

## Werk

**Titel:** Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in ...

**Autor:** Bernstein, Felix

**Jahr:** 1905

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684\\_0060|log9](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0060|log9)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene.

Von

FELIX BERNSTEIN in Halle a./S.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite.
Einleitung . . . . .	117

Teil I.

Das sphärische Problem.

§ 1. Definitionen. Konvexe Kurven. Parallelkurven . . . . .	119
§ 2. Das Zustandsdiagramm . . . . .	121
§ 3. Die Transformation auf das absolute Problem . . . . .	124
§ 4. Das absolute Problem. . . . .	126

Teil II.

Die approximativen Sätze und der Grenzübergang zur Ebene.

§ 5. Das Verhalten der Minimaleigenschaft beim Grenzübergang. Die Definition der natürlichen Breite . . . . .	127
§ 6. Über die angenähert kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Sphäre .	129
§ 7. Über die angenähert kürzeste einfach geschlossene Linie, die zwei Gegenpunkte der Sphäre enthält . . . . .	131
§ 8. Über die angenähert kürzeste einfach geschlossene Linie, welche die Kugeloberfläche hälftet . . . . .	133
§ 9. Über die einfach geschlossene sphärische oder ebene Kurve, welche angenähert den Inhalt und den Umfang eines Kreises besitzt und die Minimaleigenschaft des sphärischen oder ebenen Kreises. . . . .	134

Einleitung.

Daß der Kreis unter allen ebenen Kurven von gegebenem Umfang den größten Inhalt habe, ist eine Behauptung, welche für unsere Vorstellung eine Art unmittelbarer Gewißheit besitzt. Es ist nicht ohne Interesse den hierfür maßgebenden Gründen nachzugehen. Einen Hauptanteil an der Ausbildung der Vorstellung hat jedenfalls die Erfahrung,

daß beim Anfüllen einer biegsamen aber nicht beliebig dehnbaren Hülle von zylindrisch allseitig geschlossener Form mit einem festen Material, Wasser, Sand, Schrotkörner etc., sich dieselbe mehr und mehr abrundet und daß sie schließlich unter Spannung der Wandung einen kreisförmigen Querschnitt bekommt.

Das *intuitiv-mechanische Gefühl*, das die Vorstellung begleitet, stammt jedenfalls aus dieser Quelle. Man hat unmittelbar das Gefühl, daß der Inhalt einen allseitig gleichmäßigen Druck auf die Wandung ausübt und sie dadurch in die Kreisform zwingt. Vielleicht muß man aber auch noch ein *visuelles Moment* berücksichtigen. Wir machen öfter die Erfahrung, daß wir eine kreisförmige Fläche schneller mit den Blicken beherrschen, als eine nichtkreisförmige Fläche von sonst gleichem Inhalt. Der wandernde Blick hat im Durchschnitt geringere Entfernungen zu überwinden, um die Dimensionen der Fläche zu erfassen. Dementsprechend erscheint uns auch die Kontur geringer. Das Gesichtsfeld selbst hat ja aus solchen Gründen eine nahezu kreisförmige Gestalt. So wirken vielleicht zwei Momente verschiedener Natur zusammen, um der Vorstellung die zwingende Gewalt zu verleihen, die ihr eigentümlich ist.

Die einleuchtende Einfachheit des Satzes, sowie die verhältnismäßige Schwierigkeit einer strengen Begründung hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker schon frühzeitig auf sich gezogen. Indem ich die ersten unvollkommenen Versuche übergehe, erwähne ich besonders J. Steiner, Über Maximum und Minimum bei den Figuren etc. Werke Bd. II, 16. 17. — H. A. Schwarz, Math. Abhandlungen Bd. I, S. 327ff. — Minkowski, Math. Ann. Bd. 57. — Hurwitz, Annales de l'École normale supérieure t. 19, 1902. —

Es muß auffallen, daß die bisherigen Beweise mit der ursprünglichen Quelle, aus der wir die Gewißheit seiner Richtigkeit schöpfen, in keiner Beziehung stehen. Es schien mir daher lohnend einen Versuch zu machen, auf der anschaulichen Grundlage einen strengen Beweis zu führen. Hierbei diene die folgende Vorstellung als Ausgangspunkt der Betrachtung. Es möge sich auf einer Kugeloberfläche, etwa der überall als glatt gedachten Erdoberfläche, eine Flüssigkeitsschicht, die von einem elastischen Bande umschlungen und zusammengehalten ist, von einem Punkte, etwa dem Nordpol aus, sich ausbreiten. Dabei wird die Kontur unter der Wirkung der mechanischen Kräfte stets ein Kreis bleiben. Im Verlauf der Ausdehnung wird das Wasser einmal die ganze nördliche Halbkugel bedecken und ihre Kontur wird der Äquator sein. Durch dieselben Kräfte also, welche vorher die Begrenzung kreisförmig gestalten, wird sie einmal ein größter Kreis und also die kürzeste Verbindung zweier ihrer Punkte. Hier ist also ein offener Zusammenhang des vorliegenden Problems

mit dem einfacheren der kürzesten Verbindung zweier Punkte. Der gesuchte Beweis besteht lediglich in einer genaueren Ausarbeitung des analogen Verhältnisses bei der Ausdehnung nicht kreisförmiger Schichten. (Teil I.) Allerdings ist damit zunächst nur der Satz für die Kurven auf der Kugeloberfläche bewiesen.

Um daraus für die ebenen Kurven das gleiche folgern zu können, muß ein Grenzübergang gemacht werden. Es muß hierzu nachgewiesen werden, daß wir von dem Prinzip der Stetigkeit Gebrauch machen dürfen. Es wird dementsprechend gezeigt, daß eine kleine Abänderung der Bedingungen unserer Erscheinung nur eine kleine Abänderung dieser selbst zur Folge hat, und damit die Berechtigung des Grenzübergangs gesichert. Der Nachweis geschieht in Form einer Ungleichung für die sphärischen Kurven, welche sich auf die ebenen Kurven überträgt (Teil II).

## Teil I.

### Das sphärische Problem.

#### § 1.

#### Einfach geschlossene Kurven. Konvexe Kurven. Parallelkurven.

Das Ziel der Betrachtung in dem ersten Teil ist der Beweis des folgenden

Satz 1. *Unter allen einfach geschlossenen konvexen Kurven auf der Kugeloberfläche von gegebenem Inhalt hat der Kreis den kürzesten Umfang.*

Wir werden den Beweis zunächst nur für solche *konvexe* Kurven führen, welche überall eine bestimmte geodätische Krümmung  $\frac{1}{\rho_g} = \frac{d\tau}{ds}$  besitzen und die darin liegende Einschränkung im zweiten Teile aufheben. Wir stellen, der größeren Klarheit halber, die Definitionen der verwendeten Begriffe hier noch einmal zusammen.

1. *Definition der einfach geschlossenen sphärischen Kurve C.* Es seien  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  eindeutige und stetige Funktionen der reellen Variablen  $t$  von der Periode  $T$ , so daß allgemein  $x(t) = x(t+T)$ ,  $y(t) = y(t+T)$ ,  $z(t) = z(t+T)$  ist; wenn dann  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  für alle Werte von  $t$  ist, so durchläuft der Punkt  $(x, y, z)$  für variable  $t$  eine geschlossene sphärische Kurve  $C$ , welche *einfach geschlossen* heißt, sobald zwei verschiedenen Werten von  $t$  im Intervall  $0 \dots T$  zwei verschiedene Punkte  $(x, y, z)$  entsprechen.

2. *Inhalt der sphärischen Kurve.* Nach C. Jordan teilt die Kurve  $C$  die Kugeloberfläche in zwei getrennte Teile  $N$  und  $S^*$ ). Jeder derselben

\*) C. Jordan, Cours d'analyse 2. éd. Bd. 1, p. 90. Die Betrachtung ist dort nur für ebene Kurven geführt, läßt sich aber ohne weiteres auf sphärische übertragen.

kann als Inneres resp. Äußeres der Kurve  $C$  angesehen werden und besitzt zugleich einen bestimmten Inhalt, der entsprechend als Inhalt  $J$  der Kurve  $C$  bezeichnet werde. (Im allgemeinen werden wir den kleineren als Inneres, den größeren als Äußeres auffassen.) Der *Umfang* der Kurve wird in der üblichen Weise definiert und mit  $L$  bezeichnet.

3. *Konvexe Kurven.* Eine Kurve  $C$  heißt *konvex*, wenn sie von einer sphärischen Geraden (größtem Kreise) in nicht mehr als zwei Punkten  $\alpha$  und  $\beta$  so geschnitten wird, daß die Strecke  $\alpha\beta$  ganz im Innern von  $C$  liegt.

Wir nehmen an, die konvexe Kurve  $C$  habe an jeder Stelle eine bestimmte Tangente  $t$  und geodätische Krümmung  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds}$ , wo  $d\tau$  das Element des Kontingenzwinkels bedeutet. Die Tangente  $t$  im Punkte  $\alpha$  hat mit der Kurve  $C$  keinen zweiten Punkt  $\beta$  gemein, da sonst eine der die Tangente approximierenden Sehnen drei Punkte  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  und  $\beta'$  mit der Kurve  $C$  gemein haben würde.

*Es liegt also die Kurve  $C$  ganz innerhalb einer der beiden Halbkugeln, welche die Tangente  $t$  begrenzt.*

4. *Parallelkurven.* Die in der Einleitung besprochene Ausdehnung eines sphärischen Flächenstückes führt die Kontur desselben in eine parallele Kontur über. Wir betrachten demgemäß, und zwar der Vereinfachung halber für  $r = 1$ , die äußeren Parallelkurven  $C_\varepsilon$  einer konvexen Kurve  $C$  mit angegebenen Eigenschaften, die den allseitigen Abstand  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ) besitzen. Es besteht der

Satz 2a. *Die äußere Parallelkurve  $C_\varepsilon$  im Abstände  $\varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ) zur Kurve  $C$  ist eine einfach geschlossene Kurve (die jedoch im allgemeinen nicht konvex ist).*

Beweis. Es sei  $\sigma$  ein Punkt auf der äußeren Normalen  $n$  im Punkte  $\alpha$  der Kurve, so daß  $\sigma\alpha = \varepsilon$  ( $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ) sei. Es ist dann die Entfernung  $\sigma\beta$  des Punktes  $\sigma$  von einem beliebigen andern Punkte  $\beta$  der Kurve  $C$  größer als  $\varepsilon$ .

Denn der um  $\sigma$  mit dem Radius  $\varepsilon$  geschlagene Kreis berührt in  $\alpha$  den größten Kreis  $t$ , der in  $\alpha$  tangiert, und wird durch diesen von der Kurve  $C$  getrennt. Also schneidet  $\sigma\beta$  den größten Kreis  $t$  und zugleich den Kreis mit dem Radius  $\varepsilon$ , so daß  $\sigma\beta > \varepsilon$  ist. Hieraus geht hervor, daß die äußere Parallelkurve  $C_\varepsilon$  sich nicht selbst in einem Punkte  $\sigma$  schneiden kann. Denn ein solcher Punkt  $\sigma$  würde von zwei Punkten  $\alpha$  und  $\beta$  der Kurve  $C$  gleichen Abstand  $\varepsilon$  haben, was unmöglich ist.

Wir beweisen ferner den

Satz 2b. Das Linienelement  $ds$  bewahrt bei der Dilatation der Kurve  $C$  sein Vorzeichen, so lange  $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  ist und es ist unter der gleichen Bedingung an jeder Stelle

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = \frac{ds_\varepsilon}{\varrho} \quad \text{und} \quad L_\varepsilon = \int ds_\varepsilon.$$

Beweis. Wenden wir dieselbe Betrachtung wie beim Beweis von Satz 2a auf zwei unendlich benachbarte Normalen an, so erkennen wir, daß sich dieselben für den angegebenen Bereich der Größe  $\varepsilon$  außerhalb der Kurve nicht schneiden. Es wird daher  $ds_\varepsilon$  im gleichen Sinne durchlaufen wie  $ds$  und es wird  $L_\varepsilon = \int ds_\varepsilon$  die Länge im gewöhnlichen Sinne bedeuten. Bezeichnet ferner  $P$  die auf der inneren Normalen gemessene Entfernung des Mittelpunkts des oskulierenden Kreises von dem Punkte  $\alpha$ , so ist offenbar  $P + \varepsilon$  der Radius des oskulierenden Kreises an dem entsprechenden Punkte von  $C_\varepsilon$ . Die Linienelemente  $ds$  und  $ds_\varepsilon$  verhalten sich, wie die Peripherien der oskulierenden Kreise, also wie  $2\pi \sin P$  zu  $2\pi \sin (P + \varepsilon)$ . Es ist also

$$ds_\varepsilon = ds \frac{\sin (P + \varepsilon)}{\sin P},$$

woraus an der Stelle  $\varepsilon = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = ds \cdot \operatorname{ctg} P = \frac{ds}{\varrho}$$

infolge der bekannten Beziehung  $\operatorname{ctg} P = \frac{1}{\varrho}$  folgt.

Die gleiche Betrachtung gilt an jeder Stelle  $\varepsilon$  im betrachteten Bereich, woraus also für  $0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  allgemein

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = \frac{ds_\varepsilon}{\varrho_\varepsilon}$$

folgt.

## § 2.

### Das Zustandsdiagramm.

Um uns über den Sinn unserer Behauptung volle Klarheit zu verschaffen, tragen wir in einer  $XY$ -Ebene  $2\pi - \frac{J}{r^2}$  als  $X$ -Koordinate,  $\frac{L}{r}$  als  $Y$ -Koordinate auf, wobei wir  $\frac{L}{r}$  und  $\frac{J}{r^2}$  statt  $L$  und  $J$  einführen, um die Betrachtung auf die Einheitskugel zu verlegen.

Lassen wir nun eine beliebige einfach geschlossene Kurve  $C$  auf der Kugeloberfläche alle möglichen Formen annehmen, so entspricht einem jeden ihrer „Zustände“ ein bestimmtes Wertepaar  $2\pi - \frac{J}{r^2}, \frac{L}{r}$ , welches in der  $XY$ -Ebene durch einen Punkt  $P$  repräsentiert wird,

Die  $XY$ -Ebene heiße dementsprechend die „Zustandsebene“ der Kurve  $C$ . Die Gesamtheit aller Punkte, welche auf diese Weise in der  $XY$ -Ebene erreicht werden können, bezeichnen wir als das „reelle Gebiet  $G$ “, welches also in bestimmtem Sinne zu den Kurven  $C$  gehört. Alle diejenigen Punkte der Zustandsebene, welchen keine wirklichen Kurven entsprechen, heißen das *imaginäre oder unmögliche Gebiet  $U$* .

Aus dieser Auffassung, welche sich bei allen Aufgaben der Variationsrechnung, wo Nebenbedingungen gestellt sind, in gleicher Weise entwickeln läßt, ergeben sich ohne weiteres diejenigen Fragen, deren Lösung als die natürliche Aufgabe dieses Teils der Variationsrechnung erscheint.

Das Gebiet  $G$  ist als *Punktmenge* definiert. Es ist die Natur dieser Punktmenge zu studieren. Man muß z. B. zeigen, ob sie *abgeschlossen*, ob sie *in sich dicht*, *zusammenhängend* etc. ist.

In den meisten Fällen wird man, wie im vorliegenden, zeigen, daß das Gebiet  $G$  ein Kontinuum bildet, d. h. daß jeder Punkt eine Umgebung besitzt und mit jedem andern stetig verbunden werden kann.

Als *zentrale Frage* muß aber die folgende angesehen werden:

*Welches ist die Natur der Begrenzung der Punktmenge  $G$ ?*

d. h.

- 1) *Gehört die Begrenzung von  $G$  zu  $G$  selbst oder zu  $U$ ?*
- 2) *Welches sind diejenigen Gebilde, deren Zustand die Punkte der Begrenzung darstellen?*

Die Begrenzung ist dabei als die Menge der Punkte gedacht, welche zugleich Grenzpunkte der Punkte von  $G$  und der Punkte von  $U$  sind. Wir wollen die Punkte der Begrenzung als *kritische Punkte* bezeichnen.

Die Aufgabe, bei gegebenem  $X$  das kleinste zugehörige  $Y$  zu bestimmen, ist offenbar ein spezieller Fall der allgemeinen Fragestellung. Es wird dabei das Gebilde der kritischen Punkte durch eine Schar von Parallelen zur  $Y$ -Achse geschnitten und es werden die Schnittpunkte oder ein Teil derselben aufgesucht. Wenn die kritische Kurve aber aus mehreren Zweigen besteht oder stückweise der  $Y$ -Achse parallel ist, so erweist sich diese spezielle Fragestellung als unzweckmäßig und muß durch die allgemeine ersetzt werden.

Wenn die kritische Kurve eine *monotone* Funktion von  $X$  ist, so ist auch  $X$  eine eindeutige Funktion von  $Y$ , und die Aufgabe das größte  $X$ , das zu einem gegebenen  $Y$  gehört, zu suchen, hat dieselbe Lösung. A. Mayer hat in einer wichtigen Arbeit\*) die analytischen Bedingungen für eine solche Umkehrbarkeit der Fragestellung aufgestellt.

\*) A. Mayer, *Math. Ann.* Bd. 26, p. 74.

Bei Aufgaben, in denen drei Größen  $X, Y, Z$  oder mehr vorkommen, ist es meist noch wesentlicher, die spezielle Fragestellung durch die allgemeine zu ersetzen, da das kritische Gebilde in den vielen Fällen aus ganz verschiedenartigen Flächen zusammengesetzt ist.

Wir wollen nun die Verhältnisse bei unserm speziellen Problem ins Auge fassen. Wenn die sphärischen Kreise in der Tat die behauptete Minimaleigenschaft haben, so ist das kritische Gebilde hier ein Dreieck, welches von zwei Parallelen zur  $Y$ -Achse im Abstände  $+2\pi$  und  $-2\pi$ , sowie von dem oberhalb der  $X$ -Achse gelegenen Halbkreise  $K$  begrenzt wird, der  $O$  zum Zentrum und  $2\pi$  zum Radius hat. (Fig. 1.)

Der Halbkreis  $K$  repräsentiert die auf der Kugeloberfläche liegenden Kreise. In der Tat sind Inhalt und Umfang des sphärischen Kreises vom Radius  $\varrho$ , durch die bekannte Formel

$$(1) \quad Y = \frac{L}{r} = 2\pi \sin \frac{\varrho}{r},$$

$$X = 2\pi - \frac{J}{r^2} = 2\pi \cos \frac{\varrho}{r}$$

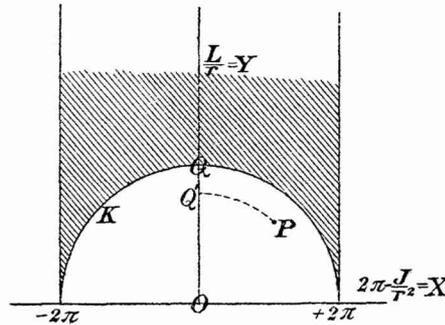


Fig. 1.

gegeben, so daß also  $\frac{\varrho}{r}$  das Argument des darstellenden Punktes ist

Unsere Behauptung gewinnt hier also die folgende Form:

- 1) Das kritische Gebilde ist in unserm Falle der Halbkreis  $K$  und zwei Halbgeraden.
- 2) Die Punkte des Halbkreises  $K$  stellen *allein* die sphärischen Kreise dar.

Die Beziehung zwischen einem beliebigen Punkte des Gebietes  $G$  und den entsprechenden sphärischen Kurven ist keine eindeutige. Eine umkehrbar eindeutige Beziehung tritt nur für die Punkte des Halbkreises  $K$  ein. Allgemeine Bedingungen für diese Verhältnisse sind nicht bekannt.

Da es evident ist, daß die beiden Halbgeraden zur Begrenzung von  $G$  gehören, so handelt es sich allein um die Untersuchung des Kreises  $K$ . Wir können daher unsern zu beweisenden Satz auch folgendermaßen formulieren. Da

$$(2) \quad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 = (2\pi)^2$$

die Gleichung des Kreises  $K$  ist, so ist das Äußere durch die Ungleichung

$$(3) \quad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 > (2\pi)^2$$

charakterisiert. Wir müssen daher für alle sphärischen Kurven, die nicht Kreise sind, die Ungleichung (3) behaupten, während für die sphärischen Kreise und nur für diese die Gleichung

$$\left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 = (2\pi)^2$$

gelten soll.

### § 3.

#### Die Transformation auf das absolute Problem.

Wir nehmen also im folgenden an, daß die *konvexe Kurve C an jeder Stelle eine bestimmte Tangente t und eine geodätische Krümmung*  $\frac{d\pi}{ds} = \frac{1}{\rho}$  *besitze.* Wenn wir jetzt entsprechend der in der Einleitung entwickelten Vorstellung die Kurve C durch einen auf das Innere ausgeübten Druck gleichmäßig ausdehnen, so wird sie in eine äußere Parallelkurve  $C_\varepsilon$  vom allseitigen Abstände  $\varepsilon \cdot r$  übergehen. Wir wollen die Wirkung dieser Transformation, die wir mit  $T_\varepsilon$  bezeichnen wollen, in dem Zustandsdiagramm studieren.

Ist die Kurve C zunächst ein Kreis, so geht sie wieder in einen Kreis über. Der darstellende Punkt P wandert also auf dem Halbkreise K und zwar durchläuft er alle Punkte desselben. Wenn die Kurve C ein größter Kreis geworden ist, so befindet sich der darstellende Punkt P auf der Y-Achse in Q.

Wie aber gestaltet sich das Bild in der Zustandsebene für eine der Kurven  $C_\varepsilon$ , welche kein Kreis ist? Die überraschend einfache Antwort liefert der

**Satz 3.** *Wird die Transformation  $T_\varepsilon$  auf alle konvexen Kurven C, welche den angegebenen Bedingungen genügen, gleichzeitig ausgeübt, so erfährt die Zustandsebene der darstellenden Punkte P eine Drehung um den Nullpunkt und zwar eine Drehung im positiven Sinne um den Winkel  $\varepsilon$ .*

Es sollen also die folgenden Formeln gelten:

$$(I) \quad \begin{aligned} 2\pi - \frac{J_\varepsilon}{r^2} &= \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right) \cos \varepsilon - \frac{L}{r} \sin \varepsilon, \\ \frac{L_\varepsilon}{r} &= \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right) \sin \varepsilon + \frac{L}{r} \cos \varepsilon, \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

wo  $J_\varepsilon$  und  $L_\varepsilon$  Inhalt und Umfang der Parallelkurve  $C_\varepsilon$  bedeuten.

**Beweis.** Es werde zunächst  $r = 1$  gesetzt. Bekanntlich ist  $\frac{\partial J_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = L_\varepsilon$  und also

$$(4) \quad \partial \frac{2\pi - J_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = -L_\varepsilon.$$

Für die Dilatation des Linienelements benutzen wir die Formel von § 1 Satz 2b

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} ds_\varepsilon = \frac{ds_\varepsilon}{\rho_\varepsilon} = d\tau_\varepsilon \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right).$$

Infolgedessen ist, in Hinblick auf Satz 2a,

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L_\varepsilon = 2\pi - J_\varepsilon, \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right),$$

wo  $L_\varepsilon = \int ds_\varepsilon$  die Länge von  $C_\varepsilon$ ,  $J_\varepsilon$  den Inhalt von  $C_\varepsilon$  nach der Formel  $2\pi - J_\varepsilon = \int d\tau_\varepsilon$  bedeutet. Aus (4) und (5) folgt mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} (2\pi - J_\varepsilon + iL_\varepsilon) = i(2\pi - J_\varepsilon + iL_\varepsilon)$$

durch Integration von  $\varepsilon = 0$  bis  $\varepsilon = \varepsilon$

$$(6) \quad 2\pi - J_\varepsilon + iL_\varepsilon = e^{i\varepsilon} (2\pi - J + iL) \quad \left(0 \leq \varepsilon < \frac{\pi}{2}\right).$$

Die Formel (6) stimmt aber völlig mit (I) überein, wenn wir, noch mit Rücksicht auf ein beliebiges  $r$ ,  $J_\varepsilon$  durch  $\frac{J_\varepsilon}{r^2}$  und  $L_\varepsilon$  durch  $\frac{L_\varepsilon}{r}$  für jedes  $\varepsilon$  ersetzen.

Zusatz. Es ist also insbesondere

$$(7) \quad \left(2\pi - \frac{J_\varepsilon}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L_\varepsilon}{r}\right)^2$$

eine Invariante unserer Transformation  $T_\varepsilon$ .

Die Transformation  $T_\varepsilon$  ist übrigens in der Ausdrucksweise der Lie'schen Theorie eine *Berührungstransformation*\*).

Neuerdings hat Engel in einer Note: Zur Flächentheorie\*\*) diese Transformation auf einer beliebigen Fläche untersucht.

Der eben bewiesene Satz 3 gestattet den folgenden Schluß. Gesetzt der Halbkreis  $K$  wäre nicht die kritische Linie, d. h. es gäbe innerhalb desselben einen Punkt  $P$ , welcher eine konvexe Kurve  $C$  mit den vorausgesetzten Eigenschaften darstellt, so würden wir auf diese Kurve die Transformation  $T_\varepsilon$  so anwenden, daß der darstellende Punkt  $P$  auf die  $Y$ -Achse rückt. Hierzu ist übrigens erforderlich, daß der Winkel  $\sphericalangle POQ = E$  zwischen Null und  $\frac{\pi}{2}$  liegt, eine Bedingung, die infolge der Gleichungen  $\operatorname{tg} E = \frac{2\pi - J}{L}$ ,  $J > 0$ ,  $L > 0$ , sicher erfüllt ist. Indem wir also  $\varepsilon = E$  setzen, wird  $2\pi - J_\varepsilon = 0$  und

$$(8) \quad L_\varepsilon^2 = (2\pi - J)^2 + L^2.$$

\*) Siehe Lie-Scheffers, Geometrie d. Berührungstransformationen. Lpzg. 1896.

\*\*) Berichte d. Kgl. Sächs. Akad. d. Wiss. Leipzig 1901.

Der Punkt  $P$  würde also in einen Punkt der  $Y$ -Achse  $Q'$  rücken, so daß  $OP = OQ' < 2\pi$  sein würde. Wenn wir aber beweisen, daß die Strecke  $OQ = 2\pi$  keinen darstellenden Punkt  $Q'$  in ihrem Innern enthält, so folgt also, daß auch der Kreis  $K$  keinen darstellenden Punkt in seinem Innern enthält.

Der Punkt  $Q$  stellt die größten Kreise der Kugeloberfläche dar. Die Behauptung, daß die Strecke  $OQ$  in ihrem Innern keinen darstellenden Punkt enthält, heißt daher nichts anderes als:

*Unter allen Kurven der angegebenen Eigenschaft, welche die Kugeloberfläche hälften, hat der größte Kreis den kleinsten Umfang.*

Auf dieses Problem, welches mit dem Problem der geodätischen Linie, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, identisch ist, haben wir also das *isoperimetrische* Problem zurückgeführt.

#### § 4.

##### Das absolute Problem.

Es bleibt also noch übrig zu beweisen, daß der folgende Satz gilt:

**Satz 4.** *Unter allen einfach geschlossenen Kurven  $D$ , welche die Kugeloberfläche hälften, hat der größte Kreis den kleinsten Umfang.*

Hierbei ist es nicht einmal nötig, über die zum Vergleich herangezogenen Kurven die einschränkenden Voraussetzungen zu machen, welche sich bei der Aufstellung der Transformationsformeln als nötig erwiesen.

Man erkennt zunächst, daß die Kurve  $D$  wenigstens ein Paar Gegenpunkte  $R$  und  $R'$  der Sphäre enthält. In der Tat teilt auch die Kurve  $D'$ , welche die sämtlichen Gegenpunkte der Punkte von  $D$  enthält, die Kugeloberfläche in zwei gleiche Teile. Würden sich nun  $D$  und  $D'$  nicht schneiden, so würden die beiden einfach geschlossenen Kurven die Kugeloberfläche in drei getrennte Teile  $T_1, T_{12}, T_2$ , zwei äußere  $T_1$  und  $T_2$ , und einen mittleren  $T_{12}$ , der von  $D$  und  $D'$  gleichzeitig begrenzt wird, zerfallen. Es würde dann  $T_{12}$  einen von Null verschiedenen Inhalt haben, und da andererseits  $T_1$  und  $T_2$  jeder den Inhalt  $2\pi$  haben würden, so würde die Summe  $T_1 + T_{12} + T_2$  größer als  $4\pi$ , d. h. größer als die Kugeloberfläche ausfallen, was einen Widerspruch ergibt. Es ist also  $T_{12}$  nicht vorhanden und die beiden Kurven  $D$  und  $D'$  schneiden sich in wenigstens einem Punkte  $R$ . Dann aber ist  $R'$ , der Gegenpunkt von  $R$ , gleichfalls Schnittpunkt von  $D$  und  $D'$ , und  $R$  und  $R'$  bilden ein Paar von Gegenpunkten auf der Kurve  $C$ .

Durch  $R$  und  $R'$  wird  $D$  in zwei Teile  $D_1$  und  $D_2$  zerlegt, welche die Längen  $L_1$  und  $L_2$  haben mögen. Ist  $D_1$  oder  $D_2$  kein größter Halbkreis, so ist  $L_1$  oder  $L_2$  größer als  $\pi$  und daher  $L > 2\pi$ . Sind aber  $D_1$

und  $D_2$  größte Halbkreise, so bilden sie, da  $D$  die Kugeloberfläche hälften soll, einen größten Kreis. Es ist also  $L = 2\pi$  dann und nur dann, wenn die Kurve  $D$  ein größter Kreis ist.

Hält man also jetzt den eben bewiesenen Satz 4 zusammen mit den Ausführungen am Schluß des vorigen Paragraphen, so erkennt man, daß jetzt der folgende Satz bewiesen ist:

**Satz 5.** *Unter allen sphärischen Kurven, welche konvex sind und denen an jeder Stelle eine bestimmte Tangente und geodätische Krümmung zukommt, hat der sphärische Kreis bei gegebenem Inhalt den kleinsten Umfang.*

Ziehen wir jetzt die Formel (8) heran und bedenken wir, daß  $L_s$  die Länge der Kurve  $D$  bedeutet, so folgt, wenn wir noch berücksichtigen, daß die Relationen für eine Kugel vom Radius  $r$  gelten, sobald  $L$  durch  $\frac{L}{r}$ ,  $J$  durch  $\frac{J}{r^2}$  ersetzt wird, aus der Ungleichung  $L_s \geq 2\pi$  die Beziehung

$$(9) \quad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 \geq (2\pi)^2,$$

in welcher das Gleichheitszeichen nur für den Fall des Kreises gilt. In dieser Formel ist der Inhalt des Satzes 5 ausgedrückt.

## Teil II.

### Die approximativen Sätze und der Grenzübergang zur Ebene.

#### § 5.

#### Das Verhalten der Minimaleigenschaft beim Grenzübergang. Definition der natürlichen Breite.

Aus der bewiesenen Minimaleigenschaft der sphärischen Kreise folgt leicht, daß die ebenen Kreise gleichfalls bei gegebenem Inhalt Kurven kleinsten Umfangs sind, und zwar im Vergleich mit allen ebenen konvexen Kurven, welche Tangente und Krümmung an jeder Stelle besitzen. Was jedoch schwieriger zu zeigen ist, ist die Behauptung, daß die Kreise die *einzigsten* ebenen Kurven dieser Minimaleigenschaft sind. Hierzu war es nötig, für die sphärischen Kurven einen tieferen Satz abzuleiten. Es ist das Charakteristische des hier behandelten Variationsproblems, daß sich neben den *exakten* Minimumsatz ein *approximativer* Minimumsatz stellen läßt. Eine Kurve, welche annähernd Inhalt und Umfang eines Kreises hat, ist annähernd ein Kreis. Indem nun solche approximativen Sätze der Reihe nach für die geodätische Linie und die zwischen dieser und dem Kreise stehenden Kurven bewiesen werden, wird die fundamentale

Formel (28) hergeleitet, welche nicht nur den Grenzübergang zur Ebene in leichter Form gestattet, sondern auch zugleich die Mittel an die Hand gibt, den Geltungsbereich des zu beweisenden Satzes so weit als möglich auszudehnen.

Wir beweisen zunächst den

**Satz 1.** *Hat eine ebene konvexe Kurve  $C$ , welche an jeder Stelle eine bestimmte Tangente und Krümmung besitzt, den Inhalt  $J = \pi R^2$ , so ist der Umfang  $L$  größer oder gleich  $2\pi R$ .*

**Beweis.** An einen beliebigen Punkt der Ebene, welche die Kurve  $C$  enthält, legen wir die unendliche Schar der auf einer Seite berührenden Kugeln mit den beliebig wachsenden Radien  $r$  und projizieren die Kurve  $C$  von den Mittelpunkten der Kugeln auf die Oberflächen derselben. Die so entstandenen sphärischen Kurven  $C_r$  besitzen als Tangenten und oskulierende Kreise die Projektionen der zur Kurve  $C$  gehörigen Tangenten und oskulierenden Kreise auf die Kugeloberflächen. Sie haben daher insbesondere keine Doppeltangenten und sind konvex.

Aus der Formel (9) des § 4, welche wir jetzt anwenden, folgt, indem wir den Inhalt und Umfang von  $C_r$  mit  $J_r$  und  $L_r$  bezeichnen

$$(10) \quad L_r^2 - 4\pi J_r + \frac{J_r^2}{r^2} \geq 0.$$

Läßt man jetzt  $r$  unendlich werden, so folgt aus

$$(11) \quad J = \lim_{r=\infty} J_r, \quad L = \lim_{r=\infty} L_r,$$

$$(12) \quad L^2 - 4\pi J \geq 0.$$

Ist also  $J = \pi R^2$ , so ist

$$(13) \quad L \geq 2\pi R,$$

was zu beweisen war.

Das Gleichheitszeichen gilt für den Fall des Kreises; es muß nun noch gezeigt werden, daß es nur für den Kreis gilt, und daß also jede ebene Kurve, welche Inhalt und Umfang des Kreises hat, auch selbst ein Kreis ist.

Wir beginnen die Reihe der darauf abzielenden Sätze mit der Erklärung der Variation des Kreises.

**Erklärung 1.** Unter allen Kreisen, welche eine ebene einfach geschlossene Kurve  $C$  einschließen, gibt es einen oder mehrere, deren Radien die *untere Grenze*  $\rho_1$  der für die Radien derselben möglichen Werte wirklich annehmen. (Es folgt dies aus dem Umstande, daß die Kurve  $C$  eine ganz im Endlichen gelegene abgeschlossene Punktmenge darstellt und gilt für solche ganz allgemein.) Wir bezeichnen *einen* derselben mit  $K_1$ . Dergleichen gibt es unter allen Kreisen, welche im *Innern* der Kurve  $C$  liegen, einen oder mehrere, deren Radien die *obere Grenze*  $\rho_2$  der für die Radien

derselben möglichen Werte wirklich annehmen. Wir bezeichnen einen derselben mit  $K_2$ . Die Kreise  $K_1$  und  $K_2$  sollen innere und äußere *Spannkreise* heißen. Denkt man sich die Punkte der Kurve  $C$  als fest, so kann man die Spannkreise sich durch zwei Kreisfedern realisiert denken, von denen die innere durch das Bestreben sich auszudehnen, die äußere durch das Bestreben sich zusammenzuziehen gegen die Kurve  $C$  gepreßt wird.

Erklärung 2. Die Differenz  $d = \rho_1 - \rho_2$  der Radien  $\rho_1$  und  $\rho_2$  des äußeren und inneren Spannkreises heiße die *natürliche Breite der Kurve C*. Die Entfernung  $f$  der Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  der Kreise  $K_1$  und  $K_2$  heiße die *Exzentrizität der Kurve C*. Es ist offenbar der Kreis die einzige Kurve von der natürlichen Breite  $d = 0$  und für jede andere Kurve ist  $d$  größer als Null. Analoge Definitionen lassen sich auch für die sphärischen Kurven treffen. Es gilt für die definierten Begriffe der

Satz 2. Die Größen  $d$  und  $f$  bleiben bei der Transformation  $T_s$  invariant.

Beweis. Die Gesamtheit der von der Kurve  $C$  eingeschlossenen und die Gesamtheit der die Kurve  $C$  einschließenden Kreise wird wieder in die Gesamtheit der von der Kurve  $C_s$  eingeschlossenen resp. sie einschließenden Kreise übergeführt.

Die Mittelpunkte bleiben dabei ungeändert und die Radien werden alle um die Größe  $\varepsilon$  vermehrt, infolgedessen sind jetzt  $\rho_1 + \varepsilon$  und  $\rho_2 + \varepsilon$  die obere und untere Grenze der Radien. Es ist also sowohl die Exzentrizität, wie die Dicke der Kurve dieselbe.

## § 6.

## Über die angenähert kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Sphäre.

Die bekannten Minimaleigenschaften der sphärischen Geraden, welche die Grundlagen der Schlüsse bilden, sollen hier unter Verwendung der definierten Invarianten abgeleitet werden.

Satz 3. Es sei  $ABC$  ein sphärisches Dreieck (Fig. 2), dessen Seiten kleiner als  $\pi \cdot r$  seien. Die Seiten  $BC$ ,  $AC$  und  $AB$  seien mit  $a \cdot r$ ,  $b \cdot r$  und  $c \cdot r$ , die sphärische Höhe  $AD$ , welche gleich oder kleiner als  $\frac{\pi}{2} r$  sei, mit  $h \cdot r$  bezeichnet. Es gilt die Beziehung

$$(14) \quad b + c - a \geq 2 \cdot \cos^2 \frac{a}{2} (1 - \cos h).$$

Beweis. Es werde  $BD = a_1 \cdot r = \left(\frac{a}{2} + l\right) \cdot r$  und  $CD = a_2 \cdot r = \left(\frac{a}{2} - l\right) \cdot r$  gesetzt. Es sei zunächst  $l \leq \frac{a}{2}$ . Aus

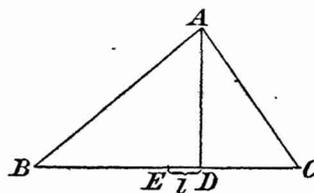


Fig. 2.

$$1 \geq \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

und

$$\frac{\alpha - \beta}{2} \geq \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0$$

unter der Annahme  $\pi \geq \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0$  folgt

$$\alpha - \beta \geq 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \beta - \cos \alpha.$$

Setzen wir jetzt einmal  $\alpha = b$ ,  $\beta = a_2$ , und ein ander Mal  $\alpha = c$ ,  $\beta = a_1$ , so folgt, da die Bedingung  $\pi \geq \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0$  beide Male erfüllt ist, unter Berücksichtigung von

$$\cos c = \cos a_1 \cdot \cos h,$$

$$\cos b = \cos a_2 \cdot \cos h,$$

$$b - a_2 \geq \cos a_2 - \cos b = \cos a_2 (1 - \cos h)$$

und

$$c - a_1 \geq \cos a_1 - \cos c = \cos a_1 (1 - \cos h);$$

durch Addition dieser letzten Ungleichungen ergibt sich infolge von  $\cos a_1 + \cos a_2 = 2 \cos \frac{a}{2} \cos l$

$$b + c - a \geq 2 \cos \frac{a}{2} \cos l (1 - \cos h).$$

Da zunächst  $l \leq \frac{a}{2} \leq \frac{\pi}{2}$  sein soll, so wird  $\cos l \geq \cos \frac{a}{2}$  und also

$$b + c - a \geq 2 \cos^2 \frac{a}{2} (1 - \cos h).$$

Ist andererseits  $l > \frac{a}{2}$ , so ist  $a_1 > a$  und  $\cos c = \cos a_1 \cos h < \cos a \cos h$ .

Es folgt also aus

$$c - a > \cos a - \cos c$$

$$c - a > \cos a (1 - \cos h);$$

ferner ist

$$b > h > 1 - \cos h.$$

Also wird schließlich

$$b + c - a > (1 + \cos a)(1 - \cos h),$$

d. h. wieder

$$b + c - a > 2 \cos^2 \frac{a}{2} (1 - \cos h), \text{ q. e. d.}$$

**Anmerkung.** Will man den Satz benutzen, daß das gleichschenklige sphärische Dreieck bei gegebener Höhe das Minimum des Umfangs darstellt, so schließt man leicht, daß stets

$$b + c - a \geq 2 \cos \frac{a}{2} (1 - \cos h)$$

ist. Wir machen jedoch von dieser schärferen Ungleichung keinen Gebrauch.

Die Ungleichung (14) enthält nicht nur den Beweis des Satzes, daß die sphärische Gerade die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, sondern auch die genauere

Folgerung 1. *Weicht die Länge  $L$  einer sphärischen Kurve, welche  $B$  und  $C$  verbindet, nur wenig von  $a \cdot r$  ab, so läßt sich ein von Parallelen zu  $BC$  gebildeter Streifen von der Breite  $2h \cdot r$  abgrenzen, in dessen Innern die Kurve liegt, d. h. sie weicht selbst nur wenig von einer sphärischen Geraden ab.*

Denn es sei  $A$  derjenige Punkt der Kurve, welcher die absolut größte Entfernung  $h \cdot r$  von  $BC$  hat. Die Kurve liegt dann offenbar ganz innerhalb eines Parallelstreifens, dessen Grenzen zu beiden Seiten von  $BC$  um das Stück  $h \cdot r$  entfernt ist. Durch Vergleich der Länge  $L$  mit der Seitensumme  $AB + AC$  ergibt sich

$$(15) \quad \frac{L}{r} - a \geq b + c - a \geq 2 \cos^2 \frac{a}{2} (1 - \cos h) = 4 \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{h}{2}.$$

Sobald also  $\frac{L}{r} - a$  klein ist, sinkt auch  $h$  unter eine entsprechende Grenze.

§ 7.

**Über die angenähert kürzeste einfach geschlossene Linie, welche zwei Gegenpunkte der Sphäre enthält.**

Wir beweisen jetzt der Reihe nach die folgenden Sätze:

Satz 4. *Es sei  $C_1$  eine sphärische Kurve von der Länge  $L_1$ , welche zwei Pole der Kugel  $P$  und  $P'$  verbindet. Ferner sei  $A$  einer der Punkte, in denen  $C_1$  den Äquator passiert. Es sei  $e \cdot r$  die größte seitliche Abweichung der Kurve  $C_1$  von dem Meridian  $PAP'$  aus gerechnet, so ist*

$$(16) \quad \frac{L_1}{r} - \pi \geq 1 - \cos e;$$

oder: *weicht die Länge einer Kurve, welche zwei Pole der Kugel verbindet, nur wenig von  $\pi \cdot r$  ab, so ist die Kurve annähernd ein größter Halbkreis. (Fig. 3.)*

Beweis. Es seien  $e_1 \cdot r$  und  $e_2 \cdot r$  zu beiden Seiten des Äquators die größten Breitenabweichungen der Kurve  $C_1$  vom Meridian  $PAP'$ . Es ist dann gemäß der bewiesenen Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{r} - \pi &\geq 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 - \cos e_1) \\ &+ 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} (1 - \cos e_2), \end{aligned}$$

d. h.

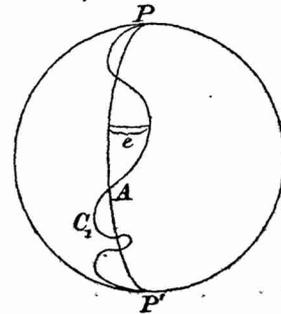


Fig. 3.  
9\*

$$\frac{L_1}{r} - \pi \geq 1 - \cos e,$$

wo  $e$  den größeren der beiden Werte  $e_1$  und  $e_2$  bedeutet.

Ebenso beweist man den

Satz 5. *Es sei  $\bar{C}$  eine sphärische Kurve der Länge  $\bar{L}$ , welche einfach geschlossen ist und die Pole  $P$  und  $P'$  enthält. Die Kurve zerfällt in zwei Teile  $C_1 = PAP'$  und  $C_2 = PBP'$ , von denen jeder wenigstens in einem Punkte  $A$  resp.  $B$  den Äquator passiert. Für  $C_1$  und  $C_2$  seien, wie vorher die größten Breitenabweichungen bestimmt. Ist  $e$  das absolute Maximum derselben, so ist*

$$(17) \quad \frac{\bar{L}}{r} - 2\pi \geq 1 - \cos e;$$

oder: *Besitzt eine geschlossene Kurve auf der Kugeloberfläche, welche zwei Gegenpunkte enthält, annähernd die Länge  $2\pi$ , so ist sie annähernd ein sphärisches Zweieck.*

Wir haben die Kurven  $C_1$  und  $C_2$  in zwei Streifen von der Breite  $2e$  eingeschlossen und es bilden diese ein Kreuzband  $K$ , das für die folgenden Betrachtungen die Kurve  $C$  ersetzen soll. Um diese Beziehung noch enger zu gestalten, fassen wir das Zweieck  $Z$  ins Auge, welches von den Halbmeridianen  $PAP'$  und  $PBP'$  gebildet wird. Wir schreiben aber jetzt vor, daß die Punkte  $A$  und  $B$ , was stets möglich ist, so gewählt seien, daß weder

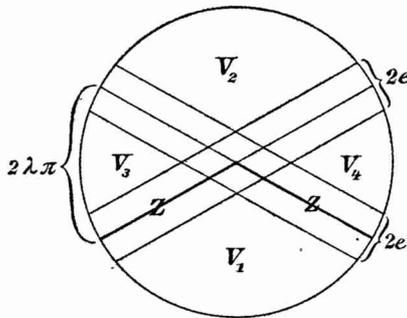


Fig. 4.

die geschlossene Kurve  $PAP' C_1$  noch auch  $PBP' C_2$  die außerhalb der Streifen gelegenen Kalottenpaare trennt. Das Zweieck  $Z$  teilt dann außerhalb des Kreuzbandes  $K$  die Kugeloberfläche genau so, wie  $\bar{C}$ . Wenn  $K$  nicht die ganze Kugel bedeckt, seien  $V_1 = V_2, V_3 = V_4$  (Fig. 4) die übrigen Teile der Oberfläche. Es liege dann etwa  $V_1$  von  $V_2, V_3, V_4$  durch  $Z$  getrennt. Wir bezeichnen den konkaven Winkel von  $Z$ , innerhalb dessen  $V_1$  liegt, mit

$(1 - 2\lambda)\pi$ . Wenn die Bedingung des Satzes 5 erfüllt ist und wenn außerdem  $\lambda$  eine kleine Größe ist, so ist die Kurve  $\bar{C}$  offenbar angenähert ein größter Kreis.

Wir bringen dies zum Ausdruck, indem wir die natürliche Breite von  $\bar{C}$  einführen und in Beziehung zu  $\lambda$  und  $e$  bringen. Wird nämlich die natürliche Breite  $D \cdot r$  des Kreuzbandes  $K$  so gemessen, daß die Spannkreise in  $V_1$  und  $V_2$  angenommen werden, so ist offenbar

$$D = 2\lambda\pi + 2e;$$

dasselbe gelte, wenn  $V_1 = V_2 = 0$  ist. In jedem Falle ist aber

$$D \geq d,$$

wo  $d \cdot r$  die natürliche Breite von  $\bar{C}$  bedeutet. Also ist

$$(18) \quad 2\lambda\pi + 2e \geq d;$$

in Worten: *Weicht eine einfach geschlossene sphärische Kurve  $\bar{C}$ , welche zwei Gegenpunkte enthält, nur wenig von einem Zweieck  $Z$  ab, dessen Winkel  $(1 - 2\lambda)\pi$  nahezu gleich  $2\pi$  ist, so ist die Breite der Kurve  $\bar{C}$  gering.*

### § 8.

#### Über die angenähert kürzeste einfach geschlossene Linie, welche die Kugeloberfläche hälftet.

Es sei jetzt  $\bar{C}$  eine Kurve, welche die Kugeloberfläche hälftet. Wir wissen, daß dieselbe zwei Gegenpole  $P$  und  $P'$  enthalten muß. Falls die Kurve ein sphärisches Zweieck ist, muß sie notwendig ein größter Kreis sein. Ist also unter Anwendung der bisherigen Bezeichnungen  $e = 0$ , so ist auch  $\lambda = 0$ .

Genauer gilt der folgende

Satz 6. *Es ist*

$$(19) \quad 2(1 - \cos e) \geq \lambda,$$

oder

$$(20) \quad \frac{\bar{L}}{r} - 2\pi \geq \frac{\lambda}{2}.$$

*Beweis.* Nach der Konstruktion des vorigen Paragraphen teilt das Zweieck  $Z$  (Fig. 4) außerhalb des Kreuzbandes  $K$  die Kugeloberfläche genau so, wie  $\bar{C}$ . Sind  $T_1$  und  $T_2$  die beiden Teile, in die  $\bar{C}$  die Kugeloberfläche teilt, und gehört  $V_1$  zu  $T_1$ , so gehören also  $V_2, V_3, V_4$  zu  $T_2$ . Es ist  $T_1$  gänzlich enthalten in  $V_1$  und  $K$  und wir haben also, da  $T_1 = 2\pi r^2$  ist,

$$(21) \quad V_1 + K \geq 2\pi r^2.$$

Andrerseits liegt aber  $V_1$  ganz im konkaven Teil des Zweiecks  $Z$ , welcher letztere den Inhalt  $(1 - 2\lambda)2\pi r^2$  besitzt. Es ist also

$$(22) \quad (1 - 2\lambda)2\pi r^2 \geq V_1.$$

Ferner ist der Inhalt des Kreuzbandes

$$(23) \quad K \leq 2 \cdot 4\pi r^2(1 - \cos e).$$

Also ist

$$(24) \quad 1 - 2\lambda + 4(1 - \cos e) \geq 1,$$

d. h.

$$2(1 - \cos e) \geq \lambda \text{ q. e. d.}$$

Wir fassen die bisherigen Resultate zusammen, indem wir den folgenden Satz beweisen:

**Satz 7.** *Besitzt eine Kurve  $\bar{C}$ , welche die Kugeloberfläche hälftet, annähernd den Umfang  $2\pi r$  eines größten Kreises, so ist sie selbst annähernd ein größter Kreis.*

**Beweis.** Aus (18) und (19) folgt durch Elimination von  $\lambda$

$$4\pi(1 - \cos e) + 2e \geq d.$$

Nun ist allgemein, für  $e \geq 0$ ;  $e \geq 1 - \cos e$ ; infolgedessen ist

$$(25) \quad 2(1 + 2\pi)e \geq d.$$

Andrerseits ist allgemein, wenn  $\alpha \geq \beta \geq 0$  ist, auch  $1 - \cos \alpha \geq 1 - \cos \beta$ . Infolgedessen ist

$$1 - \cos e \geq 1 - \cos \frac{d}{2(1 + 2\pi)}.$$

Der Vergleich mit (17) lehrt dann, daß

$$(26) \quad \frac{\bar{L}_1}{r} - 2\pi \geq 1 - \cos \frac{d}{2(1 + 2\pi)} = 2 \sin^2 \frac{d}{4(1 + 2\pi)}$$

ist. Aus der Formel (26) folgt unmittelbar, daß  $d$  eine kleine Größe ist, sobald  $\frac{\bar{L}_1}{r} - 2\pi$  klein ist.

### § 9.

**Über die einfach geschlossene sphärische oder ebene Kurve, welche angenähert den Inhalt und den Umfang eines Kreises besitzt, und die Minimaleigenschaft des sphärischen oder ebenen Kreises.**

Wir beweisen jetzt den

**Satz 8.** *Wenn eine konvexe einfach geschlossene sphärische oder ebene Kurve  $C$ , welche an jeder Stelle eine bestimmte geodätische Krümmung besitzt, annähernd den Umfang und den Inhalt eines sphärischen resp. ebenen Kreises hat, so ist sie selbst annähernd ein Kreis.*

**Beweis.** Wir transformieren die Kurve  $C$  durch die Transformation  $T_s$  in die Kurve  $\bar{C} = C_s$ , welche die Kugeloberfläche hälftet. Es ist dann nach Formel (8) (I, § 3):

$$\left(\frac{L_s}{r}\right)^2 = \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2.$$

In Verbindung mit (26) folgt hieraus

$$(27) \quad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 \geq \left(2\pi + 2 \sin^2 \frac{d}{4(1 + 2\pi)}\right)^2,$$

oder

$$(28) \quad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geq 8\pi \sin^2 \frac{d}{4(1 + 2\pi)}.$$

Wenn nun die Kurve  $C$  annähernd den Umfang und Inhalt eines sphärischen Kreises hat, so ist die linke Seite von (28) klein und also ist auch  $d$  eine kleine Größe.

Wir können diesen Schluß leicht auf ebene Kurven übertragen.

Es sei  $C$  eine ebene Kurve, die konvex ist und eine bestimmte Krümmung an jeder Stelle besitzt. An einen Punkt  $O$  der Ebene derselben legen wir eine tangierende Kugel mit dem beliebigen Radius  $r$  und projizieren die Kurve  $C$  vom Mittelpunkt  $M_r$  der Kugel auf die Kugeloberfläche, wodurch sie in die Kurve  $C_r$  übergehe. Da  $C$  keine Doppeltangente hat, so besitzt auch die Kurve  $C_r$  keine sphärische Doppeltangente, d. h.  $C_r$  ist konvex. Ebenso besitzt  $C_r$  auch überall eine bestimmte Krümmung. Es gilt also für  $C_r$  die Ungleichung (28) in der Form

$$(29) \quad \frac{L_r^2 - 4\pi J_r}{r^2} + \frac{J_r^2}{r^4} \geq 8\pi \sin^2 \frac{d_r}{4(1+2\pi)},$$

wenn  $J_r$  und  $L_r$  Inhalt und Umfang der sphärischen Kurve  $C_r$  darstellen. Nun ist offenbar

$$(30) \quad \lim_{r=\infty} J_r = J, \quad \lim_{r=\infty} L_r = L,$$

und da die einbeschriebenen Kreise bei der Projektion in einbeschriebene, die umbeschriebenen in umbeschriebene übergehen

$$(31) \quad \lim_{r=\infty} d_r \cdot r = d.$$

Also ist, wenn die beiden Seiten von (29) mit  $r^2$  multipliziert werden und zur Grenze  $r = \infty$  übergegangen wird,

$$(32) \quad L^2 - 4\pi J \geq \frac{\pi d^2}{2 \cdot (1+2\pi)^2}.$$

Die Formeln (28) und (32), deren Geltungsbereich wir sogleich auf beliebige Kurven übertragen werden, stellen das Ergebnis der bisherigen Entwicklung dar.

Wenn wir die Herleitung derselben noch einmal überblicken, so sehen wir, daß dieselben nur durch Transformation aus der fundamentalen Ungleichung hergeleitet sind, welche besagt, daß im sphärischen Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte. Was den Zahlfaktor auf der rechten Seite von (28) und (32) angeht, so ist derselbe keineswegs das erreichbare Maximum. Es ist an sich interessant, aber für die jetzige Betrachtung überflüssig, die Ungleichung noch weiter zu verschärfen.

#### Erweiterung des Geltungsbereiches des Satzes 8.

1. Wenn  $C$  eine beliebige konvexe Kurve ist, so gibt es stets eine unendliche Schar konvexer Kurven  $C_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), welche überall

geodätische Krümmung besitzen, mit den Längen  $L_\nu$  und den Inhalten  $J_\nu$ , welche die Kurve  $C$  beliebig approximieren, so daß  $J = \lim_{\nu=\infty} J_\nu$  und  $L = \lim_{\nu=\infty} L_\nu$  ist. Insbesondere wird ein im Innern von  $C$  gelegener Kreis für hinreichend großes  $\nu$  im Innern sämtlicher  $C_\nu$  liegen und ebenso wird es sich mit den im Äußern gelegenen Kreisen verhalten. Hieraus geht hervor, daß auch  $d = \lim_{\nu=\infty} d_\nu$  ist, wo  $d_\nu$  durch die natürliche Breite von  $C_\nu$  gegeben ist.

Die Ungleichung (28) für  $C_\nu$  wird daher für  $\nu = \infty$

$$(33) \quad \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geq 8\pi \sin^2 \frac{d}{4(1+2\pi)}.$$

2. Es sei ferner  $C_1$  eine beliebige ebene einfach geschlossene Kurve, welche einen Inhalt  $J_1$  und einen Umfang  $L_1$  besitzt. Es läßt sich dann, wie bekannt,  $C_1$  zu einer konvexen Kurve  $C$  abrunden, welche größeren Inhalt  $J$  und kleineren Umfang  $L$  besitzt. Bei entsprechender Bezeichnung ist dann

$$(34) \quad L_1^2 - 4\pi J_1 \geq L^2 - 4\pi J \geq \frac{\pi d^2}{2(1+2\pi)^2},$$

wo das erste Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn  $C_1$  bereits konvex ist. Durch die letzten Relationen ist nun der von uns behauptete Satz für alle ebenen Kurven bewiesen, für welche er überhaupt ausgesprochen werden kann.

3. Für beliebige sphärische Kurven läßt sich die analoge Betrachtung durchführen, wenn dieselben ganz in einer Halbkugel enthalten sind. Es gilt dann

$$(35) \quad \left(2\pi - \frac{J_1}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L_1}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geq \left(2\pi - \frac{J}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{r}\right)^2 - (2\pi)^2 \geq 8\pi \sin^2 \frac{d}{4(1+2\pi)},$$

wo das erste Gleichheitszeichen wieder nur gilt, wenn  $C_1$  bereits konvex ist, woraus dann in gleicher Weise der behauptete Satz hervorgeht.