisen ihn deshalb der Einfachheit halber nur unter dieser Annahme.

Nach (4.1) ist

$$J_n(s, \tau) - J_n(\sigma, \tau) = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(\tau)}{\lambda_\nu} \cdot \frac{\varphi_\nu(s) - \varphi_\nu(\sigma)}{\lambda_\nu}$$

und daher

$$\begin{aligned} |J_n(s,\tau) - J_n(\sigma,\tau)|^2 &\leqq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(\tau)}{\lambda_\nu^2} \cdot \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(\varphi_\nu(s) - \varphi_\nu(\sigma))^2}{\lambda_\nu^2} \\ &\leqq \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(\tau)}{\lambda_\nu^2} \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{(\varphi_\nu(s) - \varphi_\nu(\sigma))^2}{\lambda_\nu^2} \\ &= J(\tau, \tau) \cdot \left[\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu^2(\sigma)}{\lambda_\nu^2} - 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(\sigma)}{\lambda_\nu^2} \right] \\ &= J(\tau, \tau) \cdot [J(s, s) + J(\sigma, \sigma) - 2\, J(s, \sigma)]. \end{aligned}$$

Die Klammer [ ] ist aber von n unabhängig und hat für $|s - \sigma| \leqq \Delta$ als Funktion von s ein mit Δ gegen Null gehendes Maximum.

8. Vermöge des Hilfssatzes können wir die Ungleichung (6.1) in folgender Weise auf die verarmten Kerne anwenden. Wir fragen: Für welche Werte n kann es bei gegebenem ε Werte τ geben, für die $\int K_n^2(s, \tau)\, ds \geqq 2\varepsilon$ ist?

Sei Δ_ε die von n und τ unabhängige Länge des Intervalls, in dem $|J_n(s, \tau) - J_n(\tau, \tau)| \leqq \varepsilon$ ist. Ist dann für ein τ

$$\int K_n^2(s, \tau)\, ds \geqq 2\varepsilon,$$

so läßt sich Δ_ε für δ in (6.1) eintragen, und es folgt

$$\lambda_{n+1}^2 < \frac{4}{\Delta_\varepsilon} \frac{1}{\int K_n^2(s, \tau)\, ds} \leqq \frac{2}{\varepsilon \Delta_\varepsilon}. \tag{8.1}$$

Daher: Für alle n oberhalb der durch (8.1) bestimmten Grenze ist für alle τ

$$\int K_n^2(s, \tau)\, ds < 2\varepsilon, \tag{8.2}$$

d. h. diese Integrale gehen gleichmäßig in τ gegen Null.

Dasselbe Resultat läßt sich auch so formulieren: *Man bestimme* ε_n *aus der Gleichung*

(8.31) $$\varepsilon_n \cdot \Delta_{\varepsilon_n} = \frac{2}{\lambda_{n+1}^2},$$

dann ist

(8.32) $$\int K_m^2(s,\tau)\,ds < 2\,\varepsilon_n \qquad \textit{für alle } \tau \textit{ und für } m \geqq n.$$

Damit haben wir auch den gesuchten Satz über den Rest der Entwicklung einer quellenmäßig dargestellten Funktion nach den Eigenfunktionen. Dieser Rest war durch (5. 1) gegeben, kann aber auf Grund von (5. 2) durch Anwendung der Restabschätzung in **3.** noch genauer eingegrenzt werden:

(8.4) $$R_n^2(\tau) \leqq \sum_{n+1}^{\infty} a_\nu^2 \cdot \int K_n^2(s,\tau)\,ds < 2\,\varepsilon_n \sum_{n+1}^{\infty} a_\nu^2,$$

wo

$$\sum_1^{\infty} a_\nu^2 = \int h^2(s)\,ds.$$

Diese Ungleichung beantwortet u. a. die am Ende von **5.** aufgeworfene Frage in bejahendem Sinne.

Insbesondere zeigt (8. 4), daß *die Entwicklung* (4. 1) *des iterierten Kernes gleichmäßig in* s *und* τ *konvergiert,* ein Resultat, das in der Schmidtschen Theorie erst nachträglich durch gewisse Zusatzbetrachtungen herauskommt [8]).

9. Unter recht allgemeinen einschränkenden Annahmen über den Kern läßt sich die Bestimmung von ε_n noch weiter durchführen. Dazu geben wir zunächst (8. 1) eine schärfere Fassung. Ist nämlich die Intervallgröße $\Delta_{\varepsilon_n}^{(n)}$ dadurch definiert, daß

(9. 1) $$|J_m(s,\tau) - J_m(\sigma,\tau)| \leqq \varepsilon_n \quad \text{für} \quad |s-\sigma| \leqq \Delta_{\varepsilon_n}^{(n)} \quad \text{und alle} \quad m \geqq n,$$

so läßt sich diese Größe an Stelle von Δ_{ε_n} in (8. 1) eintragen:

(9. 2) $$\lambda_{n+1}^2 < \frac{4}{\Delta_{\varepsilon_n}^{(n)}} \frac{1}{\int K_n^2(s,\tau)\,ds}.$$

Jetzt möge der Kern $K(s,t)$ als Funktion von s einer Lipschitz-Bedingung genügen. Sei nämlich $a(t)$ eine positive, quadratisch integrable Funktion, so sei

(9. 3) $$|K(s,t) - K(\sigma,t)| < a(t) \cdot |s-\sigma|\ ^{9)}.$$

---

8) Am direktesten nach einer von Szász angegebenen Schlußweise [siehe Enc. Math. Wiss. II, 3 (Artikel C 13 Hellinger-Toeplitz), S. 1522, Fußn. 428].

9) Die Bedingung ist z. B. für den Kern der schwingenden Saite (Fourierreihen) erfüllt.

Dann wird

$$(9.3\,1)\qquad \begin{aligned} &J(s,s)+J(\sigma,\sigma)-2J(s,\sigma)\\ &=\int (K(s,t)-K(\sigma,t))^2\,dt<(s-\sigma)^2\cdot\int a^2(t)\,dt\;=\;A^2(s-\sigma)^2. \end{aligned}$$

Eine leichte Abänderung des Verfahrens der Nr. 7. ergibt dann für $m \geqq n$:

$$\begin{aligned} (J_m(s,\tau)-J_m(\sigma,\tau))^2 &\leqq \sum_{m+1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu^2(\tau)}{\lambda_\nu^2}\sum_{m+1}^{\infty}\frac{(\varphi_\nu(s)-\varphi_\nu(\sigma))^2}{\lambda_\nu^2}\\ &\leqq \sum_{n+1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu^2(\tau)}{\lambda_\nu^2}\cdot\sum_{1}^{\infty}\frac{(\varphi_\nu(s)-\varphi_\nu(\sigma))^2}{\lambda_\nu^2}\\ &=\int K_n^2(s,\tau)\,ds\cdot[J(s,s)+J(\sigma,\sigma)-2J(s,\sigma)]\\ &<\int K_n^2(s,\tau)\,ds\cdot A^2(s-\sigma)^2. \end{aligned}$$

Wählen wir also

$$(9.4)\qquad |s-\sigma|\equiv \Delta_{\varepsilon_n}^{(n)}=\frac{\varepsilon_n}{A\sqrt{\int K_n^2(s,\tau)\,ds}},$$

so erfüllt dieses $\Delta_{\varepsilon_n}^{(n)}$ die gestellten Anforderungen. Diesen Wert tragen wir in (9.2) ein. Dann folgt

$$(9.5)\qquad \lambda_{n+1}^2<\frac{4A}{\varepsilon_n\sqrt{\int K_n^2(s,\tau)\,ds}}\leqq\frac{2^{3/2}A}{\varepsilon_n^{3/2}}$$

oder

$$(9.6)\qquad \varepsilon_n<\frac{2A^{2/3}}{\lambda_{n+1}^{4/3}},$$

und also gilt für die Reste der Reihenentwicklungen nach den Eigenfunktionen die Abschätzung

$$(9.7)\qquad |R_n(\tau)|<2A^{1/3}\sqrt{\sum_{n+1}^{\infty}a_\nu^2}\cdot\frac{1}{\lambda_{n+1}^{2/3}}.$$

Z. B. verschwindet hiernach bei Fourierreihen, wo $\lambda_n = n^2$ ist, der Rest der Entwicklung jeder quellenmäßig dargestellten Funktion von höherer Ordnung als $\frac{1}{n^{4/3}}$. Setzen wir speziell $h(s)$ als stückweise stetig und differenzierbar mit einer endlichen Anzahl von Sprungstellen voraus, so wird $\sum\limits_{n+1}^{\infty} a_\nu^2$ von der Ordnung $\frac{1}{n}$ und im ganzen ergibt sich also für den Rest die Mindestordnung $\frac{1}{n^{11/6}}$. Genau gesagt, bezieht sich diese Abschätzung auf die Restsumme, in der jedes Glied durch den absoluten Betrag ersetzt ist. Da die wirkliche Ordnung dieser Restsumme $\frac{1}{n^2}$ ist, so ist das Resultat auffallend genau. Mit Berücksichtigung der Vorzeichen ist die Ordnung des Restes allerdings $\frac{1}{n^3}$, das eben gesagte zeigt aber, daß man diesem auf speziellen Eigenschaften der $\sin n\tau$ beruhenden Ergebnis durch allgemeine, auf die Schwarzsche Ungleichung gegründete Abschätzungsverfahren nicht nahekommen kann.

10. Zum Mercerschen Satz. Die Schlußweise der Nummern **3.** und **4.** empfiehlt sich auch zum Beweise des Mercerschen Satzes.

Ist der Kern $K(s,t)$ stetig und hat nur positive Eigenwerte, so auch die verarmten Kerne. Daher sind (bekannte Schlußweise) die verarmten Kerne sämtlich positiv definit, daher (wieder bekannte Schlußweise) $K_n(t,t) > 0$, d. h.

$$K(t,t) - \sum_1^n \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu} > 0.$$

Daher ist $\sum \frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu}$ konvergent, und daraus folgt wie in Nr. **3.** die Konvergenz von

$$F(s,t) = \sum_1^\infty \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$$

gleichmäßig in der Variablen s bei festgehaltenem t. Es ist zu beweisen, daß diese Reihe den Kern darstellt. Das folgt aber aus der Parsevalschen Gleichung (4.11), die sich schreiben läßt:

$$\int [K(s,t) - F(s,t)]^2\, ds = 0.$$

Da $F(s,t)$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz in s eine stetige Funktion von s ist, wird

$$K(s,t) = F(s,t), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Zum Beweise schließlich, daß die Reihe $\sum \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(t)}{\lambda_\nu}$ gleichmäßig in s *und* t konvergiert, braucht man, wie üblich, den Satz von Dini.

(Eingegangen am 5. 6. 1934.)