Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen.

Von

Paul Urysohn †.

Meinem Freunde Paul Alexandroff gewidmet.

Inhaltsübersicht.

1. Problemstellung. Eine in einem topologischen Raume [1]) gelegene Menge heißt gemäß der Hausdorffschen Definition *zusammenhängend* [2]), wenn sie sich nicht in zwei nicht leere abgesonderte Teilmengen spalten läßt. Dabei nennen wir zwei Mengen A und B *abgesondert*, wenn sie zueinander fremd sind, und wenn außerdem keine von ihnen einen Häufungspunkt der anderen enthält, d. h. wenn

$$A\bar{B} + B\bar{A} = 0 \tag{1}$$

ist [3]). Der Kürze halber werden wir die Menge $A\bar{B} + B\bar{A}$ durch $H(A, B)$ bezeichnen.

[1]) Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 213.

[2]) loc. cit. S. 244. Die hier gegebene Definition ist mit der Hausdorffschen inhaltlich identisch, aber dem Wortlaute nach von dieser verschieden.

[3]) Mit $\bar{A}$ bezeichne ich immer die „abgeschlossene Hülle“ von A, d. h. diejenige Menge, die aus A durch Hinzufügung aller ihrer Häufungspunkte entsteht; $A \cdot B$ ist

Eine aus einem Punkte bestehende Menge ist offenbar zusammenhängend. Wir werden aber von diesem Falle absehen und im folgenden nur solche zusammenhängende Mengen betrachten, die mehr als einen Punkt enthalten. Es gilt sodann der (von Herrn Hausdorff[4]) bewiesene)

Satz. Eine in einem metrischen Raume[5]) gelegene zusammenhängende Menge ist mindestens von der Mächtigkeit des Kontinuums[6]).

Von der Überzeugung ausgehend, daß sich jedes topologische Ergebnis auf rein topologischer Grundlage — d. h. mit topologischen Voraussetzungen (Ersetzung des metrischen durch einen geeignet gewählten topologischen Raum!) und eben solchen Hilfsmitteln — beweisen läßt[7]), habe ich eine möglichst umfangreiche Klasse von *topologischen* Räumen zu be-

---

der Durchschnitt (gemeinsamer Teil) von A und B, $A+B$ ihre Vereinigungsmenge, $A-B$ ihre Differenz (Menge der in B nicht enthaltenen Punkte von A; dabei wird *nicht* vorausgesetzt, daß $B \subset A$ ist). Endlich bedeutet $B \subset A$, daß B eine (echte *oder unechte*) Teilmenge von A ist.

[4]) loc. cit. S. 248.

[5]) loc. cit. S. 211.

[6]) Daß auch höhere Mächtigkeiten vorkommen können, ist leicht zu ersehen. So ist z. B. der Raum, dessen „Punkte" die auf $[0\,1]$ erklärten *beschränkten* Funktionen $f(x)$ sind, zusammenhängend, wenn man die Entfernung $\varrho(f, g)$ als die *obere Schranke* von $|f(x)-g(x)|$ definiert: die „Punkte" $f(x)$ und $g(x)$ lassen sich nämlich durch die „Strecke" $(1-t)f(x)+tg(x)$, $0 \leqq t \leqq 1$, verbinden. Man kann auch einen zusammenhängenden Raum von beliebiger Mächtigkeit $\aleph_\tau > 2^{\aleph_0}$ erhalten, indem man in einem Systeme von (abstrakt gegebenen) Einheitsstrecken $J_\gamma = [a_\gamma, b_\gamma]$ (wo $\{\gamma\}$ ein Indizessystem von der Mächtigkeit $\aleph_\tau$ ist) sämtliche a_γ untereinander identifiziert und die Entfernung zweier zu zwei *verschiedenen* J_γ gehörender Punkte x und $y = \overline{ax} + \overline{ay}$ setzt.

[7]) Wenn die zweite Forderung (die Hilfsmittel) nur methodologisch von Interesse ist, so ist die erste (die Voraussetzungen) auch prinzipiell recht wichtig. Die mit dieser Fragestellung verknüpften Untersuchungen gipfeln in der Lösung des sogenannten „*Metrisationsproblems*": die (rein topologischen) Bedingungen aufzustellen, unter denen ein topologischer Raum als metrischer Raum aufgefaßt werden darf (d. h. einem metrischen Raume homöomorph ist).

In der Note „P. Alexandroff et P. Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante*...", C. R. Paris 177 (1923), S. 1274, hat dieses Problem eine vollständige Erledigung gefunden, jedoch in einer wenig brauchbaren Form. Eine völlig befriedigende Lösung des Metrisationsproblems ist bis jetzt nur in den folgenden zwei (übrigens äußerst wichtigen) Fällen bekannt:

1. Für kompakte Räume: hier ist das Hausdorffsche II. Abzählbarkeitsaxiom (vgl. Fußnote [8])) die notwendige und hinreichende Bedingung. Vgl. P. Urysohn, „Über die Metrisation der kompakten topologischen Räume", Math. Ann. 92, S. 275, sowie die demnächst in diesen Annalen erscheinende Arbeit desselben Verfassers „Zum Metrisationsproblem", wo u. a. ein sehr einfacher Beweis dieses Satzes gegeben ist.

2. Für die *im kleinen* kompakten Räume. Vgl. P. Alexandroff, „Über die Metrisation der im kleinen kompakten topologischen Raume", Math. Ann. 92, S. 274 (wo sich auch Hinweise auf weitere Arbeiten desselben Verfassers befinden).

stimmen gesucht, in der der genannte Satz noch richtig ist; insbesondere galt es zu entscheiden, ob das nicht für *alle*, oder wenigstens für alle dem II. Abzählbarkeitsaxiome[8]) genügenden topologischen Räume der Fall ist[9]).

Ich beabsichtige hier diejenigen — vielleicht ziemlich unerwarteten[10]) — Ergebnisse mitzuteilen, welche ich auf diesem Wege erhalten habe[11]).

Kapitel I. Hilfsbegriffe. Trennung[12]).

2. Regularität. Ein topologischer Raum heißt im Punkte a *regulär*, wenn die Bedingung $\boldsymbol{R}$ (oder die ihr gleichwertige Bedingung $\boldsymbol{R}'$) erfüllt ist:

$\boldsymbol{R}$. *In jeder Umgebung U_a des Punktes a kann man eine der Bedingung*

$$\overline{V}_a \subset U_a \tag{2}$$

genügende Umgebung V_a finden.

$\boldsymbol{R}'$. In jeder Umgebung U_a kann man eine solche Umgebung V_a finden, daß jeder außerhalb U_a gelegener Punkt x mindestens eine zu V_a fremde Umgebung U_x besitze.

Ein topologischer Raum, der in jedem Punkte regulär ist, heißt *schlechtweg regulär*[13]).

---

[8]) Hausdorff, a. a. O. S. 263. Es wäre besser, dieses Axiom folgendermaßen zu formulieren: „Es gibt wenigstens ein dem gegebenen Systeme von Umgebungen *gleichwertiges* (loc. cit. S. 260) System, das aus abzählbar vielen verschiedenen Umgebungen besteht"; denn nur bei dieser Verabredung hat der Ausdruck „topologischer Raum, in dem das II. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt ist" einen präzisen topologischen Sinn. Entsprechendes gilt auch für das I. Abzählbarkeitsaxiom.

Meines Erachtens wäre es auch zweckmäßig, in der obigen Formulierung das Wort „verschiedenen" fortzulassen, d. h. aus endlich vielen Punkten bestehende Räume als dem II. Abzählbarkeitsaxiome genügende zu betrachten. In dieser Arbeit sind *beide* Modifikationen angenommen.

[9]) Letzteres Problem ist mir von Herrn P. Alexandroff mitgeteilt worden.

[10]) Vgl. Kap. III.

[11]) Das Hauptresultat dieser Abhandlung habe ich im März 1922 der Moskauer Mathematischen Gesellschaft vorgetragen.

[12]) Der Inhalt dieses Kapitels ist (außer den §§ 4 u. 7) nicht neu. Ich werde hier eine kurze Übersicht derjenigen Begriffe geben, die uns im folgenden von Nutzen sein werden. Für den Beweis derjenigen Sätze, die ich hier ohne Beweis ausspreche, vgl. die Abhandlung „P. Alexandroff et P. Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*", die demnächst in den Fund. Math. erscheinen wird.

[13]) Die Forderung der Regularität des Raumes tritt zum ersten Male bei Herrn Vietoris („Stetige Mengen", Monatsh. f. Math. u. Phys. 1921, S. 173) als ein Zusatzaxiom, dem alle von ihm betrachteten Räume genügen müssen, auf. Übrigens ist dieses Zusatzaxiom insofern überflüssig, daß bei den von Herrn Vietoris allein in Betracht gezogenen *bikompakten* (nach seiner Terminologie „lückenlosen") Räumen

Es sei, in einem regulären Raume, F eine abgeschlossene Menge und x ein außerhalb F gelegener Punkt. Dann kann man zwei elementenfremde Gebiete[14]) G_F und G_x finden, die F bzw. x enthalten: $G_F \supset F$, $G_x \supset x$. Umgekehrt, ist dies für beliebige F und x (F zu x fremd) der Fall, so ist der Raum regulär[15]).

3. Trennung. Letzteres Ergebnis ladet zu folgender Definition ein:

Wir werden sagen, daß die Mengen A und B *durch Gebiete trennbar sind*, wenn zwei elementenfremde Gebiete $G_A \supset A$ und $G_B \supset B$ vorhanden sind. Selbstverständlich kann das nur dann der Fall sein, wenn $A \cdot B = 0$ ist.

Diese Definition gibt zur Einführung folgender Raumkategorien Anlaß[16]):

α) Räume, in denen ein beliebiges Punktepaar durch Gebiete trennbar ist. Diese Eigenschaft kommt allen topologischen Räumen zu; durch sie werden nämlich die topologischen Räume in der allgemeineren Kategorie der Fréchetschen *(H)-Klassen*[17]) ausgezeichnet.

β) Räume, in denen jede abgeschlossene Menge von jedem (in dieser Menge nicht enthaltenem) Punkte durch Gebiete trennbar ist: das sind die regulären Räume.

γ) Räume, in denen irgend zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen durch Gebiete trennbar sind. Wir wollen sie *normale Räume* nennen.

δ) Räume, in denen irgend zwei abgesonderte Mengen durch Gebiete trennbar sind. Diese Räume werden wir *vollständig normal* nennen.

Jeder Raum, der zu einer dieser Kategorien gehört, gehört auch zu den vorangehenden, nicht aber umgekehrt, wie man durch Beispiele zeigen kann[16]). Die metrischen Räume sind vollständig normal[18]), gehören also zu allen vier Kategorien.

4. Satz. *In einem regulären Raume E sind zwei abgesonderte Mengen A und B immer dann durch Gebiete trennbar, wenn sie beide höchstens abzählbar sind*[19]).

---

dieses Axiom *von selbst* erfüllt ist (vgl. die in der Fußnote [12]) zitierte Abhandlung). Die Benennung „regulär", sowie die Regularität *in einem Punkte* ist von Herrn P. Alexandroff eingeführt worden.

[14]) Im Hausdorffschen Sinne: loc. cit. S. 215.

[15]) Vgl. Fußnote [12]).

[16]) Vgl. H. Tietze, Beiträge ..., Math. Ann. 88, S. 290, ferner die in [12]) zitierten Arbeiten, sowie andere Arbeiten von P. Alexandroff und dem Verfasser.

[17]) Siehe z. B. M. Fréchet, *Sur les ensembles abstraits*, Annales Ec. Norm. (3) **38** (1921), S. 365–366.

[18]) Siehe Tietze, a. a. O [16]) S. 310.

[19]) Formulierung und Beweis dieses Satzes für den Fall zweier elementenfremder

Beweis. Es sei

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}, \qquad B = \{b_1, \ldots, b_2, \ldots, b_n, \ldots\};$$

um den Fall endlicher Mengen nicht auszuschließen, setzen wir nicht voraus, daß $a_n \neq a_m$ und $b_n \neq b_m$ für $n \neq m$ ist. Wegen $H(A, B) = 0$ ist jedes a_n zu $\bar{B}$ und jedes b_n zu $\bar{A}$ fremd.

Es seien nun U_{a_1} und U_{b_1} zwei elementenfremde Umgebungen. Da $E - \bar{B}$, und also auch $U_{a_1}(E - \bar{B}) = U_{a_1} - \bar{B}$ ein den Punkt a_1 enthaltendes Gebiet ist, so gibt es eine Umgebung $V_{a_1} \subset U_{a_1} - \bar{B}$; folglich, wegen der Regularität, auch eine Umgebung W_{a_1}, die in $U_{a_1} - \bar{B}$ *mit ihrer Grenze* enthalten ist:

$$\overline{W}_{a_1} \dot{\subset} V_{a_1} \subset U_{a_1} - \bar{B}.$$

In derselben Weise können wir auf die Existenz einer der Bedingung

$$\overline{W}_{b_1} \subset U_{b_1} - \bar{A}$$

genügenden Umgebung W_{b_1} schließen. Zufolge $U_{a_1} \cdot U_{b_1} = 0$ sind also folgende Mengengleichungen erfüllt:

$$(3_1) \qquad \begin{cases} \overline{W}_{a_1} \cdot \bar{B} = 0, \quad \overline{W}_{b_1} \cdot \bar{A} = 0, \\ \overline{W}_{a_1} \cdot \overline{W}_{b_1} = 0. \end{cases}$$

Weiter verfahren wir durch Induktion. Wir setzen voraus, daß Umgebungen $W_{a_1}, W_{a_2}, \ldots, W_{a_n}$ und $W_{b_1}, W_{b_2}, \ldots, W_{b_n}$ gefunden worden sind, die die Bedingungen

$$(3_n) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \overline{W}_{a_i} \cdot \bar{B} = 0, \quad \overline{W}_{b_k} \cdot \bar{A} = 0 \\ \overline{W}_{a_i} \cdot \overline{W}_{b_k} = 0 \end{array} \right\} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllen. Wir werden zeigen, daß dann auch $W_{a_{n+1}}$ und $W_{b_{n+1}}$ in derselben Weise gefunden werden können. Es seien, in der Tat, $U_{a_{n+1}}$ und $U_{b_{n+1}}$ zwei zueinander fremde Umgebungen. Da $a_{n+1} \subset A \subset \bar{A}$ ist, so folgt aus (3_n), daß a_{n+1} zur abgeschlossenen Menge[19a])

$$(4') \qquad Q_n = \bar{B} + \sum_{k=1}^{n} \overline{W}_{b_k}$$

fremd ist, also zum Gebiete $E - Q_n$ gehört. Desgleichen ist b_{n+1} zur Menge

$$(4) \qquad P_n = \bar{A} + \sum_{i=1}^{n} \overline{W}_{a_i}$$

fremd.

---

abgeschlossener Mengen sind mir von Herrn P. Alexandroff mitgeteilt worden; dasselbe gilt auch von der nachstehenden Folgerung. Auch läuft der hier wiedergegebene Beweis des allgemeinen Falles mit dem Alexandroffschen Beweise durchaus parallel

[19a]) Das Summenzeichen Σ (auf Mengen oder Punkte angewandt) bedeutet immer Vereinigungsmenge.

Aus $a_{n+1} \subset U_{a_{n+1}} \cdot (E - Q_n) = U_{a_{n+1}} - Q_n$, wo letztere Menge ein Gebiet ist, schließen wir, wie vorher, auf die Existenz einer $W_{a_{n+1}}$, für die

$$\overline{W}_{a_{n+1}} \subset U_{a_{n+1}} - Q_n$$

ist. Ebenso erhalten wir

$$\overline{W}_{b_{n+1}} \subset U_{b_{n+1}} - P_n.$$

In den daraus folgenden Gleichungen

$$\overline{W}_{a_{n+1}} \cdot Q_n = 0, \quad \overline{W}_{b_{n+1}} \cdot P_n,$$
$$\overline{W}_{a_{n+1}} \cdot \overline{W}_{b_{n+1}} = 0$$

sind, wie aus (4) und (4') ersichtlich wird, diejenigen Gleichungen enthalten, die (3_n) zu den analogen Gleichungen (3_{n+1}) ergänzen.

Damit ist die Existenz von Umgebungen W_{a_i} und W_{b_k} gesichert, die so beschaffen sind, daß

$$(3_\omega) \qquad \overline{W}_{a_i} \cdot \overline{W}_{b_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n, \ldots).$$

Wir setzen jetzt

$$G_A = \sum_{i=1}^{\infty} W_{a_i}, \quad G_B = \sum_{k=1}^{\infty} W_{b_k}.$$

G_A und G_B sind offenbar Gebiete, die wegen (3_ω) zueinander fremd sind. Nun ist aber

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \subset \sum_{i=1}^{\infty} W_{a_i} = G_A \quad \text{und} \quad B \subset G_B,$$

d. h. A und B sind durch Gebiete trennbar, w. z. b. w.

Folgerung. *Jeder abzählbare* (d. h. aus abzählbar vielen Punkten bestehende) *reguläre Raum ist vollständig normal.*

Für abzählbare Räume fallen also die Kategorien β, γ und δ zusammen. Es gibt übrigens, wie wir bald sehen werden, irreguläre abzählbare Räume.

5. Trennung durch abgeschlossene Gebiete. Wir werden sagen, daß die Mengen A und B *durch abgeschlossene Gebiete trennbar sind,* wenn zwei Gebiete $G_A \supset A$ und $G_B \supset B$ derart gefunden werden können, daß

$$(5) \qquad \overline{G}_A \cdot \overline{G}_B = 0$$

sei.

Diese Definition gestattet uns, vier neue Kategorien $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\delta}$ von Räumen einzuführen, die aus α, β, γ, δ dadurch entstehen, daß man in den entsprechenden Forderungen die „Gebiete“ durch „abgeschlossene Gebiete“ ersetzt. Nun ist es aber leicht zu zeigen[15]), daß die Forderung $\bar{\beta}$ mit β und $\bar{\gamma}$ mit γ äquivalent ist. Was aber die Forderung $\bar{\delta}$ anbetrifft, so ist sie eine viel zu weitgehende: sie schließt z. B. alle diejenigen Räume aus, in denen sei es auch nur eine konvergente Folge existiert.

Nur in $\bar{\alpha}$ haben wir eine neue wichtige Kategorie erhalten, die sich zwischen α und β einschiebt (denn die Forderung $\bar{\alpha}$ folgt aus $\bar{\beta} = \beta$), aber mit keiner von ihnen zusammenfällt, wie aus den im nächsten Paragraphen gegebenen Beispielen ersichtlich ist [20]).

Wenn wir zwei Punkte, die durch abgeschlossene Gebiete nicht getrennt werden können, *untrennbare Punkte* nennen, so können wir die der Forderung $\bar{\alpha}$ genügenden Räume als *Räume ohne untrennbare Punkte* bezeichnen.

Es sei noch bemerkt, daß ein untrennbares Punktepaar a, b auch dadurch gekennzeichnet werden kann, daß ein beliebiges Umgebungspaar U_a, U_b der Ungleichung

$$(5^*) \qquad \bar{U}_a \cdot \bar{U}_b \neq 0$$

Genüge leistet [15]).

6. Ein abzählbarer Raum E mit untrennbarem Punktepaar. Es sei

$$E = a + b + \{a_{ik}\} + \{b_{ik}\} + c_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n, \ldots);$$

die Punkte von E werden wir gemäß ihrer Indizeszahl als Punkte 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung bezeichnen.

Die Umgebungen definieren wir folgendermaßen:

$$V_{a_{ik}} = a_{ik}, \qquad V_{b_{ik}} = b_{ik}$$

(d. h. die Punkte zweiter Ordnung sind isoliert);

$$\left.\begin{aligned} V_{c_i}^{(n)} &= c_i + \sum_{k=n}^{\infty}(a_{ik} + b_{ik}); \\ V_a^{(n)} &= a + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} a_{ik}, \\ V_b^{(n)} &= b + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=n}^{\infty} b_{ik}. \end{aligned}\right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots).\ [19a])$$

Die Hausdorffschen Umgebungsaxiome [21]) sind erfüllt:
Axiom A evident;
Axiom B folgt aus der (für jeden Punkt x gültigen) Relation

$$V_x^{(n)} \cdot V_x^{(n+h)} = V_x^{(n+h)}.$$

Axiom C folgt daraus, daß nur die Punkte zweiter Ordnung — die ja mit ihren Umgebungen zusammenfallen — in einer Umgebung eines anderen Punktes enthalten sein können.

---

[20]) Vgl. auch die in der Fußnote [12]) zitierten Arbeiten.

[21]) loc. cit. S. 213.

Axiom D ist für zwei Punkte gleicher Ordnung offenbar erfüllt (beliebige Umgebungen dieser Punkte sind elementenfremd); daß das auch für alle anderen Punktepaare der Fall ist, sieht man aus den Gleichungen:

1. (ein Punkt zweiter und ein Punkt erster Ordnung):

$$V_{a_{pq}} \cdot V_{c_i}^{(q+1)} = 0\,, \qquad V_{b_{pq}} \cdot V_{c_i}^{(q+1)} = 0\,;$$

2. (zweite und 0-te Ordnung):

$$V_{a_{pq}} \cdot V_a^{(p+1)} = 0\,, \qquad V_{b_{pq}} \cdot V_b^{(p+1)} = 0\,,$$

$$V_{a_{pq}} \cdot V_b^{(1)} \quad = 0\,, \qquad V_{b_{pq}} \cdot V_a^{(1)} \quad = 0\,;$$

3. (erste und 0-te Ordnung):

$$V_{c_p}^{(1)} \cdot V_a^{(p+1)} = 0\,, \qquad V_{c_p}^{(1)} \cdot V_b^{(p+1)} = 0\,.$$

Im so definierten Raume E ist das Punktepaar 0-*ter Ordnung unzertrennbar.* In der Tat ist für beliebige n und m (vgl. die Schlußbemerkung des vorigen Paragraphen)

$$\overline{V}_a^{(n)} \cdot \overline{V}_b^{(m)} \supset \overline{V}_a^{(n+m)} \cdot \overline{V}_b^{\,n+m)} \supset \overline{(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n+m}^{\infty} a_{ik})} \cdot \overline{(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n+m}^{\infty} b_{ik})}$$

$$\supset \overline{(\sum_{k=1}^{\infty} a_{(n+m)k})} \cdot \overline{(\sum_{k=1}^{\infty} b_{(n+m)k})} \supset c_{n+m}\,.$$

Wenn wir aus E den Punkt b und alle b_{ik} ausschließen, erhalten wir ein einfaches Beispiel eines irregulären Raumes ohne untrennbare Punkte.

7. Verallgemeinerung des Zusammenhangsbegriffes. Wir werden sagen, daß die Menge C *zwischen a und b* (a und b sind Punkte von C) *zusammenhängend* ist, wenn C sich nicht in zwei abgesonderte Teilmengen A und B spalten läßt, die a bzw. b enthalten: $A \supset a$, $B \supset b$.

Eine Menge ist offenbar dann und nur dann schlechtweg zusammenhängend [22]), wenn sie zwischen jeden zwei (zu ihr gehörenden Punkten zusammenhängend ist; es genügt übrigens vorauszusetzen, daß die Menge zwischen einem festen und einem beliebig veränderlichen Punkte zusammenhängend ist. Aus der bloßen Existenz *eines* Punktepaares, zwischen dem C zusammenhängend ist, folgt aber (sogar für ebene Mengen) durchaus nicht, daß C zusammenhängende Teilmengen enthält, geschweige denn selbst zusammenhängend ist [23]).

Satz. *Wenn a, b untrennbare Punkte eines Raumes E sind, so ist E zwischen a und b zusammenhängend.*

---

[22]) Ich erinnere daran, daß wir die nur aus einem Punkte bestehenden zusammenhängenden Mengen außer Betracht gelassen haben.

[23]) Letztere Behauptung ist trivial; für die erste hat Herr Sierpiński ein Beispiel gegeben (Fund. Math. 2, S. 81—95).

Andernfalls könnte man nämlich $E = A + B$ setzen, wo

$$A \supset a, \quad B \supset b, \quad H(A, B) = 0$$

ist. Daraus würde aber folgen, daß A und B gleichzeitig abgeschlossene Mengen und Gebiete sind, also daß a und b durch abgeschlossene Gebiete trennbar sind.

Folgerung. Ein Raum, in dem ein fester Punkt a von jedem anderen Punkte untrennbar ist, ist zusammenhängend. Desto mehr gilt diese Behauptung für einen Raum, in dem jedes Punktepaar untrennbar ist.

8. Dimension 0. Eine weitere Verallgemeinerung des Zusammenhangsbegriffes kann durch die Betrachtung der *Dimension der Mengen* geliefert werden [24].

Eine (nicht leere) Menge C heißt *von der Dimension* 0 (in Zeichen $\dim C = 0$), falls zu jedem Punkte x von C und jeder Umgebung U_x von x eine Zerspaltung

$$C = A + B$$

gefunden werden kann, die den Bedingungen

$$\left\{ \begin{array}{l} H(A, B) = 0, \\ x \subset A \subset U_x \end{array} \right. \tag{6}$$

genügt. (NB. Es wird nicht vorausgesetzt, daß $B \neq 0$ ist.)

Falls weder $C = 0$, noch $\dim C = 0$ ist, schreiben wir

$$\dim C > 0$$

und sagen, daß C von positiver Dimension ist.

Mengen von positiver Dimension liefern uns eine noch weitere (und — wenn man nur topologisch invariante Begriffe berücksichtigt — endgültige) Verallgemeinerung des Zusammenhangsbegriffes [22]: denn es ist klar, daß jede zwischen zwei Punkten zusammenhängende Menge von positiver Dimension ist, während Herr Sierpiński gezeigt hat [25], daß die Umkehrung dieses Satzes nicht richtig ist, — es existieren sogar *ebene* Mengen von positiver Dimension, die zwischen keinem Punktepaare zusammenhängend sind.

---

[24]) Vgl. meine Note „*Sur les multiplicités cantoriennes*" (C. R. Paris **175** (1922), S. 440), wo für metrische Räume die Dimension der Mengen allgemein definiert ist, sowie meinen „*Mémoire sur les multiplicités cantoriennes*", dessen erster Abschnitt im Bd. 7 der Fund. Math. erscheinen wird. Übrigens ist die Dimension 0, auf die es uns hier allein ankommt, bereits von Herrn Sierpiński (a. a. O. [23])) *implizite* eingeführt worden.

[25]) a. a. O. [23])

Kapitel II. Mächtigkeitssätze für zusammenhängende Mengen.

9. Formulierung der Sätze. Ich werde in diesem Kapitel zwei Sätze über die Mächtigkeit der Mengen positiver Dimension beweisen, die also insbesondere auf zusammenhängende oder zwischen einem Punktepaare zusammenhängende Mengen unmittelbar anwendbar sind [22]). Durch diese Sätze wird das in der Einleitung gestellte Problem für normale Räume vollständig, für reguläre Räume bis zu einem gewissen Grade im *positiven* Sinne gelöst. Für die irregulären Räume werden wir im folgenden Kapitel eine *negative* Lösung erhalten.

Die beiden Sätze lauten folgendermaßen:

Satz I. *In einem normalen Raume ist jede Menge von positiver Dimension mindestens von der Mächtigkeit des Kontinuums.*

Satz II. *In einem regulären Raume ist jede Menge von positiver Dimension unabzählbar.*

Der zweite Satz wurde (für zusammenhängende Mengen) von Herrn P. Alexandroff formuliert und mittels einer Methode bewiesen, die mit der im § 4 dargelegten Methode eng verknüpft ist. Es ist jedoch einfacher, nicht die Methode, sondern die Resultate des § 4 zu benutzen, um mit ihrer Hilfe den Satz II aus dem Satz I abzuleiten.

Letzteres geschieht wie folgt: Wenn Satz II falsch wäre, so gäbe es eine in einem regulären Raume E gelegene *abzählbare* Menge C von positiver Dimension [26]). Wenn wir nun von den Punkten der Komplementärmenge $E-C$ absehen, d. h. C als einen *Relativraum* betrachten [27]), so ist C ebenfalls ein *regulärer* Raum [28]).

Die Folgerung des § 4 besagt uns also, daß C ein *normaler* abzählbarer Raum ist, d. h. daß die Richtigkeit der Voraussetzung $\dim C > 0$ die Unrichtigkeit des Satzes I nach sich ziehen würde.

Damit ist gezeigt, daß *Satz* II *aus dem Satze* I *folgt*; und es bleibt uns nur übrig, letzteren Satz zu beweisen.

10. Beweis des Satzes I. Es sei E ein normaler Raum. Wir beweisen zunächst folgende Hilfssätze [29]):

[26]) Daß eine *endliche* Menge — sogar in einem irregulären Raume — nicht von positiver Dimension sein kann, ist ja selbstverständlich: es genügt, in (6) $A=x$, $B=C-x$ zu setzen.

[27]) Hausdorff, loc. cit. S. 241—242.

[28]) Als „Relativumgebungen" in C gelten nämlich die Mengen $U_a \cdot C$ (wo $a \subset C$ und U_a eine beliebige Umgebung dieses Punktes in E ist); man ersieht also sofort, daß die Forderung R' (§ 2), falls für E, auch für C erfüllt ist.

[29]) Um Wiederholungen zu beseitigen, treffen wir ein für allemal die Verabredung, daß G (mit irgendwelchen Indizes) immer ein Gebiet, F eine abgeschlossene Menge, und die kleinen lateinischen Buchstaben immer Punkte (oder Zahlen) bedeuten sollen.

Hilfssatz 1. Es sei $F \subset G_1$. Es gibt dann ein G_0, das der Bedingung

$$F \subset G_0 \subset \overline{G}_0 \subset G_1$$

genügt.

Beweis. Die abgeschlossenen Mengen F und $E - G_1$ sind elementenfremd; sie können also durch Gebiete G_0 und G^* getrennt werden:

$$F \subset G_0, \quad E - G_1 \subset G^*,$$
$$G_0 \cdot G^* = 0.$$

Da G_0 und G^* Gebiete sind, so folgt hieraus

$$\overline{G}_0 \cdot G^* = 0,$$

also

$$\overline{G}_0 \cdot (E - G_1) = 0, \quad \overline{G}_0 \subset G_1,$$

w. z. b. w.

Hilfssatz 2. Wenn $\overline{G}_0 \subset G_1$, so gibt es ein der Bedingung

$$\overline{G}_0 \subset G_{1/2} \subset \overline{G}_{1/2} \subset G_1$$

genügendes $G_{1/2}$.

Beweis. Es genügt, im vorigen Hilfssatze F durch $\overline{G}_0$ und G_0 durch $G_{1/2}$ zu ersetzen.

Hilfssatz 3. Es sei $F \subset G_1$. Man kann dann ein System $\{G_{r_i}\}$ von Gebieten, die allen zwischen 0 und 1 gelegenen dyadischen Brüchen entsprechen,

$$r_i = \frac{m}{2^n}, \qquad 0 \leqq r_i \leqq 1,$$

und die Eigenschaft haben, daß

1. $F \subset G_0$,
2. aus $r_i < r_j$ die Inklusion $\overline{G}_{r_i} \subset G_{r_j}$ folgt.

Beweis. Das Gebiet G_0 wird durch den Hilfssatz 1 geliefert; es genügt alsdann den Hilfssatz 2 sukzessive anzuwenden, um allgemein von $G_{\frac{m}{2^n}}$ und $G_{\frac{m+1}{2^n}}$ zum Gebiete $G_{\frac{2m+1}{2^{n+1}}}$ überzugehen.

Hilfssatz 4. Unter denselben Voraussetzungen kann man auch ein System $\{G_t\}$ von Gebieten mit analogen Eigenschaften finden, bei dem jedoch t alle reellen Werte zwischen 0 und 1 annimmt $(0 \leqq t \leqq 1)$.

Beweis. Die G_{r_i} definieren wir wie vorher; wenn aber t kein dyadischer Bruch ist, so setzen wir

$$G_t = \sum_{r_k < t} G_{r_k}.$$

Wegen $G_{r_i} \subset \overline{G}_{r_i} \subset G_{r_j}$ (für $i < j$) können wir also für *jedes* t

$$G_t = \sum_{r_k \leqq t} G_{r_k}$$

setzen. Daraus folgt bereits, daß aus $t_1 < t_2$ die Inklusion $G_{t_1} \subset G_{t_2}$ gefolgert werden kann; um aber zu zeigen, daß auch $\overline{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$ ist, schieben wir zwischen t_1 und t_2 zwei dyadische Brüche r_i und r_j ein $(t_1 < r_i < r_j < t_2)$ uud berücksichtigen die Inklusion $\overline{G}_{r_i} \subset G_{r_j}$; dann kommt $G_{t_1} \subset G_{r_i}$, also $\overline{G}_{t_1} \subset \overline{G}_{r_i} \subset G_{r_j} \subset G_{t_2}$, w. z. b. w.

Zusatz. Es sei

$$\Phi_t = \overline{G}_t - G_t$$

die Grenze von G_t. Für $t_1 \neq t_2$ sind alsdann Φ_{t_1} und Φ_{t_2} elementenfremd.

In der Tat ist $\Phi_{t_1} \subset \overline{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$, während Φ_{t_2} zu G_{t_2} fremd ist.

11. Es sei jetzt C irgendeine in E liegende Menge, deren Mächtigkeit $< 2^{\aleph_0}$ ist. Es sei ferner x irgendein Punkt von C, und U_x eine beliebige Umgebung dieses Punktes.

Wir setzen $F = x$, $G_1 = U_x$ und definieren die G_t und Φ_t gemäß dem Hilfssatze 4 und seinem Zusatze. Da die $2^{\aleph_0}$ Mengen Φ_t (wir berücksichtigen hier nur diejenigen, für die $0 \leqq t \leqq 1$ ist) paarweise elementenfremd sind, so kann C gewiß nicht mit jedem Φ_t gemeinsame Punkte haben. Es sei also

$$C \cdot \Phi_{t_0} = 0 \qquad (t_0 < 1); \tag{7}$$

wir setzen dann

$$A = C \cdot G_{t_0}, \qquad B = C - A.$$

Wegen (7) ist B zu $G_{t_0} + \Phi_{t_0} = \overline{G}_{t_0}$ fremd, also im Gebiete $E - \overline{G}_{t_0}$ enthalten, d. h. A und B sind in den zueinander fremden Gebieten G_{t_0} und $E - \overline{G}_{t_0}$ bzw. enthalten. Daraus folgt, daß

$$H(A, B) = 0$$

ist. Andererseits ist

$$C = A + B,$$

und aus dem Hilfssatz 4 folgt, daß

$$A \subset G_{t_0} \subset \overline{G}_{t_0} \subset G_1 \subset U_x,$$

und daß

$$G_{t_0} \supset G_0 \supset F = x,$$

also (wegen $C \supset x$)

$$A \supset x$$

ist. Nun waren aber x und U_x *beliebig* gewählt; wir sehen also (§ 8), daß

$$\dim C = 0$$

ist. Damit ist gezeigt, daß im normalen Raume E jede Menge von positiver Dimension mindestens von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ ist, w. z. b. w.

Kapitel III. Ein zusammenhängender abzählbarer topologischer Raum.

12. Problemstellung. In diesem Kapitel werden wir die in der Einleitung aufgeworfene Frage, ob auch in *allgemeinen* (nicht regulären) topologischen Räumen zusammenhängende Mengen immer unabzählbar sind, sogar für Räume mit II. Abzählbarkeitsaxiome verneinend beantworten, indem wir einen abzählbaren *zusammenhängenden topologischen Raum* konstruieren werden, in dem das II. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist[30]).

Um dies zu erreichen, genügt es (zufolge § 7, Folgerung), einen *abzählbaren* Raum (mit II. Abzählbarkeitsaxiom) zu konstruieren, in dem ein Punkt a existiert, der von jedem anderen Punkte untrennbar ist. Wir werden jedoch — was ja an und für sich nicht ohne Interesse ist — zu erreichen suchen, daß in diesem Raume *jedes Punktepaar untrennbar* sei.

13. Der Raum R, den wir jetzt konstruieren wollen, entsteht durch Verdichtung der im Raume E des § 6 vorhandenen Singularität. Wir wollen die Punkte dieses Raumes E in eine einfache Folge $\{x_1, x_2, \ldots, x_h, \ldots\}$ ordnen, wozu wir

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = a, \quad x_2 = b, \\ x_{3i} = c_i, \\ x_{1+3\cdot 2^{k-1}(2i-1)} = a_{ik}, \quad x_{2+3\cdot 2^{k-1}(2i-1)} = b_{ik} \end{cases}$$

setzen: die Formel $m = 2^{k-1}(2i-1)$ liefert nämlich eine eineindeutige Abbildung der Menge aller natürlichen Zahlen m auf die Menge aller Paare (i, k) von natürlichen Zahlen.

Die Umgebungen in E werden wir dementsprechend durch $V_{x_h}^{(n)}$ bezeichnen, wobei, im Falle $x_h = a_{ik}$ oder b_{ik}, $V_{x_h}^{(n)} = x_h$ für jedes n zu setzen ist.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$(9)\qquad \begin{cases} K = x_1 + x_2, \\ L = E - K \end{cases}$$

[30]) Letzterer Zusatz könnte trivial erscheinen: in der Tat ist in jedem abzählbaren Raume mit I. Abzählbarkeitsaxiome das II. Abzählbarkeitsaxiom von selbst erfüllt. Herr P. Alexandroff hat mich aber darauf aufmerksam gemacht, daß es durchaus nicht selbstverständlich ist, daß in jedem abzählbaren Raume das I. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist (in dem in der Fußnote [8]) präzisierten Sinne), und daß letzteres wohl überhaupt falsch ist. In der Tat ist es mir gelungen, einen abzählbaren Raum zu konstruieren, in dem das I. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt ist; dieses Beispiel ist im Anhang II zu finden.

(es ist also $E = K + L$); und es sei, für jede endliche Menge $A = x_{h_1} + x_{h_2} + \ldots + x_{h_s}$, [31])

$$V_A^{(n)} = \sum_{j=1}^{s} V_{x_{h_j}}^{(n)}. \tag{10}$$

Wir denken uns jetzt im Besitze von abzählbar vielen Exemplaren des Raumes E. Es seien

$$E^1, E^2, \ldots, E^\lambda, \ldots$$

diese Exemplare; wir wollen die Punkte, Umgebungen usw. des Raumes E^λ bzw. durch x_h^λ, $V_{x_h^\lambda}^{(n)\lambda}$, $V_A^{(n)\lambda}$, K^λ, L^λ bezeichnen.

Den Raum R werden wir aus der Vereinigungsmenge

$$E^1 + E^2 + \ldots + E^\lambda + \ldots$$

bilden, indem wir in dieser Vereinigungsmenge gewisse, sogleich näher zu besprechende Identifizierungen unternehmen, und alsdann Umgebungen definieren wollen.

Wir betrachten hierzu alle Paare von Paaren natürlicher Zahlen $[(h_1, \lambda_1); (h_2, \lambda_2)]$, bei denen entweder $\lambda_1 < \lambda_2$ oder $\lambda_1 = \lambda_2$, $h_1 < h_2$ ist; sie bilden eine abzählbare Menge, und können also in eine einfache Folge geordnet werden. Es sei $N\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$ die Nummer, die dabei das Paar $[(h_1, \lambda_1); (h_2, \lambda_2)]$ erhält; diese Nummerierung kann offenbar immer so eingerichtet werden, daß

$$N\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1, \tag{11}$$

und in allen anderen Fällen

$$N\begin{pmatrix} \lambda_1, & \lambda_2 \\ h_1, & h_2 \end{pmatrix} > \lambda_1 \text{ und } > \lambda_2 \tag{12}$$

sei. Wir setzen alsdann

$$x_1^{N\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}} = x_{h_1}^{\lambda_1}, \qquad x_2^{N\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}} = x_{h_2}^{\lambda_2}; \tag{13}$$

das sind die vorher angekündigten Identifizierungen. Es sei bemerkt, daß dabei keine Identifizierungen von Punkten eines und desselben E^λ stattfinden können: aus (12) folgt nämlich, daß (11) der einzige zweifelhafte Fall; in diesem Falle verwandeln sich aber die Identifizierungsgleichungen (13) in die Identitäten $x_1^1 = x_1^1$, $x_2^1 = x_2^1$.

[31]) A darf auch leer sein (dann ist $V_A^{(n)}$ ebenfalls leer).

Daraus folgt insbesondere, daß ein Punkt von R zwar verschiedener Darstellungen $x_h^\lambda, x_{h'}^{\lambda'}, \ldots$ fähig ist, aber daß es nur eine Darstellung gibt, bei der λ seinen kleinstmöglichen Wert annimmt; diese Darstellung x_h^λ, die durch die Gleichung

$$x_h^\lambda \cdot (E^1 + E^2 + \ldots + E^{\lambda-1}) = 0 \tag{14}$$

gekennzeichnet wird, wollen wir *Normaldarstellung* nennen[32].

Man erkennt auch leicht, daß

$$E^\lambda \cdot E^{\lambda+\mu} = E^\lambda \cdot K^{\lambda+\mu} \qquad (\mu > 0) \tag{15}$$

$$K^\lambda \subset E^1 + E^2 + \ldots + E^{\lambda-1}, \qquad (\lambda > 1) \tag{16}$$

also daß

$$E^\lambda \cdot (E^1 + E^2 + \ldots + E^{\lambda-1}) = K^\lambda = x_1^\lambda + x_2^\lambda \qquad (\lambda > 1) \tag{17}$$

ist. Wenn B eine in $E^1 + E^2 + \ldots + E^{\lambda-1}$ liegende Menge ist, so folgt hieraus, daß $E^\lambda \cdot B$ eine endliche Menge, also daß

$$V_{E^\lambda \cdot B}^{(n)\,\lambda}$$

einen (gemäß (10) definierten) Sinn hat.

Wir betrachten jetzt irgend einen Punkt von R; es sei x_h^λ seine Normaldarstellung, und $n_\lambda, n_{\lambda+1}, n_{\lambda+2}, \ldots, n_{\lambda+u}, \ldots$ irgend eine der Bedingung

$$\lim_{u \to \infty} n_{\lambda+u} = 1 \tag{18}$$

genügende Folge natürlicher Zahlen (*fast alle* $n_{\lambda+u}$ sind also $=1$); wir setzen dann

$$\left\{\begin{aligned}
&V_{x_h^\lambda}^{(n_\lambda)\,\lambda} = \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda}, \\
&\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda} + V_{E^{\lambda+1} \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda}}^{(n_{\lambda+1})\,\overline{\lambda+1}} = \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1}}, \\
&\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1}} + V_{E^{\lambda+2} \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1}}}^{(n_{\lambda+2})\,\overline{\lambda+2}} = \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} n_{\lambda+2}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu}} + V_{E^{\lambda+\mu+1} \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu}}}^{(n_{\lambda+\mu+1})\,\overline{\lambda+\mu+1}} = \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu+1}},
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu}} = \underset{(\lambda)}{W}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu} \cdots}. \tag{20}$$

[32]) Jede Darstellung mit $\lambda = 1$ ist offenbar eine Normaldarstellung; dementsprechend ist dann (14) bei jedem h erfüllt (da ja die Klammer $= 0$ zu setzen ist).

Alle $\underset{(\lambda)}{W}_{x_h^\lambda}$ sollen Umgebungen des Punktes x_h^λ in R sein. Da es nur abzählbar viele der Bedingung (18) genügende Folgen und abzählbar viele zu R gehörende Punkte gibt, so ist das II. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Wir haben aber zu beweisen, daß auch die Hausdorffschen Umgebungsaxiome [21]) $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{D}$ erfüllt sind.

14. Das Axiom $\boldsymbol{A}$ ist offenbar erfüllt. Um zu sehen, daß das auch mit $\boldsymbol{B}$ der Fall ist, wollen wir folgende Definition einführen:

Eine von einem Index n abhängende Menge A^n soll *monoton abnehmend in n* heißen, wenn aus $n \leqq m$ die Inklusion $A^n \supset A^m$ folgt.

Aus der Definition des Raumes E (§ 6) sieht man sofort, daß die $V_{x_h}^{(n)}$ — also, zufolge (10), auch die $V_A^{(n)}$ — monoton abnehmend in n sind. Alsdann zeigen uns sukzessive die Gleichungen (19) und (20), daß alle U und W monoton abnehmend in jedem $n_{\lambda+\mu}$ $(\mu \geqq 0)$ sind[33]).

Wenn nun $\underset{(\lambda)}{W}{}^{n_\lambda n_{\lambda+1}\dots n_{\lambda+\mu}\dots}_{x_h^\lambda}$ und $\underset{(\lambda)}{W}{}^{m_\lambda m_{\lambda+1}\dots m_{\lambda+\mu}\dots}_{x_h^\lambda}$ zwei Umgebungen des Punktes x_h^λ sind, und wenn wir die größte der beiden Zahlen $n_{\lambda+\mu}$ und $m_{\lambda+\mu}$ mit $s_{\lambda+\mu}$ bezeichnen, so folgt aus $\lim\limits_{\mu\to\infty} n_{\lambda+\mu} = 1$ und $\lim\limits_{\mu\to\infty} m_{\lambda+\mu} = 1$, daß auch $\lim s_{\lambda+\mu} = 1$ ist, also daß

$$\underset{(\lambda)}{W}{}^{s_\lambda s_{\lambda+1}\dots s_{\lambda+\mu}\dots}_{x_h^\lambda}$$

eine Umgebung von x_h^λ ist; und diese Umgebung ist, wie aus den vorangehenden Bemerkungen folgt, in jeder einzelnen der beiden gegebenen Umgebungen enthalten. Damit ist Axiom $\boldsymbol{B}$ bewiesen.

15. Wir schreiten jetzt zum Beweise des Axioms $\boldsymbol{C}$ über. Es sei

$$x_k^\sigma \subset \underset{(\lambda)}{W}{}^{n_\lambda n_{\lambda+1}\dots n_{\lambda+\mu}\dots}_{x_h^\lambda}, \tag{21}$$

wo $\lim\limits_{\mu\to\infty} n_{\lambda+\mu} = 1$ ist; wir können voraussetzen, daß x_h^λ und x_k^σ die Normaldarstellungen der betreffenden Punkte sind. Wir haben zu zeigen, daß es eine Umgebung von x_k^σ gibt, die in der gegebenen $\underset{(\lambda)}{W}_{x_h^\lambda}$ enthalten ist; es genügt dabei offenbar, nur den Fall $x_k^\sigma \neq x_h^\lambda$ zu betrachten.

Wir bemerken zuerst, daß, gemäß der Definition des Raumes E (§ 6) und den Bezeichnungen (8), jedes $V_{x_h}^{(n)}$ außer dem Punkte x_h selbst nur Punkte a_{ik} oder b_{ik}, also nur in E isolierte Punkte enthält; dementsprechend enthält jede Menge von der Gestalt $V_A^{(n)} - A$ nur isolierte

[33]) Dabei hat man nur noch zu berücksichtigen, daß aus $A \subset B$ die Inklusion $V_A^{(n)} \subset V_{(B)}^{(n)}$ folgt.

Punkte. Indem wir dieses Ergebnis von E auf E^{ϱ} übertragen und die Gleichungen (9) berücksichtigen, erhalten wir einerseits die allgemein gültige Inklusion

$$V_A^{(n)\varrho} \subset A + L^{\varrho}; \tag{22}$$

anderseits aber den

Hilfssatz. Aus $x_k^{\sigma} \subset V_A^{(n_\sigma)\sigma}$ folgt $V_{x_k^{\sigma}}^{(n_\sigma)\sigma} \subset V_A^{(n_\sigma)\sigma}$.

x_k^{σ} ist nämlich entweder in A enthalten oder in E^{σ} isoliert; im ersten Falle ist die nötige Inklusion offenbar erfüllt, und im zweiten ist $V_{x_k^{\sigma}}^{(n_\sigma)\sigma}$ mit x_k^{σ} identisch.

Wir wenden jetzt (22) auf die Gleichungen (19) und (20) an, was uns folgende Inklusionen liefert:

$$\left\{\begin{array}{c}
\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^{\lambda}}^{n_\lambda} \subset x_h^{\lambda} + L^{\lambda}, \\
\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^{\lambda}}^{n_\lambda n_{\lambda+1}} \subset \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^{\lambda}}^{n_\lambda} + L^{\lambda+1} \subset x_h^{\lambda} + L^{\lambda} + L^{\lambda+1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^{\lambda}}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \dots n_{\lambda+\mu+1}} \subset \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^{\lambda}}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \dots n_{\lambda+\mu}} + L^{\lambda+\mu+1} \subset x_h^{\lambda} + \sum_{\varrho=0}^{\mu+1} L^{\lambda+\varrho}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\underset{(\lambda)}{W}{}_{x_h^{\lambda}}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \dots n_{\lambda+\mu} \dots} \subset x_h^{\lambda} + \sum_{\mu=0}^{\infty} L^{\lambda+\mu};
\end{array}\right. \tag{23}$$

aus (21) und $x_k^{\sigma} \neq x_h^{\lambda}$ folgt also, daß

$$x_k^{\sigma} \subset \sum_{\mu=0}^{\infty} L^{\lambda+\mu} \tag{24}$$

ist. Anderseits ist aber x_k^{σ} in $E^{\sigma} = K^{\sigma} + L^{\sigma}$ enthalten; und die Vergleichung von (16) mit der für die Normaldarstellung charakteristischen Gleichung (14) zeigt uns, daß x_k^{σ} nicht zu K^{σ} gehören kann, es sei denn, daß $\sigma = 1$ und $x_k^{\sigma} \subset K^1$ sei; die Inklusion (24) schließt jedoch auch letztere Möglichkeit aus, da ja K^1 zu allen L^{ϱ} elementenfremd ist: es ist nämlich $K^{\varrho} \cdot L^{\varrho} = 0$ für jedes ϱ (§ 13), also insbesondere für $\varrho = 1$; und es folgt aus (15), daß für $\varrho > 1$

$$K^1 \cdot L^{\varrho} \subset E^1 \cdot L^{\varrho} = E^1 \cdot E^{\varrho} \cdot L^{\varrho} = E^1 \cdot K^{\varrho} \cdot L^{\varrho} = 0$$

ist. Somit ist folglich die Inklusion

$$x_k^{\sigma} \subset L^{\sigma} \tag{25}$$

bewiesen. Nun sind aber die Mengen L^σ paarweise elementenfremd, was man mit Hilfe von (15) folgendermaßen sehen kann:

$$L^\varrho \cdot L^{\varrho+\nu} \subset E^\varrho \cdot L^{\varrho+\nu} = E^\varrho \cdot E^{\varrho+\nu} \cdot L^{\varrho+\nu} = E^\varrho \cdot K^{\varrho+\nu} \cdot L^{\varrho+\nu} = 0;$$

aus (24) und (25) folgt also, daß σ von der Form $\lambda + \mu$, d. h. $\geqq \lambda$ ist. Wenn wir jetzt die aus (21), (20), (19) und (23) folgenden Inklusionen

$$x_k^\sigma \subset \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda} + \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu+1}} - \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu}} \right),$$

$$\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu+1}} - \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_{\lambda+\mu}} \subset L^{\lambda+\mu+1}$$

mit (25) vergleichen und dabei die Elementenfremdheit der verschiedenen L^ϱ berücksichtigen, so sehen wir sofort, daß x_k^σ entweder (wenn $\sigma = \lambda$) in

$$\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda} = \underset{(\lambda)}{V}{}_{x_h^\lambda}^{(n_\lambda)\lambda} = V_{x_h^\lambda}^{(n_\sigma)\sigma}, \tag{26}$$

oder (wenn $\sigma > \lambda$) in

$$\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_\sigma} - \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_{\sigma-1}},$$

also in

$$V_{E^\sigma \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_{\sigma-1}}}^{n_\sigma(\sigma)} \tag{27}$$

enthalten ist. Aus dem in diesem Paragraphen hergeleiteten Hilfssatze folgt also, daß auch $V_{x_k^\sigma}^{n_\sigma(\sigma)}$ entweder in der Menge (26) oder in der Menge (27), also jedenfalls in $\underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_\sigma}$ enthalten ist; d. h. es ist

$$\underset{(\sigma)}{U}{}_{x_k^\lambda}^{n_\sigma} \subset \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_\sigma}.$$

Aus dieser Inklusion in Verbindung mit (19) und (20) folgt aber sofort, daß

$$\underset{(\sigma)}{U}{}_{x_k^\sigma}^{n_\sigma \cdots n_{\sigma+\nu}} \subset \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots \tilde{n}_\sigma \cdots n_{\sigma+\nu}}$$

für jedes $\nu \geqq 0$, also daß

$$\underset{(\sigma)}{W}{}_{x_k^\sigma}^{n_\sigma n_{\sigma+1} \cdots n_{\sigma+\nu} \cdots} \subset \underset{(\lambda)}{W}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda n_{\lambda+1} \cdots n_\sigma \cdots n_{\sigma+\nu} \cdots}$$

ist, w. z. b. w.

16. Um das Erfülltsein des Axioms $\boldsymbol{D}$ in R zu beweisen, bemerken wir zuerst, daß dieses Axiom in E^ϱ erfüllt ist, was, in Verbindung mit der Definitionsgleichung (10) und der Eigenschaft der Mengen $V_A^{(n)\varrho}$ monoton abnehmend in n zu sein (§ 14), folgendes Resultat liefert: Wenn A_1 und A_2 zwei endliche, zueinander fremde und in E^ϱ liegende Mengen sind, so gibt es eine natürliche Zahl n, die so beschaffen ist, daß

$$V_{A_1}^{(n)\varrho} \cdot V_{A_2}^{(n)\varrho} = 0$$

ist; die kleinste von den so beschaffenen Zahlen wollen wir mit

$$\chi_\varrho\{A_1; A_2\}$$

bezeichnen. Diese Funktion χ_ϱ ist offenbar in bezug auf ihre beiden Argumente symmetrisch.

Wir beweisen nunmehr folgende zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. Wenn $A_1 + A_2 \subset E^1 + E^2 + \ldots + E^{\varrho-1}$, so ist $\chi_\varrho\{A_1; A_2\} = 1$.

Es folgt in der Tat aus (17), daß in diesem Falle $A_1 + A_2 \subset x_1^\varrho + x_2^\varrho$, also daß $\chi_\varrho\{A_1; A_2\}$ eine der folgenden fünf Gestalten besitzt:

$$\chi_\varrho\{x_1^\varrho; x_2^\varrho\}, \quad \chi_\varrho\{x_1^\varrho + x_2^\varrho; 0\}, \quad \chi_\varrho\{x_1^\varrho, 0\}, \quad \chi_\varrho\{x_2^\varrho, 0\}, \quad \chi_\varrho\{0; 0\};$$

von diesen fünf Zahlen sind aber alle, außer der ersten, offenbar $= 1$; und daß die erste ebenfalls $= 1$ ist, folgt aus (8) und der Definition des Raumes E (§ 6).

Hilfssatz 2. Wenn B_1 und B_2 zwei beliebige in $E^1 + E^2 + \ldots + E^{\varrho-1}$ gelegene und zueinander fremde Mengen sind, so sind auch die zwei Mengen

$$B_1 + V_{E^\varrho \cdot B_1}^{(1)\varrho} \quad \text{und} \quad B_2 + V_{E^\varrho \cdot B_2}^{(1)\varrho} \tag{28}$$

zueinander fremd.

Die Mengen $E^\varrho \cdot B_1$ und $E^\varrho \cdot B_2$ sind endlich (§ 13); dem Hilfssatze 1 gemäß ist also $\chi_\varrho\{E^\varrho \cdot B_1; E^\varrho \cdot B_2\} = 1$, d. h.

$$V_{E^\varrho \cdot B_1}^{(1)\varrho} \cdot V_{E^\varrho \cdot B_2}^{(1)\varrho} = 0; \tag{29}$$

es folgt weiter aus (22) und (17), daß

$$B_1 \cdot V_{E^\varrho \cdot B_2}^{(1)\varrho} \subset B_1 \cdot (B_2 + L^\varrho) = B_1 \cdot L^\varrho \subset (E^1 + \ldots + E^{\varrho-1}) \cdot L^\varrho = 0, \tag{30}$$

und ebenso, daß

$$B_2 \cdot V_{E^\varrho \cdot B_1}^{(1)\varrho} = 0; \tag{31}$$

aus (29), (30), (31) und $B_1 \cdot B_2 = 0$ folgt aber sofort, daß die beiden Mengen (28) elementenfremd sind.

Wir kehren jetzt zum Beweise des Axioms $\boldsymbol{D}$ zurück. Es seien x_h^λ und x_k^σ (Normaldarstellung!) zwei beliebige (voneinander verschiedene) Punkte von R; wir können voraussetzen, daß $\sigma \geqq \lambda$ ist.

Wenn $\sigma = \lambda$, so setzen wir

$$n_\sigma = \chi_\sigma\{x_h^\lambda; x_k^\sigma\},$$

was die Gleichung

$$(32)\qquad \underset{(\lambda)}{U}{}^{n_\sigma}_{x^\lambda_h} \cdot \underset{(\sigma)}{U}{}^{n_\sigma}_{x^\sigma_k} = V^{(n_\sigma)\sigma}_{x^\lambda_h} \cdot V^{(n_\sigma)\sigma}_{x^\sigma_k} = 0$$

zur Folge hat; wenn aber $\sigma > \lambda$ ist, so setzen wir

$$(33)\qquad n_\lambda = n_{\lambda+1} = \ldots = n_{\sigma-1} = 1, \quad n^\sigma = \chi_\sigma\{E^\sigma \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}^{n_\lambda \ldots n_{\sigma-1}}_{x^\lambda_h};\ x^\sigma_k\}.$$

Daß letztere Definition einen Sinn hat, d. h. daß die beiden Argumente von χ_σ in (33) elementenfremde Mengen sind, kann man wie folgt ersehen: Die erste Menge ist in

$$E^\sigma \cdot (E^1 + E^2 + \ldots + E^{\sigma-1}) = K^\sigma$$

enthalten, während x^σ_k, wie wir es im vorigen Paragraphen gesehen haben, nur dann zu K^σ gehören kann, wenn $\sigma = 1$ ist, was aber hier wegen $\sigma > \lambda \geqq 1$ nicht in Betracht kommt. Die somit als widerspruchsfrei erwiesene Definition (33) liefert uns für den Fall $\sigma > \lambda$ die Gleichung

$$(34)\qquad V^{(n_\sigma)\sigma}_{E^\sigma \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}^{n_\lambda \ldots n_{\sigma-1}}_{x^\lambda_h}} \cdot V^{(n_\sigma)\sigma}_{x^\sigma_k} = 0.$$

Anderseits ist in diesem Falle, wie wir soeben gesehen haben, $x^\sigma_k \subset L^\sigma$, woraus man mit Hilfe des Raumes E (§ 6) und der Gleichungen (8) und (9) auf die Inklusion

$$V^{(n_\sigma)\sigma}_{x^\sigma_k} \subset L^\sigma,$$

also, wegen (17) und

$$\underset{(\lambda)}{U}{}^{n_\lambda \ldots n_{\sigma-1}}_{x^\lambda_h} \subset E^1 + E^2 + \ldots + E^{\sigma-1},$$

auf die Gleichung

$$(35)\qquad \underset{(\lambda)}{U}{}^{n_\lambda \ldots n_{\sigma-1}}_{x^\lambda_h} \cdot V^{(n_\sigma)\sigma}_{x^\sigma_k} = 0$$

schließen kann.

Indem wir (34) mit (35) addieren und (19) berücksichtigen, erhalten wir für $\sigma > \lambda$ die Gleichung

$$(36)\qquad \underset{(\lambda)}{U}{}^{n_\lambda \ldots n_\sigma}_{x^\lambda_h} \cdot \underset{(\sigma)}{U}{}^{n_\sigma}_{x^\sigma_k} = 0;$$

eine Vergleichung mit (32) zeigt uns aber, daß (36) auch für $\sigma = \lambda$, also immer erfüllt ist.

Wir setzen jetzt

$$(37)\qquad n_{\sigma+1} = n_{\sigma+2} = \ldots = n_{\sigma+\nu} = 1;$$

von (36) ausgehend, können wir dann mittels des Hilfssatzes 2 dieses Paragraphen und der Gleichungen (19) schrittweise beweisen, daß

$$(38)\qquad \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda\cdots n_\sigma\cdots n_{\sigma+\nu}}\cdot \underset{(\sigma)}{U}{}_{x_k^\sigma}^{n_\sigma\cdots n_{\sigma+\nu}} = 0$$

für jedes $\nu \geqq 0$ ist; da aber die auf der linken Seite von (38) auftretenden Mengen *monoton wachsend in* ν sind[34]), so folgt hieraus unter Berücksichtigung von (20), daß auch

$$(39)\qquad \underset{(\lambda)}{W}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda\cdots n_\sigma\cdots n_{\sigma+\nu}\cdots}\cdot \underset{(\sigma)}{W}{}_{x_k^\sigma}^{n_\sigma\cdots n_{\sigma+\nu}\cdots} = 0$$

ist, und in dieser Gleichung ist das Axiom D enthalten: aus (37) folgt ja, daß die in (39) auftretenden Mengen Umgebungen der gegebenen Punkte sind.

17. Wir haben bewiesen, daß R durch die im § 13 gegebene Umgebungsdefinition wirklich *in einen topologischen Raum,* in dem das II. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, *verwandelt wird.* Wir haben also nur noch zu zeigen, daß *in diesem Raume jedes Punktepaar untrennbar ist.*

Es seien x_h^λ und x_k^σ zwei beliebige, in ihrer Normaldarstellung gegebene Punkte von R. Zufolge der Schlußbemerkung des § 5 wird alles bewiesen sein, wenn wir für *beliebige* Umgebungen dieser Punkte die Richtigkeit der Ungleichung

$$(40)\qquad \overline{\underset{(\lambda)}{W}}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda\cdots n_{\lambda+\mu}\cdots}\cdot \overline{\underset{(\sigma)}{W}}{}_{x_k^\sigma}^{m_\sigma\cdots m_{\sigma+\nu}\cdots} \neq 0$$

erkannt haben werden.

Wir können voraussetzen, daß entweder $\sigma > \lambda$, oder $\sigma = \lambda$, $k > h$ ist. Indem wir die Zahl $N\begin{pmatrix}\lambda & \sigma\\ h & k\end{pmatrix}$ mit ϱ bezeichnen, was zufolge (13) zu den Identifizierungsgleichungen

$$x_h^\lambda = x_1^\varrho, \qquad x_k^\sigma = x_2^\varrho$$

führt, haben wir zwei Fälle zu betrachten:

Fall 1. $\varrho > 1$. Aus (12) folgt, daß $\varrho > \sigma \geqq \lambda$ ist, und man erhält leicht die Inklusionen

$$x_1^\varrho = E^\varrho\cdot x_1^\varrho = E^\varrho\cdot x_h^\lambda \subset E^\varrho\cdot \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda\cdots n_{\varrho-1}};$$

---

[34]) Vgl. § 14. Wenn A^n und B^n monoton wachsend in n sind, so folgt bekanntlich aus $A^n\cdot B^n = 0$, daß auch $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n\right)\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} B^n\right) = 0$ ist: letztere Menge ist ja

$$= \sum_{i,k=0}^{\infty}(A^i\cdot B^k) \subset \sum_{i,k=0}^{\infty}(A^{i+k}\cdot B^{i+k}) = 0.$$

$$(41_1) \qquad V_{x_1^\varrho}^{(n_\varrho)\varrho} \subset V_{E^\varrho \cdot \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_{\varrho-1}}}^{(n_\varrho)\varrho} \subset \underset{(\lambda)}{U}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_\varrho} \subset \underset{(\lambda)}{W}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_\varrho \cdots};$$

in derselben Weise wird auch die Inklusion

$$(41_2) \qquad V_{x_2^\varrho}^{(m_\varrho)\varrho} \subset \underset{(\sigma)}{W}{}_{x_k^\sigma}^{m_\sigma \cdots m_\varrho \cdots}$$

bewiesen.

Fall 2. $\varrho = 1$. Die beiden Inklusionen (41) bleiben auch hier erfüllt, denn es ist, zufolge (11), $\sigma = \lambda = 1$, $h = 1$, $k = 2$, also

$$V_{x_1^1}^{(n_1)1} = \underset{(1)}{U}{}_{x_1^1}^{n_1} \subset \underset{(1)}{W}{}_{x_1^1}^{n_1 \cdots}, \qquad V_{x_2^1}^{(m_1)1} = \underset{(1)}{U}{}_{x_2^1}^{m_1} \subset \underset{(1)}{W}{}_{x_2^1}^{m_1 \cdots}.$$

Aus den, somit als immer gültig erwiesenen, Inklusionen (41) folgt aber sofort, daß

$$(42) \qquad \overline{\underset{(\lambda)}{W}}{}_{x_h^\lambda}^{n_\lambda \cdots n_{\lambda+\mu} \cdots} \cdot \overline{\underset{(\sigma)}{W}}{}_{x_k^\sigma}^{m_\sigma \cdots m_{\sigma+\nu} \cdots} \supset \overline{V}_{x_1^\varrho}^{(n_\varrho)\varrho} \cdot \overline{V}_{x_2^\varrho}^{(m_\varrho)\varrho}$$

ist; anderseits folgt aus (8) und den Eigenschaften des Raumes E (vgl. die letzte Formel des § 6), daß

$$\overline{V}_{x_1^\varrho}^{(n_\varrho)\varrho} \cdot \overline{V}_{x_2^\varrho}^{(m_\varrho)\varrho} \supset x_{3(n_\varrho+m_\varrho)}^\varrho,$$

woraus, in Verbindung mit (42), die Richtigkeit der zu beweisenden Ungleichung (40) ohne weiteres zu ersehen ist.

Anhang I. Trennungsforderungen, transitive Eigenschaften und Abzählbarkeitsaxiome.

18. In diesem Anhang will ich einige Fragen erledigen, die nicht mit dem Hauptziele der Arbeit, sondern mit den Hilfsbetrachtungen des Kap. I verknüpft sind. Es handelt sich um die Transitivität (in einem sogleich zu präzisierenden Sinne) der Trennungseigenschaften, sowie um die Beziehung der letzteren zu den Hausdorffschen Abzählbarkeitsaxiomen.

Definition. Eine (topologischen Räumen zukommende) Eigenschaft wollen wir *transitiv* nennen, wenn deren Erfülltsein für einen Raum E dasselbe auch für alle in E gelegenen (als Relativräume betrachteten) Mengen mit sich bringt[35]).

Die Eigenschaft, ein topologischer Raum zu sein, ist selbst transitiv: darauf beruht die Hausdorffsche „Relativtheorie“[27]). Von den sonstigen

[35]) Daß das Wort transitiv auch in einem anderen Sinne gebraucht wird, kann hoffentlich zu keinem Mißverständnis führen, da es sich hier um Eigenschaften, dort um Relationen handelt.

— äußerst zahlreichen — transitiven Eigenschaften seien hier nur folgende genannt: beide Abzählbarkeitsaxiome[36]), Metrisierbarkeit[7]), Dimension 0.

Wir wollen jetzt untersuchen, welche von den Trennungseigenschaften α, $\bar{\alpha}$, β, γ, δ (§§ 3 u. 5) transitiv sind.

Daß α transitiv ist, haben wir schon gesagt; die Transitivität von $\bar{\alpha}$ ist unmittelbar evident, diejenige von β in Fußnote [28]) bewiesen.

Es ist auch leicht zu erkennen, daß δ transitiv ist. In der Tat ist die Eigenschaft zweier Mengen A und B abgesondert zu sein eine *innere* Eigenschaft der Menge $A+B$; wenn also A und B im Relativraume $C \supset A+B$ abgesondert sind,¹) so sind sie es auch im ursprünglichen Raume E. Ist letzterer vollständig normal, gibt es ein $G_A \supset A$ und ein $G_B \supset B$ ohne gemeinsame Punkte, so können A und B in C durch die Relativgebiete $G_A \cdot C$ und $G_B \cdot C$ getrennt werden, woraus folgt, daß der Relativraum C ebenfalls vollständig normal ist, w. z. b. w.

(nur, wenn in E abge- lossen

Die Eigenschaft γ ist hingegen nicht transitiv, d. h. es gibt normale Räume, in denen nicht normale Relativräume enthalten sind: das trifft sogar für alle normale Räume, die nicht vollständig normal sind, zu. Es gilt nämlich der

Satz. *Es sei E ein normaler topologischer Raum. Damit alle — als Relativräume betrachteten — Teilmengen von E ebenfalls normal seien, ist notwendig und hinreichend, daß E vollständig normal sei.*

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist selbstverständlich: ist E vollständig normal, so sind, wie wir soeben gesehen haben, alle in ihm enthaltenen Relativräume sogar vollständig normal.

Um die Notwendigkeit zu beweisen, betrachten wir einen normalen Raum E, dessen sämtliche Relativräume ebenfalls normal sind; wir wollen beweisen, daß jedes Paar abgesonderter Mengen in E durch Gebiete getrennt werden kann.

Es sei A und B ein solches Paar. Im Relativraume

$$C = E - \bar{A} \cdot \bar{B}$$

betrachten wir die beiden relativ abgeschlossenen Mengen $\bar{A} \cdot C$ und $\bar{B} \cdot C$. Aus $A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} = 0$ folgt, daß

$$A = A - \bar{B} \subset E - \bar{B} \subset C,$$

also daß

$$A \subset \bar{A} \cdot C;$$

ebenso ist

$$B \subset \bar{B} \cdot C.$$

Anderseits sind aber $\bar{A} \cdot C$ und $\bar{B} \cdot C$ elementenfremd:

$$(\bar{A} \cdot C) \cdot (\bar{B} \cdot C) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = \bar{A} \cdot \bar{B}(E - \bar{A} \cdot \bar{B}) = 0;$$

---

[36]) Vgl. Fußnote [8]). ¹) d.h. $(\bar{A}B + A\bar{B})C = 0$.

unserer Voraussetzung gemäß können sie also in C durch Relativgebiete H_A und H_B getrennt werden:

$$H_A \cdot H_B = 0,$$
$$H_A \supset \bar{A} \cdot C \supset A,$$
$$H_B \supset \bar{B} \cdot C \supset B.$$

Nun ist aber C ein Gebiet (im Raume E); daraus folgt[37]), daß H_A und H_B ebenfalls Gebiete (in E) sind. A und B werden also durch diese Gebiete getrennt, w. z. b. w.

19. Von den Fragen, die auf die Beziehungen zwischen Trennungsforderungen und Abzählbarkeitsaxiomen zielen, werde ich hier nur folgende betrachten:

Ist auch in einem Raume mit II. Abzählbarkeitsaxiom jede der Forderungen $\alpha, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \delta$ von der vorangehenden unabhängig?

Die beiden Beispiele des § 6 — in denen ja das II. Abzählbarkeitsaxiom offenbar erfüllt ist — zeigen, daß auch in diesem Falle $\bar{\alpha}$ von α und β von $\bar{\alpha}$ unabhängig ist.

Es ist mir aber nicht gelungen, zu ~~unter~~entscheiden, ob auch γ von β unabhängig bleibt, d. h. ob es reguläre nicht normale Räume gibt, in denen das II. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist.

Hingegen folgt aus dem II. Abzählbarkeitsaxiom, daß $\gamma = \delta$ ist; d. h. es besteht der

Satz. *Ein normaler Raum mit* II. *Abzählbarkeitsaxiom ist vollständig normal*[38]). folgt aus d. [illegible]

Diesen Satz zerlegen wir in zwei Hilfssätze, aus deren Vereinigung er unmittelbar folgt:

Hilfssatz 1. Es seien A und B zwei abgesonderte Mengen, die in einem normalen Raume E mit II. Abzählbarkeitsaxiom liegen. Man kann dann zwei F_σ-Mengen[39]) $M_A \supset A$ und $M_B \supset B$ finden, die ebenfalls abgesondert sind:

$$H(M_A, M_B) = 0.$$

Hilfssatz 2. Zwei abgesonderte F_σ-Mengen können in einem normalen Raume (in dem das II. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt zu sein braucht) durch Gebiete getrennt werden.

---

[37]) Vgl. z. B. Tietze a. a. O. [16]), S. 298.

[38]) Dieser Satz kann (zufolge dem Satze im § 18) auch so formuliert werden: *In einem normalen Raume mit* II. *Abzählbarkeitsaxiome sind alle Relativräume normal.*

In Räumen mit II. Abzählbarkeitsaxiom sind also *alle* Trennungseigenschaften transitiv.

[39]) D. h. Mengen, die als Vereinigungsmengen von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen betrachtet werden können (Hausdorff, loc. cit. S. 304—305).

20. Beweis des Hilfssatzes 1. Es sei $H(A, B) = 0$. Wir betrachten das Gebiet

$$C = E - \bar{A} \cdot \bar{B};$$

wir haben bereits gesehen (§ 18), daß die beiden Mengen $\bar{A} \cdot C$ und $\bar{B} \cdot C$ elementenfremd sind, und daß

$$A \subset \bar{A} \cdot C, \quad B \subset \bar{B} \cdot C.$$

Man erkennt aber auch leicht, daß diese zwei Mengen abgesondert sind. In der Tat ist $(\overline{\bar{A} \cdot C}) \subset \bar{A}$, $(\overline{\bar{B} \cdot C}) \subset \bar{B}$, also

$$H(\bar{A} \cdot C, \bar{B} \cdot C)$$
$$= (\overline{\bar{A} \cdot C}) \cdot (\bar{B} \cdot C) + (\overline{\bar{B} \cdot C}) \cdot (\bar{A} \cdot C) \subset \bar{A} \cdot (\bar{B} \cdot C) + \bar{B} \cdot (\bar{A} \cdot C) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = 0.$$

Nun ist aber C eine F_σ-Menge: denn sogar in jedem regulären Raum mit II. Abzählbarkeitsaxiom ist jedes Gebiet ein F_σ.[40]) Daraus folgt, daß auch $\bar{A} \cdot C$ und $\bar{B} \cdot C$ F_σ-Mengen sind.

Damit ist der Hilfssatz 1 bewiesen: es genügt $M_A = \bar{A} \cdot C$ und $M_B = \bar{B} \cdot C$ zu setzen[41]).

21. Beweis des Hilfssatzes 2. Es seien L und Λ zwei abgesonderte F_σ-Mengen:

$$H(L, \Lambda) = 0, \tag{43}$$

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} F_n, \quad \Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n, \tag{44}$$

wo die F_n und Φ_n abgeschlossen sind. Wir setzen außerdem

$$F_0 = \Phi_0 = 0, \tag{45}$$

dann ist also

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} F_n, \quad \Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n, \tag{44*}$$

Aus (43) und (44*) folgt, daß für jedes n

$$F_n \subset L, \quad \Phi_n \subset \Lambda \tag{46$_n$}$$

---

[40]) Dieser Satz ist in der Arbeit P. Alexandroff u. P. Urysohn, Mém. sur les espaces topologiques compacts[12]) bewiesen.

[41]) Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß wir den Hilfssatz 1 für alle die „Eigenschaft $\mathcal{F}$“:

Jedes Gebiet ist ein F_σ,

besitzenden normalen Räume bewiesen haben. Damit ist also — da Hilfssatz 2 ausnahmslos für alle normalen Räume gilt — folgende Verallgemeinerung des obigen Satzes (§ 19) bewiesen:

Jeder normale Raum, der die Eigenschaft $\mathcal{F}$ besitzt, ist vollständig normal.

und

$$(47_n) \qquad F_n \cdot \bar{\Lambda} \subset L \cdot \bar{\Lambda} \subset H(L, \Lambda) = 0, \qquad \Phi_n \bar{L} = 0$$

ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß man zwei Folgen von Gebieten

$$(48') \qquad G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \ldots$$

und

$$(48'') \qquad \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots \subset \Gamma_n \ldots$$

derart finden kann, daß

$$(49_n) \qquad G_n \supset F_n, \qquad \Gamma_n \supset \Phi_n,$$

$$(50_n) \qquad \bar{G}_n \cdot \bar{\Gamma}_n = 0,$$

$$(51_n) \qquad \bar{G}_n \cdot \bar{\Lambda} = 0, \qquad \bar{\Gamma}_n \cdot \bar{L} = 0$$

für jedes n sei.

Für $n = 0$ genügt es

$$G_0 = \Gamma_0 = 0$$

zu setzen; weiter verfahren wir durch Induktion. Wir setzen nämlich voraus, daß den Bedingungen (48), (49), (50), (51) genügende Gebiete $G_0, G_1, \ldots, G_n$ und $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ bereits gefunden worden sind.

Dann gilt zufolge (51_n), (50_n), (47_{n+1}), (46_{n+1}) die Gleichung

$$(\bar{G}_n + F_{n+1}) \cdot (\bar{\Lambda} + \bar{\Gamma}_n) = \bar{G}_n \cdot \bar{\Lambda} + \bar{G}_n \cdot \bar{\Gamma}_n + F_{n+1} \cdot \bar{\Lambda} + F_{n+1} \cdot \bar{\Gamma}_n \subset L \cdot \bar{\Gamma}_n = 0;$$

die abgeschlossenen Mengen $\bar{G}_n + F_{n+1}$ und $\bar{\Lambda} + \bar{\Gamma}_n$ können also — wir haben ja vorausgesetzt, daß der Raum normal ist — durch zwei Gebiete, die wir G_{n+1} und Γ^* nennen wollen, getrennt werden:

$$(52) \qquad \bar{G}_n + F_{n+1} \subset G_{n+1},$$

$$(53) \qquad \bar{\Lambda} + \bar{\Gamma}_n \subset \Gamma^*,$$

$$(54) \qquad G_{n+1} \cdot \Gamma^* = 0.$$

Aus (54) folgt noch, weil Γ^* ein Gebiet ist, daß

$$(54^*) \qquad \bar{G}_{n+1} \cdot \Gamma^* = 0.$$

Es folgt nun aus (53), (46_{n+1}), (51_n) (47_{n+1}), (54^*), daß

$$(\bar{G}_{n+1} + \bar{L}) \cdot (\bar{\Gamma}_n + \Phi_{n+1}) = \bar{G}_{n+1} \cdot \bar{\Gamma}_n + \bar{G}_{n+1} \cdot \Phi_{n+1} + \bar{L} \cdot \bar{\Gamma}_n + \bar{L} \cdot \Phi_{n+1} \subset$$
$$\subset \bar{G}_{n+1} \cdot \Gamma^* + \bar{G}_{n+1} \cdot \Lambda \subset \bar{G}_{n+1} \cdot \Gamma^* = 0;$$

die abgeschlossenen Mengen $\bar{G}_{n+1} + \bar{L}$ und $\bar{\Gamma}_n + \Phi_{n+1}$ können also durch zwei Gebiete $G^{\odot}$ und Γ_{n+1} getrennt werden:

$$(55) \qquad \bar{G}_{n+1} + \bar{L} \subset G^{\odot},$$

(56) $$\bar{\Gamma}_n + \Phi_{n+1} \subset \Gamma_{n+1},$$

(57) $$G^{\odot} \cdot \Gamma_{n+1} = 0;$$

und es ist noch

(57*) $$G^{\odot} \cdot \bar{\Gamma}_{n+1} = 0.$$

Jetzt ist leicht zu erkennen, daß die erhaltenen Gebiete G_{n+1} und Γ_{n+1} allen Bedingungen (48), (49), (50), (51) genügen, d. h. daß das Induktionsverfahren ungehindert weitergeführt werden kann. In der Tat folgt aus (52) bzw. (56), daß

(48_{n+1}) $$G_n \subset G_{n+1}, \qquad \Gamma_n \subset \Gamma_{n+1},$$

(49_{n+1}) $$G_{n+1} \supset F_{n+1}, \qquad \Gamma_{n+1} \supset \Phi_{n+1};$$

(55) und (57*) lassen erkennen, daß

(50_{n+1}) $$\bar{G}_{n+1} \cdot \bar{\Gamma}_{n+1} \subset G^{\odot} \cdot \bar{\Gamma}_{n+1} = 0;$$

es folgt endlich aus (53) und (54*) bzw. aus (55) und (57*), daß

(51_{n+1}) $$\begin{cases} \bar{G}_{n+1} \cdot \bar{\Lambda} \subset \bar{G}_{n+1} \cdot \Gamma^* = 0, \\ \bar{\Gamma}_{n+1} \cdot \bar{L} \subset \bar{\Gamma}_{n+1} \cdot G^{\odot} = 0. \end{cases}$$

Damit ist die Existenz der Folgen (48′) und (48″) gesichert. Wir setzen jetzt

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n, \qquad \Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n;$$

G und Γ sind Gebiete, die zufolge (50) elementenfremd sind[42]); da anderseits, zufolge (49) und (44*),

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} G_n \supset \sum_{n=0}^{\infty} F_n = L,$$

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n \supset \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n = \Lambda$$

ist, so sehen wir, daß L und Λ durch die Gebiete G und Γ getrennt werden, w. z. b. w.

Anhang II. Ein abzählbarer Raum, in dem das II. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt ist[43]).

22. Um einen solchen Raum zu konstruieren, betrachten wir zuerst *wachsende* Folgen $\{a_n\}$ positiver ganzer Zahlen

$$(0 <) a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots.$$

[42]) Vgl. Fußnote [34]).
[43]) Vgl. Fußnote [30]).

Aus zwei solchen Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ können wir eine „Vereinigungsfolge" $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$ bilden, indem wir alle Zahlen a_n und b_n der Größe nach ordnen; eine Zahl $a_i = b_k$, die in den *beiden* gegebenen Folgen vorhanden war, soll dabei nur *einmal* in die Folge $\{c_n\}$ aufgenommen werden.

Eine wachsende Folge $\{a_n\}$, deren Glieder der Bedingung

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \infty$$

genügen, wollen wir *schnell wachsend* nennen. Dann gilt der

Hilfssatz. Die Vereinigungsfolge zweier schnell wachsender Folgen ist selbst schnell wachsend.

Beweis. Es sei $\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}$,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{n} = \infty.$$

Wir können (bei beliebig gegebenem $q > 0$) eine positive Zahl N_q derart wählen, daß

$$a_n > nq, \qquad b_n > nq$$

für $n > N_q$ ist. Es sei dann m eine beliebige ganze Zahl, die $> 2N_q$ ist.

Von den m Zahlen

(58) $$c_1, c_2, \ldots, c_m$$

gehört ein Teil zu $\{a_n\}$, ein Teil zu $\{b_n\}$ (und ein Teil zu beiden Folgen); da jede von diesen Zahlen wenigstens zu einer der beiden Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ gehört, so muß wenigstens eine der beiden Folgen $\geqq \frac{m}{2}$ Zahlen (58) enthalten. Wenn z. B. die Folge $\{a_n\}$ diese Eigenschaft besitzt, und wenn $c_k = a_j$ die letzte zu $\{a_n\}$ gehörende Zahl (58) ist, so ist $j \geqq \frac{m}{2} > N_q$, also $a_j > jq \geqq \frac{m}{2} q$. Da andererseits c_k zu (58) gehört, also $\leqq c_m$ ist, folgt hieraus für jedes $m > 2N_q$, daß

$$c_m \geqq c_k = a_j \geqq \frac{m}{2} q,$$

also daß

$$\liminf_{m \to \infty} \frac{c_m}{m} \geqq \frac{q}{2}$$

ist. Da q beliebig groß gewählt werden darf, ist damit unsere Behauptung bewiesen.

23. Als Punkte des abzählbaren Raumes E sollen alle nicht negativen ganzen Zahlen gelten. Dabei sollen alle positiven Punkte *isoliert* sein, während als Umgebung des Punktes 0 jede Menge $E - \{a_n\}$, die aus E

durch Fortlassung einer beliebigen *schnell wachsenden* Folge entsteht, angesehen werden soll. Es ist unmittelbar einleuchtend, daß die Hausdorffschen Axiome $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ erfüllt sind; und das Erfülltsein von $\boldsymbol{B}$ folgt aus dem soeben bewiesenen Hilfssatze.

Der Punkt 0 ist offenbar ein Häufungspunkt von E; es existiert aber in E keine gegen diesen Punkt konvergierende[44]) Punktmenge: denn jede unendliche Menge M enthält eine schnell wachsende Folge $\{a_n\}$, woraus folgt, daß die Bedingung „jede Umgebung des Punktes 0 enthält fast alle Punkte der Menge M"[44]) für die Umgebung $E - \{a_n\}$ nicht erfüllt ist.

Nun konvergiert aber gegen jeden Häufungspunkt eines Raumes mit I. Abzählbarkeitsaxiom wenigstens eine in diesem Raume gelegene Punktmenge[45]), in unserem Raume ist folglich das genannte Axiom nicht erfüllt, w. z. b. w.

Anhang III. Über ein Problem von Herrn M. Fréchet.

24. Herr M. Fréchet hat das Problem gestellt[46]), möglichst allgemeine Kategorien von Räumen aufzusuchen, in denen *nicht konstante stetige Funktionen* existieren[47]).

Die vorangehenden Betrachtungen (Kap. II u. III) gestatten uns, dieses Problem fast vollständig zu erledigen. Wir werden nämlich sehen, daß solche Funktionen in allen normalen Räumen existieren, aber daß das nicht in allen topologischen, ja sogar nicht in allen Räumen mit II. Abzählbarkeitsaxiom der Fall ist. Es ist mir nur nicht gelungen zu entscheiden, ob auch *reguläre* Räume existieren, in denen alle stetigen Funktionen konstant sind.

25. Wir können, wie schon gesagt, aus den Betrachtungen des Kap. II schließen, daß *in jedem normalen Raume nichtkonstante stetige Funktionen existieren*[48]). Ja noch mehr! Es besteht sogar der

Satz. *Es seien A und B zwei elementenfremde abgeschlossene, im normalen Raume E liegende Mengen. Man kann dann in E eine stetige Funktion $f(x)$ erklären, so daß*

---

[44]) Hausdorff, loc. cit. S. 232.

[45]) loc. cit. S. 263, II.

[46]) Siehe z. B seine „Esquisse", S. 377.

[47]) Die Funktionen $f(x)$, von denen hier die Rede sein wird, sollen in dem betreffenden Raume definiert und *reellwertig* sein (d. h. $f(x)$ ist eine reelle Zahl). Über Stetigkeit siehe z. B. Hausdorff, loc. cit., Kap. IX, § 1.

[48]) Selbstverständlich sind die aus einem Punkte bestehenden Räume außer Betracht zu lassen.

$$f(x) = 0 \quad \textit{auf } A,$$
$$f(x) = 1 \quad \textit{auf } B,$$
$$0 \leqq f(x) \leqq 1 \quad \textit{in allen übrigen Punkten von } E$$

sei.

Vorbemerkung. Daraus folgt insbesondere, daß es (in einem normalen Raum) stetige Funktionen $f(x)$ gibt, die in zwei beliebig vorgegebenen Punkten a und b *verschiedene* Werte annehmen: $f(a) \neq f(b)$.

Oder etwas allgemeiner: Zu jedem a und jedem $G \supset a$ kann eine stetige Funktion gefunden werden, die in a gleich 0 und außerhalb G durchweg gleich 1 ist[49]).

Beweis. Wir setzen $F = A$, $G_1 = E - B$ — was ja zur Inklusion $F \subset G_1$ führt —, und definieren die Gebiete G_t $(0 \leqq t \leqq 1)$ gemäß dem Hilfssatze 4, § 10. Wir setzen außerdem $G_t = 0$ für $t < 0$ und $G_t = E$ für $t > 1$; dann ist die Bedingung

$$\text{aus } t_1 < t_2 \text{ folgt } \overline{G}_{t_1} \subset G_{t_2}$$

für beliebige reelle t_1 und t_2 erfüllt. Wenn nun x irgendein Punkt von E ist, so folgt aus dieser Bedingung, daß die Indizes t derjenigen Gebiete G_t, die den Punkt x nicht enthalten, eine *Halbgerade*

$$-\infty < t \leqq \tau_x \quad \text{oder} \quad -\infty < t < \tau_x$$

erfüllen; und wir wollen $f(x) = \tau_x$ setzen.

Für einen zu G_0 (also insbesondere zu A) gehörenden Punkt ist dann $f(x) = 0$; außerhalb G_1 (d. h. auf B) ist $f(x)$ offenbar $= 1$. Man erkennt ferner leicht, daß $f(x)$ überall nichtnegativ und $\leqq 1$ ist. Daß aber diese Funktion auch stetig ist, kann man folgendermaßen einsehen:

Es seien der Punkt a von E und die positive Zahl ε beliebig gegeben. Da a zum Gebiet $G_{\tau_a+\varepsilon}$, aber nicht zum Gebiet $G_{\tau_a - \frac{\varepsilon}{2}}$ gehört, so folgt hieraus wegen $\overline{G}_{\tau_a-\varepsilon} \subset G_{\tau_a-\frac{\varepsilon}{2}}$, daß a im Gebiet $G_{\tau_a+\varepsilon} - \overline{G}_{\tau_a-\varepsilon}$ liegt. Wir können folglich eine Umgebung U_a finden, die in diesem Gebiete liegt:

$$U_a \subset G_{\tau_a+\varepsilon} - \overline{G}_{\tau_a-\varepsilon} \subset G_{\tau_a+\varepsilon} - G_{\tau_a-\varepsilon}.$$

Da jeder Punkt x von U_a in $G_{\tau_a+\varepsilon}$, aber nicht in $G_{\tau_a-\varepsilon}$ liegt, ist in U_a durchweg $\tau_a - \varepsilon \leqq \tau_x \leqq \tau_a + \varepsilon$, d. h.

$$|f(x) - f(a)| \leqq \varepsilon,$$

was die Stetigkeit von $f(x)$ im (beliebigen) Punkte a bedeutet.

26. Ein topologischer Raum mit II. Abzählbarkeitsaxiom, in dem jede stetige Funktion konstant ist. Das ist der im Kap. III

[49]) Vgl. die Sätze im § 27.

konstruierte Raum R. Es seien, in der Tat, $f(x)$ eine in R stetige Funktion, a und b zwei beliebige Punkte dieses Raumes, ε eine beliebige Zahl > 0. Wir können dann zwei Umgebungen U_a und U_b derart definieren, daß für $x \subset U_a$ bzw. $x \subset U_b$

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |f(x) - f(b)| < \varepsilon$$

sei. Auf $\overline{U}_a$ und $\overline{U}_b$ ist dann

$$|f(x) - f(a)| \leqq \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad |f(x) - f(b)| \leqq \varepsilon;$$

da aber in R jedes Punktepaar untrennbar ist, also $\overline{U}_a$ und $\overline{U}_b$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt x besitzen, folgt hieraus, daß

$$|f(b) - f(a)| \leqq 2\varepsilon,$$

also — da a, b und ε beliebig waren —, daß $f(x)$ konstant ist, w. z. b. w.

27. Es ist übrigens zu bemerken, daß das Fréchetsche Problem nicht nur mit meinem Beweise der Mächtigkeitssätze für zusammenhängende Mengen, sondern auch mit diesen Sätzen selbst eng verknüpft ist.

Einerseits gibt es in jedem nichtzusammenhängenden Raume E nichtkonstante stetige Funktionen; wenn nämlich $E = A + B$ eine Zerspaltung in zwei abgesonderte Mengen ist, genügt es, $f(x) = 0$ auf A und $= 1$ auf B zu setzen; andererseits gelten die folgenden zwei leicht beweisbaren Sätze:

In einem Raume, in dem zu jedem Punktepaare a, b eine stetige Funktion $f(x)$ gefunden werden kann, für die $f(a) \neq f(b)$ ist, ist jede zwischen zwei Punkten zusammenhängende Menge mindestens von der Mächtigkeit des Kontinuums.

In einem Raume, in dem zu jedem a und jedem $G \supset a$ eine stetige Funktion existiert, die in a gleich 0, außerhalb G aber durchweg $\geqq 1$ ist, ist jede Menge von positiver Dimension mindestens von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Wir begnügen uns damit, die erstere Behauptung zu beweisen. Es sei C eine Menge, die zwischen den Punkten a und b zusammenhängend ist. Wir betrachten eine — der Voraussetzung nach existierende — stetige Funktion $f(x)$, für die $f(a) < f(b)$ ist, und bezeichnen mit A_t, C_t, B_t diejenigen Teilmengen von C, in denen $f(x)$ bzw. kleiner, gleich oder größer als t ist; dabei ist t eine beliebige der Bedingung

$$f(a) < t < f(b)$$

genügende reelle Zahl. Es ist

$$C = A_t + C_t + B_t,$$

$$A_t \supset a, \quad B_t \supset b;$$

da nun auf $\bar{A}_t$ und $\bar{B}_t$ $f(x) \leqq t$ bzw. $\geqq t$ ist, sehen wir, daß

$$H(A_t, B_t) = A_t \cdot \bar{B}_t + B_t \cdot \bar{A}_t = 0,$$

also daß C_t nicht leer sein kann: sonst würde ja C nicht zwischen a und b zusammenhängend sein. Andererseits sind C_{t_1} und C_{t_2} für $t_1 \neq t_2$ elementenfremd; C enthält folglich $2^{\aleph_0}$ paarweise zueinander fremde Teilmengen C_t, ist also mindestens von der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, w. z. b. w.

Die zweite Behauptung wird ganz analog bewiesen.

28. Nachträgliche Bemerkungen. Der Satz des § 25 ist für das Metrisationsproblem [7]) von großer Wichtigkeit: Ich beabsichtige demnächst eine Arbeit zu publizieren, in der ich mittels dieses Satzes zeigen werde, daß *jeder normale topologische Raum mit* II. *Abzählbarkeitsaxiom einem metrischen Raume homöomorph ist* [50]).

Derselbe Satz ist auch mancher anderen Anwendungen fähig; er erlaubt z. B., den *Satz über die Erweiterungsmöglichkeit des Definitionsbereiches einer stetigen Funktion,* mit dessen Beweis für den Fall der gewöhnlichen n-dimensionalen sowie der metrischen Räume sich viele Autoren beschäftigt haben [51]), auf alle normalen Räume zu übertragen. Ich will hier nämlich den folgenden Satz beweisen:

Ist F eine abgeschlossene Menge des normalen Raumes E und $\varphi(x)$ eine beschränkte Funktion, die auf F definiert und daselbst stetig ist, so kann man eine im ganzen Raume stetige beschränkte Funktion $f(x)$ finden, die auf F mit $\varphi(x)$ zusammenfällt [52]).

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß der Satz des § 25 auch dann richtig bleibt, wenn z. B. die Menge A leer ist, und daß man in seiner Formulierung die Zahlen 0 und 1 durch zwei beliebige Zahlen α und β $(\alpha < \beta)$ ersetzen kann. Wir setzen nun $\varphi_0(x) = \varphi(x)$ und bezeichnen mit μ_0 die obere Schranke von $|\varphi_0(x)|$; wir bezeichnen ferner mit A_0 und B_0 diejenigen (abgeschlossenen) Teilmengen von F, in denen

---

[50]) Eine unmittelbare Folge des genannten Metrisationssatzes ist der im § 19 bewiesene Satz (nicht aber dessen Verallgemeinerung in Fußnote [41])).

[51]) Vgl Lebesgue, Palermo Rendic. **24** (für die Ebene); Brouwer, Math. Ann. **71**, S. 309 (*implicite*) und **79**, S. 209 (*explicite*); de la Vallée Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire,* § 125; Bohr (mitgeteilt in Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, § 541, 542) (alle für den R_n); Tietze, Journ. f. Math. **145**, S. 14; Hausdorff, Math. Zeitschr. **5**, S. 296 (beide für metrische Räume).

[52]) In nicht normalen Räumen braucht dieser Satz nicht erfüllt zu sein: es genügt, den im § 26 erwähnten Raum R zu betrachten, eine aus zwei Punkten a und b bestehende Menge F in ihm zu wählen und alsdann $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ zu setzen; die Funktion $\varphi(x)$ ist offenbar auf der abgeschlossenen Menge F stetig, kann aber nicht auf den ganzen Raum stetig erweitert werden.

$\varphi_0(x) \leqq -\frac{\mu_0}{3}$ bzw. $\geqq \frac{\mu_0}{3}$ ist, und bestimmen, in E gemäß dem Satze des § 25 eine stetige Funktion $f_0(x)$, die $= -\frac{\mu_0}{3}$ auf A_0, $= \frac{\mu_0}{3}$ auf B_0 ist, und in allen übrigen Punkten von E der Bedingung $|f_0(x)| \leqq \frac{\mu_0}{3}$ genügt. Wenn wir jetzt auf F

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - f_0(x)$$

setzen, so ist $\varphi_1(x)$ eine auf F stetige Funktion, und die obere Schranke μ_1 von $|\varphi_1(x)|$ genügt offenbar der Ungleichung $\mu_1 \leqq \frac{2}{3}\mu_0$.

Der Übergang von $\varphi_1(x)$ zu $\varphi_2(x)$ vollzieht sich in genau derselben Weise: A_1 und B_1 sind diejenigen Teilmengen von F, in denen $\varphi_1(x) \leqq -\frac{\mu_1}{3}$ bzw. $\geqq \frac{\mu_1}{3}$ ist, $f_1(x)$ eine in E stetige Funktion, die auf diesen Mengen $= -\frac{\mu_1}{3}$ bzw. $= \frac{\mu_1}{3}$ ist, sonst aber der Ungleichung $|f_1(x)| \leqq \frac{\mu_1}{3}$ genügt, und $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - f_1(x)$.

In dieser Weise fortfahrend, erhalten wir zwei Folgen

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \quad \text{und} \quad f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

von stetigen Funktionen, die auf F bzw. in E definiert sind und, wie leicht ersichtlich, daselbst den Ungleichungen

$$(59) \qquad |\varphi_n(x)| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu_0, \qquad |f_n(x)| \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{\mu_0}{3}$$

Genüge leisten; auf F ist außerdem

$$(60) \qquad \varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - f_n(x).$$

Wenn wir jetzt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

setzen, so folgt aus (59), daß diese Reihe gleichmäßig konvergent, also daß die im ganzen Raume definierte Funktion $f(x)$ stetig ist; $f(x)$ ist auch beschränkt, da, zufolge (59),

$$|f(x)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{\mu_0}{3} = \mu_0$$

ist. Auf F ist aber, wie aus (60) und (59) ersichtlich ist,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n(x) - \varphi_{n+1}(x)) = \varphi_0(x) = \varphi(x),$$

womit alles bewiesen ist[53]).

---

[53]) Im Falle eines (beliebigen) *metrischen* Raumes gestaltet sich der hier gegebene Beweis besonders einfach, da dann der Satz des § 25 trivial wird: es genügt nämlich $f(x) = \frac{\varrho(x, A)}{\varrho(x, A) + \varrho(x, B)}$ zu setzen, wo $\varrho(x, A)$ die Entfernung von x bis A (d. h. die untere Schranke der Entfernung zwischen x und einem variablen Punkte von A) ist.

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, daß der Satz des § 25 eine Eigenschaft der normalen Räume zum Ausdruck bringt, *die der Normalität äquivalent ist,* d. h. daß ein Raum, in dem diese Eigenschaft — oder auch nur die schwächere Eigenschaft, die dadurch entsteht, daß man die Zusatzbedingung „$0 \leqq f(x) \leqq 1$ in allen übrigen Punkten von E“ streicht — erfüllt ist, *eo ipso* normal ist. Es sei, in der Tat, E ein Raum, in dem die schwächere Eigenschaft erfüllt ist, und A und B zwei zueinander fremde abgeschlossene Mengen dieses Raumes; indem wir eine stetige Funktion $f(x)$ bilden, die auf diesen Mengen $= 0$ bzw. $= 1$ ist, und alsdann mit G_A und G_B diejenigen Mengen bezeichnen, in denen $f(x) < \frac{1}{2}$ bzw. $> \frac{1}{2}$ ist, erhalten wir offenbar die in der Definition der Normalität verlangten Gebiete.

Le Batz (Loire Inférieure), den 14. 8. 1924.

(Eingegangen am 23. 8. 1924.)