Werk

Titel: Die logischen Grundlagen der Mathematik.

Autor: Hilbert, D.

Jahr: 1923

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0088|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die logischen Grundlagen der Mathematik[1]).

Von

David Hilbert in Göttingen.

Meine Untersuchungen zur Neubegründung der Mathematik[2]) bezwecken nichts Geringeres, als die allgemeinen Zweifel an der Sicherheit des mathematischen Schließens definitiv aus der Welt zu schaffen. Wie nötig eine solche Untersuchung ist, gewahren wir, wenn wir bedenken, wie wechselnd und unpräzise die diesbezüglichen Anschauungen oft selbst der hervorragendsten Mathematiker waren, oder wenn wir uns erinnern, daß von einigen der namhaftesten Mathematiker der neuesten Zeit die bisher für die sichersten gehaltenen Schlüsse in der Mathematik verworfen werden.

Zur vollständigen Lösung der in Rede stehenden prinzipiellen Schwierigkeiten ist, wie ich glaube, eine Theorie des mathematischen Beweises selbst nötig. Diese Beweistheorie habe ich nunmehr unter der wirksamsten Hilfe und Mitarbeit von Paul Bernays soweit fortgeführt, daß in der Tat durch sie die einwandfreie Begründung der Analysis und Mengenlehre gelingt; ja ich glaube nunmehr so weit zu sein, daß man auch an die großen klassischen Probleme der Mengenlehre von der Art des Kontinuumsproblems und an die nicht minder wichtigen noch offenen Probleme der mathematischen Logik erfolgreich wird herantreten können.

Diese ganze Theorie mit ihren langen und schwierigen Entwickelungen hier darzulegen, ist unmöglich. Es haben sich aber im Laufe der Untersuchung eine Reihe von neuen Einsichten und Zusammenhängen herausgestellt, die auch einzeln für sich und von den übrigen losgelöst Interesse verdienen. Ich möchte eine solche, wie ich glaube, neue Einsicht hier zur Sprache bringen, die außerdem gerade von der Art ist, daß sie den Kern meiner Beweistheorie sehr tief berührt.

---

1) Vortrag, gehalten in der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft, September 1922.

2) Vgl. meine in Kopenhagen und Hamburg gehaltenen Vorträge, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1922.

Erinnern wir uns an das Auswahlaxiom, welches Zermelo zuerst für die Mengenlehre aufgestellt und formuliert und auf welches er seinen genialen Beweis für die Wohlordnung des Kontinuums gegründet hat. Die Einwendungen, die gegen diesen Beweis und die damit verknüpften Fortschritte der Mengenlehre gemacht worden sind, richteten sich wesentlich gegen das Auswahlprinzip; und auch heute wird wohl meist die Auffassung vertreten, daß die Zulässigkeit des Auswahlprinzips zweifelhaft sei, während die sonstigen Schlußweisen, wie sie in der Mengenlehre im allgemeinen und in dem Zermeloschen Beweise im besonderen zur Anwendung kommen, der Beanstandung nicht in gleicher Weise ausgesetzt sind. Diese Auffassung halte ich für irrig; vielmehr stellt sich in der logischen Analyse, wie sie sich in meiner Beweistheorie vollzieht, heraus, daß der wesentliche dem Auswahlprinzip zugrunde liegende Gedanke ein allgemein logisches Prinzip ist, das schon für die ersten Anfangsgründe des mathematischen Schließens notwendig und unentbehrlich ist. Wenn wir diese Anfangsgründe sichern, gewinnen wir zugleich den Boden für das Auswahlprinzip: beides geschieht durch meine Beweistheorie.

Der Grundgedanke meiner Beweistheorie ist folgender:

Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik in engerem Sinne zu einem Bestande an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen, insbesondere die für „folgt" ($\rightarrow$) und für „nicht" ($\overline{}$)[3]) darin vorkommen. Gewisse Formeln, die als Bausteine des formalen Gebäudes der Mathematik dienen, werden Axiome genannt. Ein Beweis ist eine Figur, die uns als solche anschaulich vorliegen muß; er besteht aus Schlüssen vermöge des Schlußschemas

$$\frac{\mathfrak{S} \qquad \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}}{\mathfrak{T}},$$

wo jedesmal die Prämissen, d. h. die betreffenden Formeln $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}$ jede entweder ein Axiom ist bzw. direkt durch Einsetzung aus einem Axiom entsteht oder mit der Endformel $\mathfrak{T}$ eines Schlusses übereinstimmt, der vorher im Beweise vorkommt bzw. durch Einsetzung aus einer solchen Endformel entsteht. Eine Formel soll beweisbar heißen, wenn sie entweder

[3]) In meiner vorhin zitierten Abhandlung hatte ich dieses Zeichen noch vermieden; es hat sich herausgestellt, daß bei der gegenwärtigen, ein wenig veränderten Darstellung meiner Theorie der Gebrauch des Zeichens für „nicht" ohne Gefahr geschehen kann.

ein Axiom ist bzw. durch Einsetzen aus einem Axiom entsteht oder die Endformel eines Beweises ist.

Zu der eigentlichen so formalisierten Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, die zur Sicherung jener notwendig ist, in der — im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik — das inhaltliche Schließen zur Anwendung kommt, aber lediglich zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome. In dieser Metamathematik wird mit den Beweisen der eigentlichen Mathematik operiert und diese letzteren bilden selbst den Gegenstand der inhaltlichen Untersuchung. Auf diese Weise vollzieht sich die Entwickelung der mathematischen Gesamtwissenschaft in beständigem Wechsel auf zweierlei Art: durch Gewinnung neuer beweisbarer Formeln aus den Axiomen mittels formalen Schließens und andererseits durch Hinzufügung neuer Axiome nebst dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit mittels inhaltlichen Schließens.

Die Axiome und beweisbaren Sätze, d. h. die Formeln, die in diesem Wechselspiel entstehen, sind die Abbilder der Gedanken, die das übliche Verfahren der bisherigen Mathematik ausmachen, aber sie sind nicht selbst die Wahrheiten im absoluten Sinne. Als die absoluten Wahrheiten sind vielmehr die Einsichten anzusehen, die durch meine Beweistheorie hinsichtlich der Beweisbarkeit und der Widerspruchsfreiheit jener Formelsysteme geliefert werden.

Durch dieses Programm ist die Wahl der Axiome für unsere Beweistheorie schon vorgezeichnet. Wir beginnen die Reihe der Axiome folgendermaßen:

I. *Axiome der Folge.*

1. $$A \rightarrow (B \rightarrow A)$$
(Zufügen einer Voraussetzung).

2. $$\{A \rightarrow (A \rightarrow B)\} \rightarrow (A \rightarrow B)$$
(Weglassen einer Voraussetzung).

3. $$\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \rightarrow \{B \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$
(Vertauschen der Voraussetzungen).

4. $$(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)\}$$
(Elimination einer Aussage).

II. *Axiome der Negation.*

5. $$A \rightarrow (\bar{A} \rightarrow B)$$
(Satz vom Widerspruch).

6. $$(A \rightarrow B) \rightarrow \{(\bar{A} \rightarrow B) \rightarrow B\}$$
(Prinzip des tertium non datur).

III. *Axiome der Gleichheit.*

7. $a = a.$

8. $a = b \rightarrow (A(a) \rightarrow A(b)).$

IV. *Axiome der Zahl.*

9. $a + 1 \neq 0.$

10. $\delta(a + 1) = a.$

Zu 9. sei bemerkt, daß die formale Negation von $a = b$ d. h. $a = b$ auch $a \neq b$ geschrieben wird und mithin $a + 1 \neq 0$ die formale Negation von $a + 1 = 0$ ist.

Auf Grund dieser Axiome 1. bis 10. erhalten wir leicht die ganzen positiven Zahlen und die für diese geltenden Zahlengleichungen. Auch läßt sich aus diesen Anfängen mittels „finiter" Logik durch rein anschauliche Überlegungen, wozu die Rekursion und die anschauliche Induktion für vorliegende endliche Gesamtheiten gehört, die elementare Zahlentheorie[4]) gewinnen, ohne daß dabei eine bedenkliche oder problematische Schlußweise zur Anwendung gelangt.

Die beweisbaren Formeln, die auf diesem Standpunkt gewonnen werden, haben sämtlich den Charakter des Finiten, d. h. die Gedanken, deren Abbilder sie sind, können auch ohne irgendwelche Axiome inhaltlich und unmittelbar mittels Betrachtung endlicher Gesamtheiten erhalten werden.

In unserer Beweistheorie wollen wir indes über diesen Bereich der finiten Logik hinausgehen und solche beweisbaren Formeln gewinnen, die die Abbilder transfiniter Sätze der gewöhnlichen Mathematik sind. Und die eigentliche Kraft und Bewährung unserer Beweistheorie werden wir gerade darin erblicken, wenn uns nach Hinzunahme gewisser weiterer transfiniter Axiome der Nachweis der Widerspruchsfreiheit gelingt. Wo geschieht nun zum erstenmal das Hinausgehen über das konkret Anschauliche und Finite? Offenbar schon bei Anwendung der Begriffe „*alle*" und „*es gibt.*" Mit diesen Begriffen hat es folgende Bewandtnis. Die Behauptung, daß *alle* Gegenstände einer endlichen vorliegenden überblickbaren Gesamtheit eine gewisse Eigenschaft besitzen, ist logisch gleichwertig mit einer Zusammenfassung mehrerer Einzelaussagen durch „*und*"; z. B. alle Bänke in diesem Auditorium sind hölzern heißt soviel als: diese Bank ist hölzern und jene Bank ist hölzern und . . . und die Bank dort ist hölzern. Ebenso

[4]) In der definitiven Darstellung meiner Theorie geschieht die Begründung der elementaren Zahlentheorie ebenfalls mittels Axiomen; ich berufe mich hier nur der Kürze halber auf die direkte anschauliche Begründung.

ist die Behauptung, daß es in einer endlichen Gesamtheit einen Gegenstand mit einer Eigenschaft *gibt*, gleichwertig mit einer Verknüpfung von Einzelaussagen durch „*oder*"; z. B. es gibt unter diesen Kreidestücken ein rotes Kreidestück heißt soviel als: dieses Kreidestück ist rot oder jenes Kreidestück ist rot oder ... oder das Kreidestück dort ist rot.

Auf Grund hiervon erschließen wir das tertium non datur für endliche Gesamtheiten in folgender Fassung: entweder haben alle Gegenstände eine bestimmte Eigenschaft oder es gibt einen Gegenstand, der diese Eigenschaft nicht hat; und zugleich erhalten wir unter Gebrauch des üblichen All- und Seinzeichens — „für alle a": (a); nicht für alle a: $\overline{(a)}$; „es gibt ein a": $(\mathsf{E}a)$; „es gibt kein a": $(\overline{\mathsf{E}}a)$ — die strenge Gültigkeit der Äquivalenzen

$$(a)A(a) \quad \text{äq.} \quad (\mathsf{E}a)\bar{A}(a)$$

und

$$(\overline{\mathsf{E}}a)A(a) \quad \text{äq.} \quad (a)\bar{A}(a);$$

hierin bedeutet $A(a)$ eine Aussage mit einer Variablen a, d. h. ein Prädikat.

Diese Äquivalenzen werden aber gewöhnlich in der Mathematik auch bei unendlich vielen Individuen ohne weiteres als gültig vorausgesetzt; damit aber verlassen wir den Boden des Finiten und betreten das Gebiet der transfiniten Schlußweise. Wenn wir ein Verfahren, das im Finiten zulässig ist, ohne Bedenken stets auf unendliche Gesamtheiten anwenden würden, so öffneten wir damit Irrtümern Tor und Tür. Es ist dies die gleiche Fehlerquelle, wie wir sie aus der Analysis genugsam kennen: wie dort die Übertragung der für endliche Summen und Produkte gültigen Sätze auf unendliche Summen und Produkte nur erlaubt ist, wenn eine besondere Konvergenzuntersuchung die Schlußweise sichert, so dürfen wir auch die unendlichen logischen Summen und Produkte

$$A_1 \,\&\, A_2 \,\&\, A_3 \,\&\, \ldots,$$

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \ldots$$

nicht wie endliche behandeln; es sei denn, daß die jetzt zu erörternde Beweistheorie eine solche Behandlung gestattet.

Betrachten wir die eben aufgestellten Äquivalenzen. Bei unendlich vielen Dingen hat die Negation des allgemeinen Urteils $(a)Aa$ zunächst gar keinen präzisen Inhalt, ebensowenig wie die Negation des Existentialurteils $(\mathsf{E}a)Aa$. Allerdings können gelegentlich diese Negationen einen Sinn erhalten, nämlich, wenn die Behauptung $(a)Aa$ durch ein Gegenbeispiel widerlegt wird oder wenn aus der Annahme $(a)Aa$ bzw. $(\mathsf{E}a)Aa$ ein Widerspruch abgeleitet wird. Diese Fälle sind aber nicht kontradiktorisch entgegengesetzt; denn wenn $A(a)$ nicht für alle a gilt, wissen

wir noch nicht, daß ein Gegenstand mit der Eigenschaft Nicht-A wirklich vorliegt; ebensowenig dürfen wir ohne weiteres sagen: entweder gilt $(a)Aa$ bzw. $(\mathsf{E}a)A$ oder diese Behauptungen weisen einen Widerspruch wirklich auf. Bei endlichen Gesamtheiten sind „*es gibt*" und „*es liegt vor*" einander gleichbedeutend; bei unendlichen Gesamtheiten ist nur der letztere Begriff ohne weiteres deutlich.

Wir sehen also, daß für den Zweck einer strengen Begründung der Mathematik die üblichen Schlußweisen der Analysis in der Tat nicht als logisch selbstverständlich übernommen werden dürfen. Vielmehr ist es gerade unsere Aufgabe, zu erkennen, warum und inwieweit die Anwendung der transfiniten Schlußweisen, so wie sie in der Analysis und in der Mengenlehre geschieht, doch stets richtige Resultate liefert. Auf dem Boden des Finiten soll also die freie Handhabung und volle Beherrschung des Transfiniten erreicht werden! Wie ist die Lösung dieser Aufgabe möglich?

Unserem Plane gemäß werden wir zu jenen vier bisherigen finiten Axiomgruppen solche hinzufügen, die der Ausdruck transfiniter Schlußweisen sind. Die transfiniten Schlußweisen werden in der gewöhnlichen Sprache durch folgende Stichworte bezeichnet: „*alle*", „*es gibt*", „*tertium non datur*", „*vollständige Induktion*", „*Prinzipien von Aristoteles*", „*der Existenz*", „*der Reduzierbarkeit*", „*der Vollständigkeit*" und „*der Auswahl*". Ich benutze nun den dem Auswahlprinzip zugrunde liegenden Gedanken, indem ich eine logische Funktion

$$\tau(A) \quad \text{oder} \quad \tau_a(A(a))$$

einführe, die jedem Prädikat $A(a)$, d. h. jeder Aussage mit einer Variablen a einen bestimmten Gegenstand $\tau(A)$ zuordnet. Diese Funktion τ soll indes noch das folgende Axiom erfüllen:

V. *Transfinites Axiom.*

11. $$A(\tau A) \rightarrow A(a).$$

Dieses Axiom heißt in gewöhnlicher Sprache soviel wie: Wenn ein Prädikat A auf den Gegenstand τA zutrifft, so trifft dasselbe für alle Gegenstände a zu. Die Funktion τ ist eine bestimmte individuelle Funktion von einer Variablen A, die Prädikatencharakter hat; sie möge die *transfinite Funktion* und das Axiom 11. das *transfinite Axiom* heißen. Um uns seinen Inhalt zu veranschaulichen, nehmen wir etwa für A das Prädikat „bestechlich sein"; dann hätten wir unter τA einen bestimmten Mann von so unverbrüchlichem Gerechtigkeitssinn zu verstehen, daß, wenn er sich als bestechlich herausstellen sollte, tatsächlich alle Menschen überhaupt bestechlich sind.

Das transfinite Axiom V. ist als der Urquell aller transfiniten Begriffe, Prinzipien und Axiome anzusehen. Fügen wir nämlich die folgenden Axiome hinzu:

VI. *Definitionsaxiome des All- und des Sein-Zeichen*

$$A(\tau A) \rightarrow (a)A(a),$$
$$(a)A(a) \rightarrow A(\tau A),$$
$$A(\tau A) \rightarrow (\mathsf{E}a)A(a),$$
$$(\mathsf{E}a)A(a) \rightarrow A(\tau A),$$

so ergeben sich die sämtlichen genannten rein logischen, transfiniten Prinzipien als beweisbare Formeln, nämlich:

$$(a)A(a) \rightarrow Aa$$
(Aristotelisches Prinzip).

$$A(a) \rightarrow (\mathsf{E}a)Aa$$
(Existential-Prinzip).

$$(a)Aa \rightarrow (\mathsf{E}a)\bar{A}a,$$
$$(\mathsf{E}a)\bar{A}a \rightarrow (a)Aa,$$
$$(\overline{\mathsf{E}a})Aa \rightarrow (a)\bar{A}a,$$
$$(a)\bar{A}a \rightarrow (\overline{\mathsf{E}a})Aa.$$

Durch diese letzten vier Formeln sind die vorhin für endliche Gesamtheiten aufgestellten Äquivalenzen und desgleichen auch das tertium non datur für unendliche Gesamtheiten als gültig erkannt worden[5]).

Nach diesen Ausführungen sehen wir, daß alles auf den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome I. bis V. (1. bis 11.) ankommt.

Der allgemeine Grundgedanke, wie ein solcher Nachweis geschieht, ist stets der folgende: wir nehmen an, es liege ein Beweis konkret als Figur mit der Endformel $0 \neq 0$ vor; auf diesen Fall läßt sich in der Tat das Vorhandensein eines Widerspruchs zurückführen. Sodann zeigen wir durch eine inhaltliche finite Betrachtungsweise, daß dies kein unseren Anforderungen genügender Beweis sein kann.

Wir müssen zunächst den Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome I. bis IV. (1. bis 10.) führen. Das Verfahren besteht darin, daß wir den als vorliegend angenommenen Beweis sukzessive abändern und zwar nach folgenden Gesichtspunkten:

1. Der Beweis kann durch Wiederholen und Weglassen von Formeln zu einem solchen Beweise gemacht werden, daß jede Formel eine und nur

---

[5]) Die Erkenntnis, daß die *eine* Formel 11. zur Herleitung dieser sämtlichen Formeln genügt, verdanke ich P. Bernays.

eine Formel des Beweises als „Kömmling" hat, zu deren Motivierung sie dient. Der Beweis wird auf diese Weise in Fäden zerfällt, die von den Axiomen ausgehend auf die Endformel münden.

2. Die im Beweise auftretenden Variablen lassen sich ausschalten.

3. Es kann erreicht werden, daß jede Formel außer logischen Zeichen nur Zahlzeichen

$$0,\ 0+1,\ 0+1+1,\ \ldots$$

enthält, wodurch jede Formel des Beweises zu einer „numerischen" Formel wird.

4. Jede Formel wird auf eine gewisse logische „Normalform" gebracht.

Nach Ausführung dieser Operationen ist für jede Formel des Beweises gewissermaßen direkt eine Kontrolle möglich, d. h. die Feststellung, ob sie in gewissem, genau anzugebendem Sinne „richtig" oder „falsch" ist. Soll nun der vorgelegte Beweis allen unseren Anforderungen genügen, so müßte, wie sich zeigt, der Reihe nach jede Formel des Beweises diese Kontrolle bestehen und also auch die Endformel $0 \neq 0$ richtig sein, was nicht zutrifft.

Damit wäre die Widerspruchsfreiheit der Axiomgruppen I. bis IV. (1. bis 10.) nachgewiesen, wenn auch die genaue Ausführung dieses soeben nur skizzierten Nachweises mehr Zeit beanspruchen würde, als mir in diesem Vortrage zur Verfügung steht.

Nun ist aber gegenwärtig für uns gerade die Widerspruchsfreiheit des Axioms V. (11.) von dringendem Interesse, weil durch dieses Axiom erst die transfiniten Schlußweisen in der Mathematik ihre Rechtfertigung finden sollen.

Ich möchte den eigentlichen Kern dieses Beweises an dem ersten und einfachsten Falle etwas ausführlicher entwickeln. Dieser erste Fall stellt sich sofort ein, sobald wir unsere bisher streng finit gebliebene Zahlentheorie weiterführen. Dies geschieht, indem wir in Axiom V. (11.) für die Gegenstände a die Zahlzeichen, d. h. die ganzen positiven Zahlen inklusive 0 und als Prädikate $A(a)$ die Gleichungen $f(a) = 0$, wo f eine gewöhnliche ganzzahlige Funktion ist, nehmen. Die logische Funktion τ ordnet jedem Prädikat einen Gegenstand, d. h. jeder mathematischen Funktion f eine Zahl zu. Aus τ wird also eine gewöhnliche ganzzahlige Funktionenfunktion — so daß, wenn f eine bestimmte Funktion ist, τ eine bestimmte Zahl wird; wir nennen dieselbe $\tau(f)$, so daß

$$\tau(f) = \tau_a(f(a) = 0)$$

ist; das Axiom V. (11.) verwandelt sich in das Axiom

12. $$f(\tau(f)) = 0 \rightarrow f(a) = 0.$$

Die Eigenschaft der Funktionenfunktion $\tau(f)$, die sich in dieser Formel abbildet, verwirklichen wir am einfachsten, indem wir unter $\tau(f)$ die Zahl 0 verstehen, sobald für jedes a die Gleichung $f(a) = 0$ erfüllt ist, sonst jedoch $\tau(f)$ gleich der ersten Zahl a nehmen, für die $f(a) \neq 0$ ausfällt. Die Funktion $\tau(f)$ ist eine transfinite Funktion und gehört zu denen, die von Brouwer und Weyl verboten worden sind. Es kommt alles darauf an, nachzuweisen, daß das Axiom 12., zu den Axiomen 1. bis 10. hinzugefügt, keinen Widerspruch ergibt.

Zu dem Zwecke knüpfen wir an den Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der Axiome 1. bis 10. an und versuchen denselben auf den gegenwärtigen Fall zu übertragen. Wir haben jetzt eine neue Schwierigkeit zu berücksichtigen, die darin liegt, daß in dem vorgelegten Beweise das Zeichen $\tau(f)$ vorkommen wird, wo für die Funktionsvariable f beliebige spezielle Funktionen $\varphi, \varphi', \ldots$ eingesetzt sein können. Wir machen jedoch für den Augenblick die erleichternde und vereinfachende Annahme, daß nur eine einzige solche spezielle Funktion φ als Einsatz für f vorkomme, so daß der vorgelegte Beweis schließlich in einen Beweis verwandelt werden kann, der außer logischen Zeichen und Zahlzeichen nur $\tau(\varphi)$ enthält, wo φ eine spezielle Funktion bedeutet, bei deren Definition τ nicht angewandt worden ist.

Mit diesem Beweise nehmen wir nun der Reihe nach folgende Operationen vor:

1. Wir setzen gewissermaßen vorläufig und versuchsweise überall für $\tau(\varphi)$ das Zahlzeichen 0 ein. Unser Beweis wird dann zu einer Aufeinanderfolge von „numerischen" Formeln; alle diese Formeln sind im früheren Sinne „richtig", eventuell mit Ausnahme derjenigen, die aus Axiom 12. fließen. Nun fließen aber aus 12., wenn wir für f darin φ nehmen, sowie für a die betreffende Einsetzung machen und dann an Stelle von $\tau(\varphi)$ das Zahlzeichen 0 einsetzen, nur Formeln von der Gestalt

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow \varphi(\mathfrak{z}) = 0.$$

Da hierin $\mathfrak{z}$ ein Zahlzeichen bedeutet und φ eine durch Rekursion definierte Funktion ist — die Definition durch Rekursion wird leicht in unseren Formalismus aufgenommen —, so reduziert sich $\varphi(\mathfrak{z})$ ebenfalls auf ein Zahlzeichen. Es wird sich wesentlich darum handeln, ob in diesen Formeln überall aus $\varphi(\mathfrak{z})$ nach dieser Reduktion auf ein Zahlzeichen das Zahlzeichen 0 wird oder ob einmal aus $\varphi(\mathfrak{z})$ dabei ein von 0 verschiedenes Zahlzeichen entsteht. Im ersteren Falle sind wir mit dem Nachweis der Widerspruchsfreiheit schon am Ziel. Denn alle jene aus Axiom 12. fließenden Formeln sind dann für sich schon richtig. Jene Aufeinanderfolge von Formeln, die wir aus dem Beweise erhielten, wird wiederum zu einem

Beweise, bei dem sich durch die schrittweise Kontrollierung alle Formeln als richtig erweisen, so daß die falsche Formel $0 \neq 0$ nicht als Endformel entstehen kann.

2. Tritt nun die zweite Alternative ein, so haben wir damit ein $\mathfrak{z}$ gewonnen, so daß

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0$$

eine falsche Formel ist. Wir nehmen dann mit dem vorgelegten Beweise eine andere Operation vor: wir setzen für $\tau(\varphi)$ nicht 0, sondern überall im Beweise das Zahlzeichen $\mathfrak{z}$ ein. Die aus Axiom 12. fließenden Formeln haben dann sämtlich die Gestalt

$$\varphi(\mathfrak{z}) = 0 \rightarrow \varphi(\mathfrak{z}) = 0,$$

und diese Formeln sind für sich schon jedenfalls richtig, da ja die vor dem Folgezeichen stehende Formel falsch ist. Der Beweis wird wiederum ein Beweis mit lauter numerischen Formeln, die richtig sind, so daß auch die Endformel nicht $0 \neq 0$ lauten kann.

Hiermit ist der Nachweis für die Widerspruchsfreiheit der transfiniten Funktion $\tau(f)$ vollständig geführt; damit wird auch das tertium non datur für den Begriff der unendlichen Zahlenreihe, wie sie die ganzzahlige Variable in f repräsentiert, sichergestellt: nämlich auf Grund der Axiome der Negation II (5. bis 6.) kommt die formale Negation dem kontradiktorischen Gegenteil gleich; es ist aber $\tau(f) \neq 0$ die formale Negation von $\tau(f) = 0$ und andererseits nach VI $\tau(f) \neq 0$ mit $(\mathsf{E}a)(f(a) \neq 0)$ und $\tau(f) = 0$ mit $(a)(f(a) = 0)$ äquivalent.

Man kann die Lösung der Schwierigkeit, wie sie meine Beweistheorie gibt, sich so begreiflich machen. Unser Denken ist finit; indem wir denken, geschieht ein finiter Prozeß. Diese sich von selbst betätigende Wahrheit wird in meiner Beweistheorie gewissermaßen mit benutzt in der Weise, daß, wenn irgendwo sich ein Widerspruch herausstellen würde, mit der Erkenntnis dieses Widerspruches auch zugleich die betreffende Auswahl aus den unendlich vielen Dingen verwirklicht sein müßte. In meiner Beweistheorie wird demnach nicht behauptet, daß die Auffindung eines Gegenstandes unter den unendlich vielen Gegenständen stets bewirkt werden kann, wohl aber, daß man ohne Risiko eines Irrtums stets so tun kann, als wäre die Auswahl getroffen. Wir könnten Weyl wohl das Vorhandensein eines circulus zugeben, aber dieser circulus ist nicht vitiosus. Vielmehr ist die Anwendung des tertium non datur stets ohne Gefahr.

In meiner Beweistheorie werden zu den finiten Axiomen die transfiniten Axiome und Formeln hinzugefügt, ähnlich wie in der Theorie der komplexen Zahlen zu den reellen die imaginären Elemente und wie in der Geometrie zu den wirklichen die idealen Gebilde. Und auch der Beweg-

grund dafür und der Erfolg des Verfahrens ist in meiner Beweistheorie der gleiche wie dort: nämlich die Hinzufügung der transfiniten Axiome geschieht im Sinne der Vereinfachung und des Abschlusses der Theorie.

Nach den bisherigen Ausführungen darf die transfinite Funktion $\tau(f)$ überall in der Mathematik angewandt werden, sowohl wenn es sich um die Definition von Funktionen und die Bildung neuer Begriffe handelt, als auch bei der Führung der mathematischen Beweise.

Als Beispiel für die Definition einer Funktion diene die Funktion

$$\varphi(a) = [a^{\sqrt{a}}],$$

wo die rechts stehende Klammer 0 bzw. 1 bedeuten soll, je nachdem $a^{\sqrt{a}}$ eine rationale oder irrationale Zahl wird.

Was die Verwendung in Beweisen anlangt, so kann man in den in der Literatur vorliegenden Beweisen meist leicht erkennen, ob eine transfinite Funktion darin wesentlich benutzt wird oder nicht. Geeignete Beispiele dafür liefern die beiden von mir gegebenen, unter sich völlig verschiedenen Beweise für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems. In dem ersten findet eine transfinite Schlußweise Anwendung, in dem zweiten nicht. Mein erster Beweis für die Endlichkeit des vollen Invariantensystems ist von der Art, daß darin die transfinite Schlußweise wesentlich ist und nicht herausgeschafft werden kann. Freilich kann vermutlich ein finiter Satz stets auch ohne Anwendung einer transfiniten Schlußweise bewiesen werden — wie ja im Falle des Satzes von der Endlichkeit des vollen Invariantensystems mein zweiter Beweis zeigt —, aber diese Behauptung ist von der Art der Behauptung, daß jeder mathematische Satz überhaupt entweder sich als richtig nachweisen oder widerlegen lassen muß. P. Gordan hatte ein gewisses unklares Gefühl für die transfinite Schlußweise in meinem ersten Invarianten-Beweise: er brachte dasselbe zum Ausdruck, indem er den Beweis als „theologisch" bezeichnete. Er modifizierte dann die Darstellung meines Beweises durch Einbeziehung seiner Symbolik und glaubte damit den Beweis seines „theologischen" Charakters entkleidet zu haben. In Wahrheit war die transfinite Schlußweise nur hinter dem Formalismus der Symbolik versteckt worden.

Nach derselben Methode, wie wir vorhin die Widerspruchsfreiheit der transfiniten Funktionenfunktion $\tau(f)$ nachwiesen, können wir auch die Widerspruchsfreiheit der Funktionenfunktion $\mu(f)$ nachweisen, die die Eigenschaft hat — ebenso wie $\tau(f)$ — 0 zu sein, wenn das Argument $f(a)$ für alle Variablen a verschwindet, aber andererseits, wenn dies nicht der Fall ist, gleich dem kleinsten Wert wird, für den $f(a)$ von 0 verschieden ist. Mittelst dieser Funktion $\mu(f)$ ergibt sich dann das Prinzip der vollständigen Induktion

$$A(0) \rightarrow (a)(A(a) \rightarrow A(a+1)) \rightarrow A(a)$$

als beweisbare Formel. Diese Erkenntnis, in inhaltlicher Darstellungsweise, ist das, was das Hauptergebnis der Dedekindschen Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen" ausmacht.

Um die Analysis zu begründen, definieren wir die reelle, zwischen 0 und 1 gelegene Zahl z durch einen Dualbruch und diesen durch eine Funktion $\varphi(n)$, den Stellenwert, die nur 0 oder 1 ist:

$$z = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad (a_n = f(n)).$$

Ein Beispiel für einen auf transfinite Weise definierten Dualbruch ist:

$$0, [2^{\sqrt{2}}] [3^{\sqrt{3}}] [4^{\sqrt{4}}] \ldots;$$

derselbe stellt eine wohldefinierte reelle Zahl dar, obwohl beim heutigen Stande der Wissenschaft sich nicht einmal die erste Dualstelle berechnen läßt.

Das Fundament der Analysis ist der Satz von der oberen Grenze. Die transfinite Funktion τ ermöglicht nun in der Tat den Beweis des Satzes, daß die obere Grenze einer Folge von reellen Zahlen stets existiert.

Um dies zu erkennen, ist es zunächst ratsam, die logischen Zeichen & für „*und*" und $\vee$ für „*oder*" einzuführen. Wir tun es durch Zurückführung auf die bisher von uns allein benutzten logischen Zeichen $\rightarrow$ und $\overline{}$ in folgender Weise:

$$\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$$

sollen dasselbe sein wie

$$\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\mathfrak{B}} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Sodann schreiben wir noch für die Formel

$$(a)(fa = 0 \vee fa = 1) \,\&\, (a)(\mathsf{E}\, b)(f(a + b) = 1)$$

zur Abkürzung $\mathfrak{R} f$, d. h. $\mathfrak{R} f$ bedeutet, daß die Funktion fa vermöge des stets unendlichen Dualbruches

$$0, f(1)\, f(2)\, f(3) \ldots$$

eine reelle, zwischen 0 exklusive und 1 inklusive gelegene Zahl darstellt. Eine Folge $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ reeller Zahlen wird dann durch eine Funktion $\varphi(a, n)$ dargestellt, für welche die Formel $\mathfrak{R}\, \varphi(a, n)$ bei beliebigem ganzzahligem n beweisbar ist. Der weitere Gang des Beweises geschieht auf Grund folgenden Gedankens. Wir betrachten in dem Schema

$$\begin{array}{l}
\zeta_1 = 0,\ \varphi(1,1)\ \varphi(2,1)\ \varphi(3,1) \ldots \\
\zeta_2 = 0,\ \varphi(1,2)\ \varphi(2,2)\ \varphi(3,2) \ldots \\
\zeta_3 = 0,\ \varphi(1,3)\ \varphi(2,3)\ \varphi(3,3) \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

zunächst die Ziffern in der ersten Vertikalreihe hinter dem Komma. Sind

diese alle 0, d. h. ist $\varphi(1, n) = 0$ für alle n, so nehme man $\psi(1) = 0$, sonst aber $\psi(1) = 1$. Wenn nun in der zweiten Vertikalreihe alle diejenigen Ziffern 0 sind, für die je die zur selben Horizontalreihe gehörige Ziffer der ersten Vertikalreihe $\psi(1)$ wird, so nehme man $\psi(2) = 0$, sonst aber $\psi(2) = 1$. Sind in der dritten Vertikalreihe alle diejenigen Ziffern 0, für die je die zur selben Horizontalreihe gehörigen Ziffern der ersten und zweiten Vertikalreihe $\psi(1)$ bzw. $\psi(2)$ werden, so nehme man $\psi(3) = 0$, sonst aber $\psi(3) = 1$; usf. Auf Grund dieser Betrachtung gelangen wir dazu, die obere Grenze $\psi(a)$ der Folge $\varphi(a, n)$ reeller Zahlen durch folgende simultane Rekursion zu definieren:

$$\begin{aligned} \chi(0, n) &= 0 \\ \psi(a+1) &= \pi_n\{\chi(a, n) = 0 \rightarrow \varphi(a+1, n) = 0\} \\ \chi(a+1, n) &= \chi(a, n) + \iota(\psi(a+1), \varphi(a+1, n)); \end{aligned}$$

dabei ist $\iota(a, b)$ die Funktion von a, b, die 0 oder 1 darstellt, je nachdem $a = b$ oder $a \neq b$ wird, und π_n ist die durch folgende Axiome definierte transfinite Funktion:

$$\begin{aligned} &(n)\, \mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{A}n) = 0, \\ &(\overline{n})\, \mathfrak{A}(n) \rightarrow \pi_n(\mathfrak{A}n) = 1; \end{aligned}$$

in Worten: $\pi_n(\mathfrak{A}n)$ ist 0 oder 1, je nachdem die bezügliche Aussage $\mathfrak{A}$ für alle n gilt oder nicht.

Man kann nun im Sinne meiner Beweistheorie streng beweisen, daß $\mathfrak{R}\psi$ gilt und daß überdies die reelle Zahl $\psi(n)$ die Eigenschaft der oberen Grenze hat, wobei der Begriff „kleiner" für irgend zwei reelle Zahlen f, g durch die Formel

$$(\mathsf{E}a)\{(b)(b < a \rightarrow fb = gb) \;\&\; fa = 0 \;\&\; ga = 1\}$$

zu definieren ist.

Nunmehr sei statt einer Folge von reellen Zahlen eine beliebige Menge von reellen Zahlen vorgelegt, etwa dadurch, daß für die Funktionsvariable f eine bestimmte Aussage $\mathfrak{R}(f)$ gegeben sei, die einerseits sowohl f als eine eine reelle Zahl darstellende Funktion charakterisiert, wie außerdem gerade die reellen Zahlen der Menge auszeichnet. Die obere Grenze $\psi(a)$ dieser Menge $\mathfrak{R}(f)$ von reellen Zahlen wird dann durch folgende simultane Rekursion erhalten:

$$\begin{aligned} \chi(0, f) &= 0 \\ \psi(a+1) &= \pi_f\{\mathfrak{R}f \rightarrow (\chi(a, f) = 0 \rightarrow f(a+1) = 0)\} \\ \chi(a+1, f) &= \chi(a, f) + \iota(\psi(a+1), f(a+1)); \end{aligned}$$

dabei bedeutet π_f die transfinite Funktion, die durch die Axiome definiert ist:

$$(f)\,\mathfrak{A}(f) \rightarrow \pi_f(\mathfrak{A} f) = 0\,,$$
$$(\overline{f})\,\mathfrak{A}(f) \rightarrow \pi_f(\mathfrak{A} f) = 1\,.$$

Zum Schluß möchte ich noch eine Anwendung auf das Zermelosche Auswahlprinzip für Mengen von Mengen reeller Zahlen machen. Vorhin war eine Menge reeller Zahlen f durch eine bestimmte Aussage $\mathfrak{N}(f)$ mit f als Funktionsvariable gegeben worden; wir fügen jetzt die Axiome

$$\mathfrak{N} f \rightarrow \nu(f) = 1$$
$$\overline{\mathfrak{N} f} \rightarrow \nu(f) = 0$$

hinzu, deren Widerspruchsfreiheit leicht erkannt wird. Auf diese Weise ist die Menge durch die Funktionenfunktion $\nu(f)$ definiert, die für die reellen Zahlen f der Menge den Wert 1 und für alle anderen reellen Zahlen f den Wert 0 hat. Aus der für $\mathfrak{N}$ geltenden Formel

$$\mathfrak{N} f \rightarrow \mathfrak{R} f$$

ergibt sich

$$\nu(f) = 1 \rightarrow \mathfrak{R} f.$$

ν ist eine spezielle Funktionenfunktion, r sei die zugehörige Variable, d. h. eine Variable für Funktionenfunktionen, deren Argument eine gewöhnliche Funktion eines Argumentes ist.

Eine spezielle Menge von Mengen von reellen Zahlen wird dann durch eine spezielle, r enthaltende Aussage $\mathfrak{M}(r)$ dargestellt, für welche die Formel

$$\mathfrak{M}(r)\ \&\ (rf = 1) \rightarrow \mathfrak{R} f$$

gilt. Wir nehmen an, diese Mengenmenge habe die Eigenschaft, daß jede Menge von reellen Zahlen, die Element von ihr ist, mindestens eine reelle Zahl enthält, oder in Formeln:

$$\mathfrak{M}(r) \rightarrow (\mathsf{E} f)(r(f) = 1).$$

Nunmehr definieren wir eine transfinite Funktion τ_f wie vorhin τ_a, nur mit dem Unterschiede, daß an Stelle der Zahlenvariablen a von vornherein eine Funktionsvariable f genommen wird, d. h. τ_f wird durch das Axiom

$$(12^*) \qquad r(\tau_f(r)) = 0 \rightarrow r(f) = 0$$

definiert, das unserem Axiom 12. für τ_a entspricht und auch gerade so aus dem logischen Axiom V. (11.) erhalten wird, wenn man darin als Gegenstände die Funktionen f und als Prädikate die Gleichungen $r(f) = 0$ nimmt; dabei hat dann τ_f den Charakter, stets selbst eine Funktion darzustellen, während das Argument eine Funktionenfunktion r ist.

Wir haben jetzt folgende beweisbaren Formeln:

$$(\mathsf{E}f)(\mathfrak{r}(f)=1) \rightarrow (\overline{f})(\mathfrak{r}f=0),$$

$$(\overline{f})(\mathfrak{r}f=0) \rightarrow \mathfrak{r}(\tau_f(\mathfrak{r})) \neq 0,$$

$$\mathfrak{r}(\tau_f(\mathfrak{r})) \neq 0 \rightarrow \mathfrak{r}(\tau_f(\mathfrak{r})) = 1,$$

und hieraus folgt

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{r}) \rightarrow \mathfrak{r}(\tau_f(\mathfrak{r})) = 1;$$

d. h. jedem Element $\mathfrak{r}$ der Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{r})$ ist eine ganzzahlige Funktion, nämlich $\tau_f(\mathfrak{r})$ zugeordnet. Diese stellt eine reelle Zahl dar; denn aus einer früheren Formel folgt sofort $\mathfrak{R}(\tau_f(\mathfrak{r}))$. Die Funktionen $\tau_f(\mathfrak{r})$ bilden eine Menge; denn um für diese Funktionen — wir wollen sie $g(a)$ nennen — eine ihre Gesamtheit definierende Aussage zu erhalten, brauchen wir nur zu formulieren, daß jede von ihnen mit dem Repräsentanten $\tau_f\mathfrak{r}$ einer zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Menge $\mathfrak{r}$ übereinstimmt, wie es durch die Formel

$$(\mathsf{E}\mathfrak{r})\{\mathfrak{M}(\mathfrak{r}) \;\&\; (a)(g(a) = \tau_f\mathfrak{r}(a))\}$$

geschieht, so daß eine Menge nach der ursprünglichen Darstellungsmethode wirklich vorliegt.

Wegen des Auftretens des Sein-Zeichens $(\mathsf{E}\mathfrak{r})$ ist es noch nötig, die Widerspruchsfreiheit der zu der neuen Variablensorte $\mathfrak{r}$ gehörigen transfiniten Funktion $\tau_f(\mathfrak{r})$ nachzuweisen. Dieser Nachweis hat, ebenso wie derjenige für π_n und π_f, nach dem Muster der transfiniten Funktion τ_a zu geschehen.

Damit ist der Beweis des Zermeloschen Auswahlprinzips für Mengen von Mengen reeller Zahlen erbracht.

Durch die genaue Ausführung der soeben skizzierten Grundgedanken meiner Beweistheorie wird die Begründung der Analysis vollendet und die der Mengenlehre angebahnt.

(Eingegangen am 29. 9. 1922.)