Werk

Titel: Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher

Autor: Blumenthal, O.

Jahr: 1903

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0057|log38

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Von

OTTO BLUMENTHAL in Göttingen.

Wenn eine analytische Funktion einer Veränderlichen sich innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes wie eine rationale Funktion verhält, so hat sie innerhalb dieses Gebietes nur eine endliche Anzahl von Nullstellen.

Dieser Satz besitzt sein Analogon im Gebiete der Funktionen von n Veränderlichen. Eine analytische Funktion $r\,(x, x', \cdots, x^{(n-1)}) = r\,(\!(x)\!)$ von n Veränderlichen verhält sich innerhalb eines Gebietes wie eine rationale Funktion, wenn sie sich um jeden Punkt dieses Gebietes herum als Potenzreihe in den n Veränderlichen oder als Quotient von zwei Potenzreihen darstellen läßt. Betrachte ich nun m Funktionen

$$r_1(\!(x)\!),\ r_2(\!(x)\!), \cdots, r_m(\!(x)\!)$$

der Veränderlichen (x), welche innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes D sich wie rationale Funktionen verhalten, so erhalte ich das gesuchte Analogon, wenn ich die *gemeinsamen Nullstellen* der Funktionen r innerhalb D betrachte. Das entscheidende Moment liegt abermals darin, daß sich die gemeinsamen Nullstellen zu einer *endlichen* Anzahl von Gebilden verschiedener Dimensionen zusammenfassen lassen.

Dieser Satz stellt das erste und grundlegende Resultat der Eliminationstheorie dar. Er wird daher bei Untersuchungen über Systeme von Funktionen mehrerer Veränderlicher vielfach vorausgesetzt und benutzt. Beweise aber sind mir nicht bekannt geworden*); ich möchte daher in vorliegender Note diese Lücke ausfüllen. Einige Anwendungen des Satzes finden sich im 2. Teile meiner Habilitationsschrift**).

Wir wollen dem Satze zunächst seine präzise Formulierung geben.

---

*) Herr Poincaré hat unterdessen in Acta 26 (p. 55—56) einige kurze Ausführungen zu diesem Satze gegeben. Da er sich auf die nämlichen Hülfssätze stützt, welche auch in dieser Arbeit gebraucht werden, so sind die Unterschiede zwischen seiner Behandlung und der unsrigen leicht ersichtlich.

**) Erscheint in diesen Annalen.

Wir gehen zu diesem Zwecke aus von der bekannten Weierstraßschen Definition des analytischen Gebildes ν^{ter} Stufe im n-dimensionalen Raume. Verstehen wir unter $z, \cdots, z^{(\nu-1)}$ unbeschränkt veränderliche Parameter, so definieren n innerhalb eines gewissen Gebietes um den Nullpunkt herum gleichzeitig konvergente Potenzreihen

$$(2) \qquad x = \mathfrak{P}(\!(z)\!), \; x' = \mathfrak{P}'(\!(z)\!), \; \cdots, \; x^{(n-1)} = \mathfrak{P}^{(n-1)}(\!(z)\!)$$

ein *Element eines analytischen Gebildes* ν^{ter} *Stufe*, und ein *irreduzibeles analytisches Gebilde* ν^{ter} *Stufe* ist definiert als *Gesamtheit eines Elementes und seiner sämtlichen analytischen Fortsetzungen und Grenzstellen.* Dabei verstehen wir unter „Grenzstelle" einen Punkt $(\!(\zeta)\!)$, um welchen keine Entwicklung der Form (2) statt hat, in dessen beliebiger Nähe aber noch Punkte liegen, um welche Fortsetzungen des Elementes möglich sind*).

Auf Grund dieser Definition läßt sich folgender Satz („Endlichkeitssatz") formulieren:

Die Gesamtheit der Stellen innerhalb des Bereiches D, an welchen die Gleichungen

$$(a) \qquad r_1 = 0, \; r_2 = 0, \; \cdots, \; r_m = 0$$

gleichzeitig erfüllt sind, besteht 1) *aus einer endlichen Anzahl isolierter Punkte,* 2) *aus analytischen Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen, und zwar gibt es von jeder Dimension nur eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten.*

Zu dem Endlichkeitssatze tritt aber noch eine bedeutsame Ergänzung hinzu, welche sich auf die analytische Natur der Grenzstellen bezieht. Die sämtlichen innerhalb des Gebietes D auftretenden Grenzstellen haben nämlich einen besonders einfachen Charakter:

An den Grenzstellen der analytischen Gebilde haben die Koordinaten (x) *den Charakter algebraischer Funktionen der Parameter* (z) („Grenzstellensatz").

Der Beweis der beiden Sätze geht Hand in Hand, wir beginnen mit dem Endlichkeitssatze.

1. Nehmen wir nämlich an, Mannigfaltigkeiten irgend einer bestimmten Dimension kämen in unendlicher Anzahl vor, so gibt es im Inneren oder auf dem Rande von D einen Punkt $(\!(\xi)\!)$, in dessen Nachbarschaft gleichfalls noch unendlich viele solche Mannigfaltigkeiten liegen. In der Umgebung von $(\!(\xi)\!)$ ist aber

$$(a') \qquad r_1 = \frac{\mathfrak{P}_1(\!(x-\xi)\!)}{\mathfrak{Q}_1(\!(x-\xi)\!)}, \; r_2 = \frac{\mathfrak{P}_2(\!(x-\xi)\!)}{\mathfrak{Q}_2(\!(x-\xi)\!)}, \; \cdots, \; r_m = \frac{\mathfrak{P}_m(\!(x-\xi)\!)}{\mathfrak{Q}_m(\!(x-\xi)\!)},$$

wo die $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_m$ in $(\!(\xi)\!)$ verschwindende Potenzreihen sind. Denn wenn die Funktionen $r_1, \cdots, r_m$ in beliebiger Nähe von $(\!(\xi)\!)$ verschwinden, so

*) Diese Definition der Grenzstellen ist weiter gefaßt als die Weierstraßsche.

verschwinden sie auch in $(\!(\xi)\!)$ selbst. Die Gesamtheit aller Punkte in einer gewissen Umgebung von $(\!(\xi)\!)$, für welche die Gleichungen (a) bestehen, ist also gegeben durch

(b) $$\mathfrak{P}_1(\!(x)\!) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_m(\!(x)\!) = 0,$$

wobei wir der Kürze halber $x - \xi, \cdots$ durch $x, \cdots$ ersetzt haben, so daß für $(\!(\xi)\!)$ der Nullpunkt eintritt; und es bleibt nur zu zeigen, daß diese Gleichungen nur eine endliche Anzahl von Punkten und Mannigfaltigkeiten der verschiedenen Dimensionen definieren.

2. Wir schicken der Vollständigkeit halber einen einfachen Hülfssatz voraus:

Eine Potenzreihe

(b') $$P(\!(x)\!) = 0$$

definiert in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes eine endliche Anzahl $(n-1)$*-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten, deren Grenzstellen den verlangten Charakter haben.*

Der Beweis beruht auf dem sog. „*Weierstraßschen Vorbereitungssatz*"*). Wir können nämlich durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante an Stelle der Koordinaten (x) immer neue Koordinaten (t) einführen, in welchen die Identität besteht

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(\!(x)\!) = \overline{\mathfrak{P}}(t, t', \cdots, t^{(n-1)}) &= [t^\mu + \mathfrak{P}_1(t', \cdots, t^{(n-1)})t^{\mu-1} + \cdots + \mathfrak{P}_\mu(t', \cdots, t^{(n-1)})]\, K(\!(t)\!)\\ &= G(t; t', \cdots, t^{(n-1)})\, K(\!(t)\!),\end{aligned}$$

wo K eine am Nullpunkte nicht verschwindende Potenzreihe ist, und die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen in den Variabelen $t', \cdots, t^{(n-1)}$ bedeuten, welche in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes konvergieren und am Nullpunkte selbst verschwinden. Auf Grund dieses Satzes sind also in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes *alle Verschwindungspunkte von* $\mathfrak{P}(\!(x)\!)$ *gegeben durch die in t algebraische Gleichung*

$$G(t; t', \cdots, t^{(n-1)}) = 0.$$

Ich nenne ein derartiges Polynom G *irreduzibel*, wenn es sich nicht in Faktoren niedrigeren Grades in t zerlegen läßt, deren Koeffizienten abermals Potenzreihen in $t', \cdots, t^{(n-1)}$ sind. Man beweist dann nach dem Euclidischen Verfahren die *Eindeutigkeit* der Zerlegung eines beliebigen Polynoms in irreduzibele Faktoren. Die Koeffizienten eines irreduzibelen Faktors haben außerdem die Eigenschaft, am Nullpunkte sämtlich zu verschwinden. Jedes Polynom zerfällt in eine *endliche Anzahl* irreduzibeler Faktoren.

Wir zeigen jetzt, daß jeder irreduzibele Faktor $g(t; t', \cdots, t^{(n-1)}) = 0$ ein einziges $(n-1)$-dimensionales analytisches Gebilde definiert. In der

*) Weierstraß, Werke, II, pg. 135 ff. S. a. Poincaré, Thèse (1879), pg. 6—12.

Tat besteht ein Element eines solchen Gebildes um jeden Punkt $g = 0$, an welchem $g' = \frac{dg}{dt}$ von 0 verschieden ist*). Derartige Punkte existieren aber in beliebiger Nähe des Nullpunktes. Denn aus der Irreduzibilität von g folgt das Bestehen einer Identität der Form

$$fg + f'g' = \Delta(t', t'', \cdots, t^{(n-1)}),$$

wo f und f' Funktionen der gleichen Form wie g und g' sind, und Δ eine nicht identisch verschwindende Funktion von $n-1$ Variabelen bedeutet. An einem Punkte $\Delta \neq 0$, $g = 0$ aber kann g' nicht verschwinden.

Das so konstruierte Element mit seinen sämtlichen analytischen Fortsetzungen und Grenzstellen definiert ein $(n-1)$-dimensionales analytisches Gebilde, auf welchem $g = 0$ ist. Umgekehrt aber kann ich durch analytische Fortsetzung des einen Elementes alle regulären Stellen $g = 0$ erreichen: diese Tatsache beweist man genau nach dem bei algebraischen Funktionen üblichen Verfahren. *Der irreduzibele Faktor $g = 0$ definiert also in der Tat ein einziges analytisches Gebilde $(n-1)^{ter}$ Stufe.*

Damit ist der Hülfssatz bewiesen. Ich kann mir übrigens zum Zwecke der Aufsuchung der analytischen Gebilde das Polynom G von mehrfachen Faktoren befreit denken, was immer auf rationalem Wege möglich ist.

Der Grenzstellensatz schließlich folgt unmittelbar aus dem Vorbereitungssatz durch Resultantenbildung, wenn ich die (x) als lineare Funktionen der (t) ausdrücke: man erhält dann für jede einzelne Koordinate eine Gleichung der Form

$$G(x;\, t', \cdots, t^{(n-1)}) = 0.$$

3. Der Beweis des Endlichkeitssatzes geschieht hiernach mit Hülfe der vollständigen Induktion. Wir setzen ihn für $m-1$ Gleichungen als bewiesen voraus und zeigen, daß er für m Gleichungen ungeändert besteht. Sei nämlich nach Voraussetzung eine ν-fache Mannigfaltigkeit der Form (2) gegeben, welche den Gleichungen

$$\text{(b'')} \qquad \mathfrak{P}_1((x)) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_{m-1}((x)) = 0$$

genügt, so zeigen wir, daß bei Hinzufügung einer weiteren Gleichung

$$\mathfrak{P}_m((x)) = P((x)) = 0$$

einer der beiden folgenden Fälle eintreten kann:

entweder das ganze Gebilde ν^{ter} Dimension genügt auch der Gleichung $P = 0$;

oder es werden durch diese neue Bedingung aus dem Gebilde in der Umgebung von $((0))$ eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension ausgeschnitten.

*) S. z. B. Picard, Traité d'Analyse, II, pg. 245.

Der Beweis ist evident, wenn $((0))$ selbst ein regulärer Punkt des ν-dimensionalen analytischen Gebildes ist. Alsdann bestehen nämlich um den Punkt $((0))$ die Gleichungen (2), d. h. die (x) sind als Potenzreihen in den Parametern darstellbar. Setze ich diese Potenzreihen in P ein, so wird P eine Potenzreihe in den (z), und die Gleichung $P=0$ geht über in

$$\overline{P}(z, z', \cdots, z^{(\nu-1)}) = 0.$$

Nun verschwindet entweder die linke Seite identisch: in diesem Falle genügt das ganze Gebilde (2) auch der Gleichung $P=0$. Oder sie verschwindet nicht identisch: dann definiert sie nach dem Hülfssatze eine endliche Anzahl analytischer $(\nu-1)$-facher Mannigfaltigkeiten, deren jede sich um einen geeignet gewählten Punkt innerhalb des Konvergenzbereichs von (2) entwickeln läßt in der Form

$$(2') \qquad z = \mathfrak{P}(s, s', \cdots, s^{(\nu-2)}), \; z' = \mathfrak{P}'((s)), \cdots, z^{(\nu-1)} = \mathfrak{P}^{(\nu-1)}((s)).$$

Setze ich diese Entwicklung in (2) ein, so erhalte ich den Ausdruck des Elementes einer $(\nu-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit in den (x).

Jeder Mannigfaltigkeit in den (z) entspricht eine Mannigfaltigkeit in den (x), und diese sind sonach nur in endlicher Anzahl vorhanden. Der verlangte Beweis ist also in diesem einfachsten Falle geliefert*).

4. Ist $((0))$ ein Grenzpunkt des Gebildes (2), so ist der Beweis bedeutend komplizierter. Wir stützen uns dabei auf ein Korollar, welches Herr Poincaré aus dem Weierstraßschen Vorbereitungssatze gezogen hat**). Das Korollar spricht sich folgendermaßen aus:

Ist $P((x))$ eine um den Punkt $((0))$ herum konvergente Potenzreihe in den (x), und sind diese Variablen ihrerseits um den Punkt $((0))$ herum als Funktionen von ν Variabeln $z, z', \cdots, z^{(\nu-1)}$ definiert durch die Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} G_1(x) &\equiv x^{m_1} + \mathfrak{P}_1^{(1)}((z))x_1^{m_1-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{m_1}^{(1)}((z)) = 0, \\ &\vdots \\ G_n(x^{(n-1)}) &\equiv x^{(n-1)m_n} + \mathfrak{P}_1^{(n)}((z))x^{(n-1)m_n-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{m_n}^{(n)}((z)) = 0, \end{aligned}$$

wo die $\mathfrak{P}$ konvergente Potenzreihen in den (z) sind, so genügt um den Nullpunkt herum P, als Funktion $\overline{P}((z))$ der (z) betrachtet, einer Gleichung vom Grade $M = m_1 m_2 \cdots m_n$

---

*) Falls das Gebilde (2) eindimensional, also eine Kurve, war, sind die Gebilde (2′) Punkte, welche nur in endlicher Zahl vorhanden sein können. — Falls den Gleichungen (b″) durch eine endliche Anzahl isolierter Punkte genügt wird, so setze man diese Punkte in $P=0$ ein: diejenigen Punkte, welche auch der neuen Gleichung genügen, sind natürlich erst recht nur in endlicher Zahl vorhanden.

**) Poincaré, Thèse, pg. 14.

$$g(\overline{P}) \equiv \overline{P}^M + \mathfrak{p}_1(\!(z)\!)\overline{P}^{M-1} + \cdots + \mathfrak{p}_M(\!(z)\!) = 0,$$

wo die $\mathfrak{p}$ *abermals konvergente Potenzreihen bezeichnen.*

Mit Hülfe dieses Korollars leiten wir nämlich den folgenden Satz ab:

Hat das durch die Gleichungen (b) *definierte* ν*-dimensionale analytische Gebilde* (2) *am Punkte* $(\!(0)\!)$ *einen Grenzpunkt, so genügen um den Punkt* $(\!(0)\!)$ *herum die Variabelen* (x) *einem System von Gleichungen von der in dem Poincaréschen Korollar betrachteten Form* (3), *wobei die Potenzreihen gerade von* ν *Veränderlichen abhängen und am Punkte*

$$z = z' = \cdots = z^{(\nu-1)} = 0$$

sämtlich verschwinden. Die Gleichungen werden außerdem als frei von mehrfachen Faktoren angenommen.

Dieser Satz ist nichts anderes als die *analytische Formulierung des Grenzstellensatzes.* Sein Beweis geht Hand in Hand mit dem des Endlichkeitssatzes. Der Satz wird zunächst für das System (b'') von $m-1$ Gleichungen als richtig vorausgesetzt, hieraus der Endlichkeitssatz für den Fall von m Gleichungen bewiesen und schließlich der Grenzstellensatz selbst für diesen höheren Fall verifiziert.

Man erkennt übrigens nach der bei dem Hülfssatz angewandten Methode mit Leichtigkeit, daß ein Gleichungssystem der Form (3) eine *endliche Anzahl von* ν*-dimensionalen analytischen Gebilden* definiert.

5. Es ist notwendig, eine Bemerkung über das Verhältnis des analytischen Gebildes (2) zu den Gleichungen (3) vorauszuschicken. Um einen regulären Punkt $(\!(z_0)\!)$ des analytischen Gebildes (2) bestehen im allgemeinen eine Anzahl von Elementen dieses Gebildes, welche sich durch analytische Fortsetzung aus einander ableiten lassen. Der Satz besagt dann, daß die durch jedes dieser Elemente definierten Koordinaten (x) sich als Wurzeln von Gleichungen (3) ergeben, *nicht aber auch das Umgekehrte, daß nämlich jede Zusammenfassung von beliebigen Wurzeln* $(x_0, \cdots, x_0^{(n-1)})$, *welche dem Punkte* $(\!(z_0)\!)$ *entsprechen, auch einen Punkt des analytischen Gebildes liefert.* Um die zum Gebilde gehörigen Zusammenfassungen zu erhalten, ist der einzige Weg der der analytischen Fortsetzung, ausgehend von einem bestimmten Elemente.

Wir wollen dieses Element in folgender Weise fixieren. Auf Grund unserer Voraussetzung besteht für die Funktion P eine Gleichung in (z)

$$g(\overline{P}) = \overline{P}^M + \cdots + \mathfrak{p}_M(\!(z)\!) = 0$$

welche alle Werte der Funktion P auf dem durch die Gleichungen (3), und a fortiori also auf dem durch (2) definierten Gebilde liefert. Das Polynom $g(P)$ kann reduzibel sein. Wir denken es uns zunächst von mehrfachen Faktoren befreit, was ja stets auf rationalem Wege möglich ist. Sei $g'(\overline{P})$ das so erhaltene Polynom. Es gibt dann (wie aus dem Vorhergehenden leicht folgt) in beliebiger Nähe von $((0))$ noch unendlich viele reguläre Punkte des Gebildes (2), an welchen $g'(\overline{P})$ lauter verschiedene Wurzeln hat*). Um einen solchen Punkt $((z_0))$ wählen wir das Ausgangselement ε_0 unseres analytischen Gebildes (2).

Setze ich in $P((x))$ die aus ε_0 folgenden Werte $x_0, x_0', \cdots, x_0^{(n-1)}$ ein, so ergibt sich ein bestimmter Wert P_0, welcher Wurzel von $g'(\overline{P})_{((z_0))} = 0$ ist. Wir bezeichnen mit $g_1(\overline{P})$ den irreduzibelen Faktor von $g'(\overline{P})$, welcher diese Wurzel P_0 liefert und betrachten von nun an immer die Gleichung

$$g_1(\overline{P}) = 0.$$

Wir behaupten:

Jeder Wert, welchen P auf dem Gebilde (2) *annimmt, ist Wurzel von* $g_1(\overline{P}) = 0$; *und umgekehrt, jede Wurzel $\overline{P}$ von $g_1(\overline{P}) = 0$ ist ein Wert, welchen P auf dem Gebilde annimmt.*

In der Tat folgen um den Punkt $((z_0))$ aus dem Element ε_0 einerseits, aus der Gleichung $g_1 = 0$ andererseits für P zwei unter einander identische Potenzreihen-Entwickelungen P' und P''. Durch Fortsetzung dieser Potenzreihen auf allen möglichen Wegen erhalte ich aber einerseits alle Werte, welche P auf dem Gebilde (2) annimmt, andererseits, wegen der Irreduzibilität von $g_1(\overline{P})$, alle Wurzeln von $g_1 = 0$. Daraus ergibt sich die behauptete Übereinstimmung zunächst an allen regulären Stellen, und, daraus folgend, dann auch an allen Grenzstellen.

Der zweite Teil des Satzes werde noch einmal ausführlich in der folgenden Form ausgesprochen:

Folgt für einen Punkt $((z))$ einer gewissen Umgebung des Nullpunktes im Raume der (z) aus $g_1 = 0$ ein Wurzelwert $\overline{P}$, so gehört zu dem Wertesystem $((z))$ ein Wertesystem $((x))$ des analytischen Gebildes (2), *an welchem $P((x))$ den Wert $\overline{P}$ annimmt.*

Eine für das Folgende wichtige Anwendung der irreduzibelen Faktoren ist die folgende: Ich kann nach dem Poincaréschen Verfahren, ebenso wie für die Funktion $P((x))$, auch für jede der Funktionen (b″) eine Gleichung der Form $\gamma(\overline{\mathfrak{P}}) = 0$ aufstellen, deren Koeffizienten Potenzreihen in (z) sind. Da aber nach Voraussetzung $\mathfrak{P}((x))$ längs des analytischen Gebildes (2) verschwindet, so enthält das Polynom $\gamma(\overline{\mathfrak{P}})$ den irreduzibelen Faktor $\overline{\mathfrak{P}}$ und dieser irreduzibele Faktor ist gerade dem Gebilde (2) zugeordnet.

6. Wir suchen jetzt die Stellen $((z))$, an welchen $g_1(\overline{P}) = 0$ eine verschwindende Wurzel hat. Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a. Der letzte Koeffizient $\mathfrak{p}_M((z))$ von $g(\overline{P})$ verschwindet identisch und am Punkte $((z_0))$ ist $P_0 = 0$. In diesem Falle ist $g_1(\overline{P}) = \overline{P}$. P ver-

---

*) In der Tat sind solche Punkte sicher diejenigen, an welchen sowohl g als auch die Polynome (3) von 0 verschiedene Discriminanten besitzen.

schwindet also identisch längs des ganzen Gebildes (2), die Gleichung $P = 0$ liefert keine neue Bedingung.

In diesem speziellen Falle definiert das System der m Gleichungen (b) *die ganze ν-dimensionale Mannigfaltigkeit* (2).

b) Im allgemeinen Falle hat $g_1(\overline{P})$ ein nicht identisch verschwindendes von $\overline{P}$ freies Glied $\mathfrak{p}'((z))$. Die Bedingung dafür, daß $g_1 = 0$ eine verschwindende Wurzel besitze, ist dann

$$\mathfrak{p}'((z)) = 0.$$

Diese Gleichung definiert im Raume der (z) um den Nullpunkt herum eine endliche Anzahl $(\nu-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, was diesen Mannigfaltigkeiten im Raume der (x) entspricht. Diese Untersuchung kann nicht nach der in 3. angewandten einfachen Methode geführt werden, da möglicherweise den sämtlichen durch $\mathfrak{p}' = 0$ definierten Punkten $((z))$ Grenzpunkte der Mannigfaltigkeit (2) entsprechen*).

Wir bezeichnen, wie vorher, mit $s, s', \cdots, s^{(\nu-2)}$ die unabhängigen Variabelen, durch welche wir die $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde im Raume der (z) darstellen. Beachten wir zunächst, daß die entsprechenden *Gebilde im Raume der (x) gleichfalls $(\nu-1)$-dimensional* sein müssen. In der Tat entsprechen ja nach den Gleichungen (3) stetigen Mannigfaltigkeiten (z) auch stetige Mannigfaltigkeiten (x). Gehöre also zu dem Punkte $((s_0))$ ein Punkt $((z_0))$ und ein entsprechender Punkt $((x_0))$ hinzu, so kann ich um den Punkt $((s_0))$ eine gewisse Umgebung abgrenzen: lasse ich innerhalb derselben den Punkt $((s))$ variieren, so variieren $((z))$ und $((x))$ stetig mit. Jedem stetigen Gebiete im Raume der (s) entspricht also ein stetiges Gebilde im Raume der (x). Dieses Gebilde aber muß $(\nu-1)$-dimensional sein. Denn als Variabele (s) kann ich ja immer lineare Transformierte der Variabelen (z) wählen, und hieraus schließt man durch vollständige Induktion, daß die Variabelen (s) auch lineare Transformierte der (x) sind. Ich kann also durch Koordinatendrehung an Stelle der (x) ein neues Variabelen-System $(\overline{x})$ ableiten, in welchem die (s) figurieren. Da aber diese $\nu - 1$ Größen unbeschränkt veränderlich sind, so ist das oben betrachtete stetige Gebilde $(\nu-1)$-dimensional. Dieses Gebilde hat dann die Eigenschaft, daß auf ihm überall

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{P}_1((x)) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_{m-1}((x)) = 0, \quad \mathfrak{p}'((z)) = \pi((x)) = 0.$$

*) War das Gebilde (2) eindimensional, so daß nur eine einzige Variable z auftritt, so definiert die Gleichung $\mathfrak{p}'(z) = 0$, (da wir ja nur die Wurzeln in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes betrachten) allein den Punkt $z = 0$, welchem nach den Gleichungen (3) nur der Nullpunkt des (x)-Raumes entspricht. Der Punkt $(x) = 0$ ist also nicht Häufungspunkt von gemeinsamen Punkten der Gleichungen (b) und *gemeinsame Punkte sind also nur in endlicher Zahl vorhanden.*

Die letztere Gleichung ist dadurch erhalten, daß für die (z) ihre Werte als lineare Funktionen der (x) eingesetzt sind.

Wir beweisen weiter: *Das definierte Gebilde im Raume der* (x) *besteht aus einer endlichen Anzahl* $(\nu-1)$*-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten.*

Dies geschieht mit Hülfe des Poincaréschen Verfahrens. Es soll dabei der Einfachheit halber angenommen werden, daß als Größen (s) die Koordinaten $z, z', \cdots, z^{(n-2)}$ genommen worden sind, worin nach dem Vorausgehenden keine besondere Einschränkung liegt. Betrachten wir jetzt die Gleichungen (3), greifen innerhalb des Konvergenzgebietes der Koeffizienten einen Punkt $(z, z', \cdots, z^{(n-2)})$ heraus, bezeichnen mit $z_1^{(n-1)}, \cdots, z_\varrho^{(n-1)}$ die nach $\mathfrak{p}'((z)) = 0$ hinzugehörigen Werte von $z^{(n-1)}$ und bilden das Produkt

$$G_1(x;\, z;\, z_1^{(n-1)})\, G_1(x;\, z;\, z_2^{(n-1)}) \cdots G_1(x;\, z;\, z_\varrho^{(n-1)}),$$

so ist dies ein Polynom in x, dessen Koeffizienten Potenzreihen in $z, \cdots, z^{(n-2)}$ und symmetrisch in $z_1^{(n-1)}, \cdots, z_\varrho^{(n-1)}$ sind. Daraus folgt, daß die gebildete Funktion ein Polynom $\Gamma_1(x)$ in x ist, dessen Koeffizienten Potenzreihen in $z, \cdots, z^{(n-2)}$ sind*). Indem wir das gleiche Verfahren auf die Polynome $G_2, \cdots, G_n$ anwenden, kommen wir zu einem *Gleichungssystem*

$$\Gamma_1(x) = 0, \cdots, \Gamma_n(x^{(n-1)}) = 0, \tag{4}$$

dessen Koeffizienten Potenzreihen in den neuen Variabelen $z, \cdots, z^{(n-2)}$ — oder allgemeiner (s) — *sind.* Die Koordinaten aller Punkte $((x))$ unseres betrachteten Gebildes sind Wurzeln dieses Gleichungssystems. Die Koeffizienten haben außerdem die Eigenschaft, am Punkte $(s) = 0$ sämtlich zu verschwinden. Wir nehmen übrigens an, daß die Γ von doppelten Faktoren bereits befreit sind.

Die Gleichungen (4) definieren dann eine endliche Anzahl $(\nu-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten. Unter diesen müssen sich diejenigen $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde vorfinden, welche den Gleichungen (c) genügen. Man findet sie auf folgende Weise. Irgend eines der Polynome (c) genügt in Bezug auf (s) einer von Doppelfaktoren befreiten Gleichung $\eta(\overline{\overline{\mathfrak{P}}}) = 0$, welche den irreduzibelen Faktor $\overline{\overline{\mathfrak{P}}}$ besitzt. Ich wähle jetzt einen Punkt $((s))$, welcher für die sämtlichen analytischen Gebilde regulär ist, und an welchem außerdem die Discriminante von $\eta(\overline{\overline{\mathfrak{P}}})$ nicht verschwindet. Diesem Punkt $((s))$ entspricht auf mindestens einem der Gebilde ein Punkt $((x))$, an welchem $\mathfrak{P} = 0$, und es folgt dann, wie oben, daß längs dieses ganzen Gebildes identisch $\mathfrak{P} = 0$. Auf diese Weise finde ich die sämtlichen $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde, auf welchen $\mathfrak{P}$ verschwindet, und sehe, daß es analytische Mannigfaltigkeiten sind.

*) Poincaré, l. c.

Von den durch (4) definierten analytischen Mannigfaltigkeiten kommen dann also nur diejenigen in Betracht, auf welchen die sämtlichen Funktionen (c) verschwinden. Daß es solche Mannigfaltigkeiten gibt, folgt aus den Betrachtungen von pg. 363. Wir wollen sie mit

$$M_1, \cdots, M_k$$

bezeichnen.

Wir haben schließlich diejenigen Punkte der Mannigfaltigkeiten M zu suchen, an welchen ausser den Funktionen (c) auch die Funktion $P((x))$ verschwindet. Die Gesamtheit dieser Punkte muß dann nach unserer Behauptung eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten bilden.

Die Funktion $P((x))$ genügt, wie aus dem identischen Verschwinden von $\mathfrak{p}'((z))$ in (s) folgt, als Funktion der (s) betrachtet, einer von mehrfachen Faktoren befreiten Gleichung der Form

$$\overline{\overline{P}}\,\gamma(\overline{\overline{P}}) = 0, \quad \gamma(\overline{\overline{P}}) = \overline{\overline{P}}^{\mu} + \cdots + \mathfrak{p}''((s)). \tag{5}$$

Jeder der Mannigfaltigkeiten M ist in dem in 5. erwähnten Sinne ein irreduzibeler Faktor dieser Gleichung zugeordnet.

Es sind jetzt wieder zwei Fälle zu unterscheiden:

α) P verschwindet in einem regulären Punkt des Gebildes M an einer Stelle $((s))$, an welcher $\mathfrak{p}''((s)) \neq 0$. Der zu M zugehörige irreduzibele Faktor ist dann der Faktor $\overline{\overline{P}}$, d. h. P verschwindet längs des ganzen $(\nu-1)$-dimensionalen Gebildes M. Derselbe Schluß gilt auch noch, wenn der Verschwindungspunkt ein Grenzpunkt von M ist, vorausgesetzt nur, daß an ihm $\mathfrak{p}''((s))$ nicht verschwindet.

Nun läßt sich der Schlußsatz von 5. für den Raum der (s) in folgender Form aussprechen:

Jedem Werte $((s))$ entspricht auf mindestens einer der Mannigfaltigkeiten $M_1, \cdots, M_k$ ein Punkt, an welchem P verschwindet.

Wenden wir diesen Satz auf einen Punkt $((s))$ an, an welchem $\mathfrak{p}''((s))$ nicht verschwindet, so erhalten wir das erste fundamentale Resultat:

In der Umgebung des Nullpunktes des (x)-Raumes gibt es eine endliche Anzahl $(\nu-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten, längs welcher die Gleichungen (b) *erfüllt sind.*

β) P verschwindet auf einem Gebilde M nur in solchen Punkten, in welchen gleichzeitig auch $\mathfrak{p}''((s))$ verschwindet. Ich habe dann also die Gesamtheit der Verschwindungspunkte von P innerhalb M zu bestimmen. Ich behandele hierzu die Mannigfaltigkeit M in der gleichen Weise wie bisher die Mannigfaltigkeit (2), indem ich mich der Gleichungen (4) ebenso bediene wie vorher der Gleichungen (3), und finde auf ihr eine endliche Anzahl von analytischen Mannigfaltigkeiten $(\nu-2)^{\text{ter}}$ Dimension, längs welcher die Gleichungen (b) sämtlich erfüllt sind, daneben möglicherweise noch Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension, welche ganz einer analytischen Mannigfaltigkeit $(\nu-2)^{\text{ter}}$ Dimension angehören. Auf diese Weise weiterschließend*), finde ich, daß *von jeder Dimension nur eine endliche Anzahl von Mannigfaltigkeiten vorhanden sein können.* Der Beweisgang liefert das gleiche Resultat für gemeinsame Punkte.

7. Hiermit ist die vollständige Induktion in ihrer Hauptsache erledigt. Es ist nur noch der Beweis nachzutragen, daß um jeden Grenzpunkt eine Entwicklung der Form (3) besteht, was ja gleichfalls durch vollständige Induktion abgeleitet werden sollte. Auch dieser Beweis aber ist schon geführt: in der Tat sind wir von den Gleichungen (3) zu den Gleichungen (4) übergegangen, welche von der gleichen Form sind und hinsichtlich der $(\nu-1)$-dimensionalen Gebilde die nämliche Rolle spielen, wie (3) hinsichtlich des ν-dimensionalen Grundgebildes. In der gleichen Weise lassen sich die Gleichungen für die unter β) betrachteten Gebilde geringerer Dimension aufstellen.

Hiermit ist also die vollständige Induktion erledigt und unsere beiden Sätze, Endlichkeitssatz und Grenzstellensatz, bewiesen.

8. Der Endlichkeitssatz bedarf aber noch einer wesentlichen Ergänzung. In der Tat besteht nach dem bisher gezeigten noch die Möglichkeit, daß aus einem Gebilde ν^{ter} Dimension durch Hinzufügung einer einzigen Gleichung Gebilde von geringerer als $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Dimension ausgeschnitten werden. Demgegenüber zeigen wir jetzt:

Definieren die im Nullpunkt verschwindenden Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1((x)) = 0, \cdots, \mathfrak{P}_{m-1}((x)) = 0$$

um den Nullpunkt herum ein analytisches Gebilde ν^{ter} Dimension, so schneidet die gleichfalls im Nullpunkte verschwindende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_m((x)) = 0$$

aus diesem Gebilde keine Mannigfaltigkeiten von geringerer als $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Dimension aus.

Die unter β) betrachteten Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension müssen also vollständig in einer den Gleichungen (b) genügenden Mannigfaltigkeit von der Dimension $(\nu-1)$ enthalten sein. Sie sind in der Tat einfach die Schnittgebilde einer solchen Mannigfaltigkeit mit einer Mannigfaltigkeit M.

Wir beweisen den Satz zuerst für den Fall, daß das analytische Gebilde 2-dimensional (eine Fläche) ist, und zeigen, daß dann die Gleichung $\mathfrak{P}_m = P = 0$ nur 1-dimensionale Gebilde (Kurven) ausschneidet.

In der Tat können ja gemeinsame Gebilde geringerer Dimension (Punkte) nur dort auftreten, wo die Gleichung $\mathfrak{p}''(s) = 0$ besteht. Dies

*) indem ich immer zu Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension übergehe.

ist eine Potenzreihe in der einzigen Variabelen s und verschwindet in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes nur für den Punkt $s = 0$ selbst. Dem Punkte $s = 0$ aber entspricht nach den Gleichungen (4) allein der Punkt $(x) = 0$, durch welchen ja, wie bewiesen, eine 1-dimensionale gemeinsame Mannigfaltigkeit hindurchgeht. Es gibt also in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes keine isolierten Schnittpunkte des 2-dimensionalen Gebildes und des Gebildes $P = 0$. Da sich aber derselbe Beweis für jeden solchen Schnittpunkt führen läßt, um welchen die Funktionen sich in der Form von Potenzreihen oder Quotienten von Potenzreihen darstellen, so ist er für unser ganzes Gebiet D allgemein bewiesen.

Den allgemeinen Satz beweist man dann durch vollständige Induktion, indem man ihn für den Fall von $n-1$ Variabelen und geringerer Dimension des zu schneidenden Gebildes als bereits bewiesen voraussetzt. Es habe in der Tat im n-dimensionalen Raume der (x) das ν-dimensionale Gebilde, dessen unabhängige Koordinaten mit $z, z', \cdots, z^{(\nu-1)}$ bezeichnet werden, mit $\mathfrak{P}_m((x)) = 0$ ein $(\nu-k)$-dimensionales Schnittgebilde $(k>1)$. Ein Element des Schnittgebildes schreibt sich in der Form

$$x = \mathfrak{P}(s, s', \cdots, s^{(\nu-k-1)}), \cdots, x^{(n-1)} = \mathfrak{P}^{(n-1)}((s)). \tag{5}$$

Die (s) können nun, wie bereits hervorgehoben, immer als lineare Funktionen der (z) betrachtet, und daher durch eine Koordinatendrehung neue Variable $(\bar{z})$ eingeführt werden, unter welchen die (s) figurieren. Ebenso lassen sich weiter Koordinaten $(\bar{x})$ einführen, welche die $(\bar{z})$ und daher auch die (s) enthalten.

Setze ich nun die Variabele $s^{(\nu-k-1)}$ konstant, so geht das Gebilde (5) in ein $(\nu-k-1)$-dimensionales über, das ν-dimensionale Gebilde in ein $(\nu-1)$-dimensionales, und der Raum in einen $(n-1)$-dimensionalen. $\mathfrak{P}_m((x))$ ferner geht über in eine Potenzreihe $\pi(\bar{x}, \bar{x}', \cdots, \bar{x}^{(n-2)})$ *)

In dem $(n-1)$-dimensionalen Raume müßte sich also ein $(\nu-1)$-dimensionales Gebilde mit $\pi = 0$ in einem $(\nu-k-1)$-dimensionalen Gebilde schneiden, und zwar kann ich durch geeignete Wahl des konstanten Wertes $s^{(\nu-k-1)}$ stets erreichen, daß dieses Gebilde nicht ganz einem Schnittgebilde höherer Dimension angehört. Dies ist aber nach Voraussetzung nicht möglich: daher können auch in dem n-dimensionalen Raume Schnittgebilde von geringerer als $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Dimension nicht auftreten, was zu beweisen war.

Durch Hinzufügung einer Gleichung bleibt also die Dimension eines Gebildes entweder erhalten oder sie erniedrigt sich um 1.

9. Die Resultate, zu denen wir gelangt sind, können wir noch kurz in der Form zusammenfassen:

*) Der Fall, daß π identisch verschwinden könnte, hat keine Ausnahmestellung.

Seien $r_1((x)), \cdots, r_m((x))$ *m Funktionen der n Variabelen* (x), *welche innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes D sich wie rationale Funktionen verhalten, so bilden innerhalb dieses Gebietes die gemeinsamen Nullstellen dieser Funktionen eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen, (wozu auch Punkte gerechnet werden sollen).*

Ist außerdem $m < n$, *so treten keine Mannigfaltigkeiten von geringerer als der* $(n-m)^{\text{ten}}$ *Dimension auf.*

Dazu tritt noch der Grenzstellensatz in der präzisen Fassung von 4. (pg. 361).

10. Unter den gemeinsamen Nullstellen der Funktionen r befinden sich übrigens auch solche „uneigentliche", an welchen eine oder mehrere der Funktionen unbestimmt werden. Dies sind nämlich diejenigen Stellen $((z))$, an welchen in den Gleichungen (a') einige der Nenner $\mathfrak{Q}$ verschwinden*). Wir schließen dann aus unserem Hauptsatze betreffs dieser uneigentlichen gemeinsamen Nullstellen sofort das Resultat:

Eine gemeinsame Nullmannigfaltigkeit der Funktionen r umfaßt entweder *nur* uneigentliche Nullstellen, oder die auf ihr gelegenen uneigentlichen Nullstellen bilden eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten geringerer Dimension.

Die in 9. ausgesprochenen Resultate sind ferner einer Ausdehnung auf allgemeinere, mehrdeutige Funktionen fähig. Ich betrachte eine Funktion f, welche innerhalb und auf dem Rande eines Gebietes D um jeden Punkt einer irreduzibelen Gleichung folgender Form genügt

$$\mathfrak{P}_0((x))f^{\mu} + \mathfrak{P}_1((x))f^{\mu-1} + \cdots + \mathfrak{P}_{\mu}((x)) = 0,$$

wo die $\mathfrak{P}$ Potenzreihen in den (x) sind, und μ eine ganze Zahl ist, die für alle Punkte unseres Gebietes unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Eine solche Funktion nennt Herr Poincaré innerhalb D *„algebroid"* **), insbesondere gehören die algebraischen Funktionen dieser Klasse an.

Mit Hülfe der dargelegten Methoden beweist man, daß auch die gemeinsamen Nullstellen algebroider Funktionen innerhalb D eine endliche Anzahl analytischer Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimensionen bilden.

*) Weierstraß, Werke, II, 156—157.

**) Poincaré, l. c.