Werk

Titel: Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst C. Neumann's Methode des arith...

Autor: Neumann, Ernst Richard

Jahr: 1902

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0055|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst *C. Neumann's* Methode des arithmetischen Mittels.

Von

Ernst Richard Neumann in Halle.

Erster Aufsatz.

Hilbert's Modification von *C. Neumann's* Convergenzbeweis.

Die von *Carl Neumann* angegebene „Methode des arithmetischen Mittels" war wohl in erster Linie dazu berufen, einen Ersatz zu gewähren für das *Dirichlet'sche Princip*, d. h. für beliebig gestaltete ebene und räumliche Bereiche die *Existenz einer Fundamentalfunction**) *mit willkürlich vorgeschriebenen Randwerthen* darzuthun. Diese principiell wichtige Aufgabe hat die Methode längst gelöst in Verbindung mit gewissen *combinatorischen Methoden.***)

Doch die Methode leistet noch mehr, sie gestattet nicht allein den *Existenz*beweis zu führen, sondern sie liefert uns auch einen fertigen *analytischen Ausdruck* für die gesuchten Fundamentalfunctionen in Form gewisser unendlicher Reihen, der sogenannten *Neumann'schen Reihen* —, und darin besteht eben ihre Ueberlegenheit über die anderen Ersatzmethoden für das *Dirichlet'*sche Princip, wie sie von *H. A. Schwarz* und *Poincaré* angegeben sind.

---

*) Wir verstehen unter dieser Bezeichnung eine Function U, welche in dem betreffenden Bereiche den bekannten Potentialbedingungen genügt, d. h. nebst ihren Differenzialquotienten stetig ist und der Laplace'schen Gleichung $\Delta U = 0$ Genüge leistet. — Wegen der genaueren Definition vergleiche weiter unten § 3, pag. 18.

**) Die einschlägigen Arbeiten von *C. Neumann* findet man niedergelegt in seinen „Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential" (Leipzig bei Teubner 1877) und in der ersten Abhandlung „Ueber die Methode des arithmetischen Mittels" in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wiss. Bd. XIII (Leipzig bei Hirzel 1887). — Diese beiden Werke, auf die ich mich öfters zu berufen habe, will ich immer kurz folgendermassen citiren: „C. N. Unters." und „C. N. Abhandl. I".

Zwar konnte *C. Neumann* nur die Anwendbarkeit seiner Methode auf *convexe*, oder richtiger gesagt, *nirgend concave* Gebiete verbürgen; wenn es ihm aber nach Entdeckung dieser seiner Methode, wie gesagt, gleichwohl gelang, auch für *beliebige* Bereiche das *Dirichlet*'sche Problem zu lösen, d. h. wenigstens die *Existenz* einer Fundamentalfunction mit vorgeschriebenen Randwerthen zu beweisen, so hatte das seinen Grund in der folgenden Ueberlegung: Jedes (nicht von Hause aus schon convexe) Gebiet lässt sich sicherlich in solche (übereinandergreifende) Theilgebiete zerlegen, für welche die Methode des arithmetischen Mittels — sei es direct, sei es unter Zuhilfenahme der Abbildung nach reciproken Radien — eine Fundamentalfunction aus vorgeschriebenen Randwerthen herzustellen gestattet. — Die erwähnten *combinatorischen Methoden* gestatten dann weiter aus solchen Fundamentalfunctionen der *Theilgebiete* die Fundamentalfunction für das *ganze* ursprüngliche Gebiet herzustellen und somit das gestellte Problem zu lösen.

Derselbe Gedanke findet sich auch in der *Methode von H. A. Schwarz* wieder, vermittelst welcher wohl zuerst in einwandsfreier Weise die Existenz einer Fundamentalfunction mit willkürlich vorgeschriebenen Randwerthen für eine grössere Classe von Bereichen bewiesen ist, nämlich für alle *ebenen* Gebiete, die von singularitätenfreien Stücken analytischer Curven begrenzt werden; auch *Schwarz* stellt zunächst die Fundamentalfunctionen gewisser *Theilbezirke* her und setzt dann aus diesen Functionen vermittelst seines „alternirenden Verfahrens" (das also den *C. Neumann*'schen „combinatorischen Methoden" entspricht) die Fundamentalfunction des *ganzen* ursprünglich vorgelegten Bereiches zusammen.

Während nun aber diese Zerlegung des gegebenen Gebietes in Theilgebiete bei *Schwarz* im Wesen der ganzen Methode begründet ist, — sie hängt enge damit zusammen, dass *Schwarz* von dem analytischen Ausdruck für die begrenzende Curve Gebrauch macht — so stellt sich bei *C. Neumann* die Nothwendigkeit der Zerlegung erst beim Convergenzbeweise ein; *C. Neumann* nimmt die Zerlegung lediglich vor, um die Theilgebiete gewissen Bedingungen anzupassen, unter denen allein er die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels *beweisen* kann. Ob die Convergenz aber wirklich an solch einschränkende Bedingungen gebunden ist, ob sie nicht vielleicht *thatsächlich* in viel weiterem Umfange stattfindet, und somit möglicherweise auch für das *ganze* ursprünglich vorgelegte Gebiet selber, ob sonach vielleicht die Methode des arithmetischen Mittels uns ganz *direct, ohne Zuhilfenahme der combinatorischen Methoden*, die gesuchte Fundamentalfunction dieses Gebietes liefern könnte — diese Frage bleibt dabei ganz offen.

Diese Frage gerade, die Frage nach dem *Gültigkeitsbereiche* der Methode

des arithmetischen Mittels ist nun aber in neuerer Zeit in den Vordergrund des Interesses getreten. Es handelt sich also bei den neueren Untersuchungen über die Methode nicht mehr um die *principielle* Frage nach der *Existenz* einer Fundamentalfunction mit vorgeschriebenen Randwerthen, sondern um die folgende mehr *formale* Frage: *Gelten vielleicht die Reihen, welche C. Neumann für die Fundamentalfunctionen des inneren und äusseren Gebietes von nirgend concaven Curven und Flächen angegeben hat, ganz allgemein auch bei beliebigen Curven und Flächen?* oder anders ausgedrückt: *Lassen sich alle Fundamentalfunctionen ganz beliebig gestalteter Gebiete in Form dieser Neumann'schen Reihen darstellen?*

Diese Frage hat vor Allem *Poincaré* zum Gegenstande einer grösseren Arbeit gemacht.*) Er kommt in ihr zu dem Resultate, dass diese Frage für einfach zusammenhängende Bereiche allgemein, oder doch wenigstens unter sehr weiten Voraussetzungen über die Begrenzung, bejahend zu beantworten ist. — Doch ist dieser *Poincaré'sche Beweis* für die Allgemeingültigkeit der Methode des arithmetischen Mittels vorläufig noch sehr umständlich und in mancher Hinsicht unbefriedigend; so setzt z. B. *Poincaré* das *Dirichlet'sche Princip* von vornherein als gelöst voraus und zieht überhaupt Hilfsmittel zum Beweise heran, deren Benutzung — nach Lage der Dinge heute zwar noch unvermeidlich — doch nicht in der Natur der Sache begründet ist.

Bei dem Studium der *Poincaré'*schen Arbeit und der an sie sich enge anschliessenden neueren Arbeiten von *Liapounoff*, *Steckloff* und *Korn* gewinnt man überhaupt den Eindruck, dass uns noch immer ein wesentlicher Punkt in diesem Gebiete verborgen ist. — Wenn ich daher in diesem und den folgenden Aufsätzen die hauptsächlichsten Resultate meiner mehrjährigen Untersuchungen über die Methode des arithmetischen Mittels veröffentliche, ohne meinerseits eine völlig befriedigende Lösung der aufgeworfenen Frage zu geben, so geschieht dies in dem Glauben, dass die hier angestellten Betrachtungen vielleicht doch bis zu einem gewissen Grade geeignet sein möchten, etwas Licht auf das Wesen der ganzen Methode und der Functionen, deren sie sich bedient, zu werfen, und somit auch ein wenig zur Aufhellung des stellenweise noch herrschenden Dunkels beizutragen. —

Die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels zu beweisen, ist bisher im Wesentlichen auf zwei gänzlich verschiedenen Wegen versucht worden. Diese beiden Wege werde ich nun nach einander eine näheren Untersuchung unterziehn. — Es ist dies erstlich der Weg, auf welchem

*) La méthode de *Neumann* et le problème de *Dirichlet*. Acta mathematica Bd. 20, 1897, pag. 59.

C. Neumann ursprünglich die Convergenz der Methode wenigstens für *convexe* Gebiete bewies, ein Weg, bei welchem die sogenannte „Configurationsconstante" des betrachteten Gebietes eine wesentliche Rolle spielt; und der zweite Weg ist der neuerdings von *Poincaré* in der citirten Arbeit eingeschlagene, der sich enge an ein Verfahren anlehnt, dessen sich *H. A. Schwarz* bei einem verwandten Problem bedient hat.

Die neueren Arbeiten über die Methode verfolgen ausschliesslich den zweiten *Poincaré'schen Weg* weiter, und auch ich neige der Ansicht zu, dass auf ihm noch eher eine befriedigende Lösung der aufgeworfenen Frage zu erwarten ist. — Wenn ich gleichwohl daneben den ursprünglichen *C. Neumann'schen Weg* eingehend berücksichtige und vielfach Wege einschlage, welche auf demselben Princip, wie er, beruhen, so geschieht das, weil sich dieser Weg durch seine Einfachheit und Durchsichtigkeit auszeichnet, und weil er uns entschieden einen tieferen Einblick in den Mechanismus der aufeinanderfolgenden Functionen gestattet, auf deren Anwendung die Methode beruht, was wohl vor Allem im Falle *mehrfach zusammenhängender Bereiche* gilt, mit denen ich mich in dem zweiten Aufsatz eingehender beschäftigen werde. — Ueberdies gedenke ich im dritten Aufsatz zu zeigen, dass das *C. Neumann'*sche Verfahren des Convergenzbeweises noch einer grossen *Verallgemeinerung* fähig ist, welche es vielleicht dem Interesse der Mathematiker wieder etwas näher rückt, da sie es in einen gewissen Zusammenhang zu den neueren Untersuchungen bringt, die an das *Poincaré'*sche Verfahren anknüpfen.

Was nun specieller den Inhalt des vorliegenden ersten Aufsatzes anlangt, so dürfte dieser vielleicht nichts wesentlich Neues enthalten, er behandelt vornehmlich die *Grundlagen* für unsere weiteren Entwicklungen. Ich gebe zunächst die Methode in ihren Hauptumrissen an [vgl. pag. 14—15] und bringe sodann den *Neumann'*schen Convergenzbeweis mit einer gewissen Modification, die sich dann weiterhin als äusserst fruchtbar herausstellen wird, und die wohl auf *Hilbert* zurückgeht.

Im Wintersemester 1895/96 hat nämlich Professor *Hilbert* in Göttingen in einer Vorlesung über partielle Differenzialgleichungen auch die Methode des arithmetischen Mittels behandelt. — Im Anschluss daran hat sich dann einer seiner damaligen Schüler, Herr *Ch. A. Noble*, weiter mit diesem Gegenstande beschäftigt und auch eine kurze Mittheilung darüber in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht.*) — Da jedoch gerade der hauptsächlichste Satz, ja der Satz in welchem, wenigstens nach meiner Ansicht,

*) Jahrgang 1896, pag. 191—198.

allein etwas wesentlich Neues enthalten ist, in der Arbeit nicht bewiesen, nicht einmal ausgesprochen, vielmehr stillschweigend als bekannt vorausgesetzt und mehrfach angewandt wird, so muss ich wohl annehmen, dass ihn *Hilbert* in der Vorlesung bewiesen hat, und will ihn daher kurz den *„Hilbert'schen Satz"* nennen. — Dieser Satz spricht zum ersten Male aus, dass es für die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels schon *völlig hinreichend* ist, dass die Configurationsconstante des betrachteten Gebietes kleiner als 1 ist, dass die *Neumann'*sche (weit engere) Bedingung *convexer* Begrenzung ganz überflüssig ist.

Für diesen Satz, der also bereits eine gewisse Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Methode darstellt, will ich nun im Folgenden einen Beweis liefern, wie ich ihn mir für meine Zwecke zurechtgelegt habe [vgl. § 5]. — In der Bezeichnungsweise werde ich mich dabei an die von *C. Neumann* gebrauchte, von der *Hilbert'*schen etwas abweichende halten, welche auch leicht die Ausdehnung der Untersuchungen von *ebenen* auf *räumliche* Gebiete gestattet. —

Hilbert bedient sich übrigens einer etwas anderen Configurationsconstanten, die freilich mit der *Neumann'*schen enge zusammenhängt [vgl. § 6], vor ihr aber entschieden den Vorzug verdient, auch bestimmter definirt wird, sodass sie sich im einzelnen Falle leichter berechnen lässt. — Darin erblickt nun *Noble* den Hauptvorzug der *Hilbert'*schen Ueberlegungen, weil es erst durch die erleichterte Berechnung der Constanten ermöglicht sei, die eventuelle Anwendbarkeit der Methode auf weitere Bereiche festzustellen; — wenn dem aber so ist, so verdanken wir das eben erst dem *Hilbert'*schen Satz, denn bevor dieser bekannt war, konnten wir die Convergenz der Methode bei einem Gebiete, das nicht convex war, mochte nun seine Configurationsconstante einen Werth haben, wie sie wollte, doch nicht verbürgen. Es spielte früher der Werth der Constanten überhaupt *im einzelnen Falle* keine Rolle — höchstens liess er die *Stärke* der Convergenz abschätzen —, die Constante diente überhaupt nur vorübergehend dem einen Zweck, *ein für alle Male* die Convergenz des ganzen Verfahrens für *convexe* Gebiete zu beweisen. —

Noble zeigt dann noch im weiteren Verlauf seiner Arbeit, dass jedes ebne Gebiet, das von einer „Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen" begrenzt wird, sich stets in übereinandergreifende Theilgebiete zerlegen lässt ,deren Configurationsconstanten kleiner als 1 sind, für welche also die *Neumann'*sche Methode die Fundamentalfunctionen liefert, aus denen sich dann die gesuchte Function für das ganze Gebiet nach den *Schwarz-Neumann'*schen combinatorischen Methoden zusammensetzen lässt. — So beachtenswerth der damit erbrachte *Existenzbeweis* auch ist, etwas wesentlich Neues bringt er nicht, denn, dass es

stets eine Eintheilung des Gebietes giebt, welche im Wesentlichen dasselbe leistet, allerdings eventuell unter Zuhilfenahme der Abbildung nach reciproken Radien, das war, wie oben erwähnt, schon früher bekannt. — Dass übrigens beide Arten der Eintheilung thatsächlich auf dasselbe herauskommen, werde ich im letzten Paragraphen dieses Aufsatzes zeigen. —

Um mich nun später kürzer ausdrücken zu können, will ich hier zu Eingang der Arbeit sogleich noch bemerken, dass ich über die *„beliebigen"* Curven und Flächen ein für alle Mal die Voraussetzung mache, dass sie keine besonderen Singularitäten besässen, also im Besonderen von überall *stetiger Biegung, frei von Spitzen, bezw. Ecken und Kanten* seien. Sollte diese Voraussetzung nicht erfüllt sein, so bedürften unsere Ausführungen noch einer gewissen Modification, deren Berücksichtigung freilich unsere Formeln nur unnöthig compliciren und den Grundgedanken, um dessen Auseinandersetzung es mir zu thun ist, nur verschleiern würde. — Zudem scheint mir ein näheres Eingehn hierauf um so weniger nothwendig als jene Modification des Verfahrens aus den Arbeiten von *C. Neumann* [vgl. vornehmlich Abhandl. I] völlig klar ersichtlich ist [vgl. auch weiter unten die Anmerkungen pag. 31 und 44]. — Schliesslich will ich auch gleich von vornherein noch bemerken, dass ich mich hinsichtlich der *„willkürlichen"* auf einer Curve oder Fläche vorgeschriebenen Functionen, immer auf *stetige Functionen* beschränken werde.

§ 1.

Das Potential einer Doppelbelegung.*)

Es sei gegeben irgend eine *geschlossene Curve* σ *in der Ebene*, und auf derselben seien beliebige, aber stetige Werthe f_σ in irgend welcher Weise vorgeschrieben. Ferner sei gegeben irgend ein Punkt p in jener Ebene und es bezeichne E die Entfernung dieses Punktes p von einem Elemente $d\sigma$ jener Curve und ν die auf diesem Elemente $d\sigma$ errichtete innere Curvennormale

Alsdann bilde man das folgende über alle Elemente $d\sigma$ von σ hinerstreckte Integral:

$$W_p = \frac{1}{\pi}\int f_\sigma \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int f_\sigma\,(d\sigma)_p,$$

wo

*) Dieser Paragraph enthält eine blosse Zusammenstellung derjenigen Eigenschaften der Potentiale von Doppelbelegungen, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen wollen. — Wegen des Beweises dieser Eigenschaften verweise ich auf *C. Neumann's* Unters. (vornehmlich Cap. 4, § 6 und § 9, pag. 135) und Abhandl. I, § 4, pag. 34.

$$(d\sigma)_p = \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,d\sigma = \frac{\cos(\nu, E)}{E}\,d\sigma$$

die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ von p aus darstellt, dieselbe *positiv* oder *negativ* gerechnet, je nachdem ein in p gedachter Beobachter auf die *innere* oder *äussere* Seite jenes Curvenelementes $d\sigma$ hinblickt.

Zu einer dieser Function W_p in der Ebene völlig analogen Function *im Raume* gelangen wir nun, wenn wir eine *geschlossene Fläche* σ betrachten, auf derselben in irgend welcher aber stetigen Weise eine Function f_σ vorschreiben und alsdann das über die ganze Fläche hinerstreckte Integral bilden:

$$W_p = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma \frac{\partial\frac{1}{E}}{\partial\nu}\,d\sigma,$$

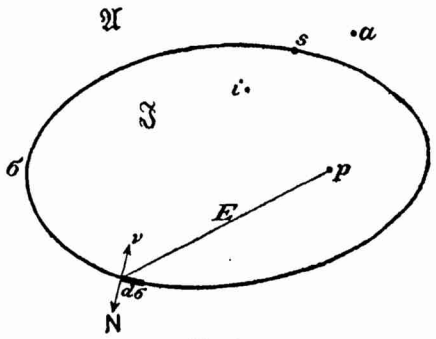

Fig. 1.

wo p ein ganz beliebiger Punkt im Raume ist, und wo E und ν ganz analoge Bedeutungen haben, wie oben.

Um daher unseren folgenden Ausführungen eine grössere Allgemeinheit zu geben, bei ihnen in gleicher Weise den Fall einer geschlossenen *Curve* σ *in der Ebene*, wie den Fall einer geschlossenen *Fläche* σ *im Raume* zu berücksichtigen, wollen wir allgemeiner

$$W_p = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_p, \tag{1}$$

setzen, wo

$$(d\sigma)_p = \frac{\partial T_p}{\partial\nu}\,d\sigma = \frac{\cos(\nu, E)}{E^h}\,d\sigma \tag{2}$$

die positiv oder negativ gerechnete scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ vom Punkte p aus bedeutet, und wo bei Betrachtungen

in der Ebene:	*im Raume:*
$h = 1, \qquad T_p = \log\frac{1}{E}$	$h = 2, \qquad T_p = \frac{1}{E}$

anzunehmen ist.

Dieses so definirte Integral W_p, betrachtet als Function der Lage des Punktes p, bezeichnet man als das „Potential einer Doppelbelegung" der Curve oder Fläche σ und die Function $\frac{f_\sigma}{h\pi}$ nennt man das „Moment" dieser Doppelbelegung; doch will ich die Betrachtungen, auf welche sich diese Bezeichnungen stützen, als für unsere weiteren Zwecke unwesentlich, hier übergehn.

Dieses Potential W besitzt nun die Eigenschaft, in jedem Punkte des innern, sowie des äussern Gebietes der gegebenen Curve oder Fläche σ nebst seinen Differenzialquotienten stetig zu sein und überdies der Laplace'schen partiellen Differenzialgleichung $\Delta W = 0$ Genüge zu leisten, d. i. bei Betrachtungen

in der Ebene der Gleichung:	*im Raume der Gleichung:*
$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$	$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0.$

Wir wollen diese bisher genannten Eigenschaften kurz als „*Haupt-*
3) *eigenschaften*" bezeichnen und können daher kurz so sagen:

Das Potential W einer Doppelbelegung besitzt die Haupteigenschaften
4) *in jedwedem Punkte des innern, sowie des äussern Gebietes der vorgelegten geschlossenen Curve oder Fläche σ.*

Im Unendlichen, d. h. wenn der Punkt p ins Unendliche rückt, *nimmt*
5) W_p *den Werth* 0 *an.* — Bezüglich des sonstigen Verhaltens der Function W im Gebiete ausserhalb σ sei noch hervorgehoben, dass *das über eine beliebige, σ umschliessende Curve oder Fläche ω hinerstreckte Integral*
6) $\int \frac{\partial W}{\partial N} d\omega$ *verschwindet*, wenn N die auf dem Curven- oder Flächenelement $d\omega$ errichtete innere Normale bedeutet.

Sodann ist noch zu bemerken, dass *die Function W_p in der Nähe von σ unstetig* ist. Lassen wir nämlich den Punkt p durch σ hindurchgehn, so besitzt W_p unmittelbar vor und unmittelbar nach dem Durchgange wesentlich verschiedene Werthe, die wiederum verschieden sind von denen, die es in dem Momente besitzt, in dem p gerade in σ hineinfällt, identisch mit einem Punkte s von σ wird. Es macht also der Werth von W_p beim Durchgange von p durch σ zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Sprünge, und zwar sind diese Sprünge einander gleich, nämlich gleich f_s, gleich dem Werthe, den die Function f_σ in jenem Curven- oder Flächenpunkte s besitzt. Es sind nämlich die *Grenzwerthe* von W_i, d. h. von den Werthen der Function in *inneren* Punkten i:

$$W_{i_s} = W_s + f_s, \tag{7i}$$

und die Grenzwerthe von W_a, von den Functionswerthen in *äusseren* Punkten a:

$$W_{a_s} = W_s - f_s, \tag{7a}$$

wo also W_s den Werth von W in dem geradezu auf σ gelegenen Punkte s bedeutet.

Gegenüber diesem unstetigen Verhalten von W_p *in der Nähe von σ* sei hinsichtlich dieser Werthe W_s bemerkt, dass sie, betrachtet lediglich

(8) als Function der Lage des Punktes s *auf der Curve oder Fläche* σ *selber* eine daselbst *stetige* Function bilden.

Endlich sei noch bemerkt, dass im Gegensatz zu den Functionswerthen selber sich die *Differentialquotienten von W nach der Normalen* von σ beim Durchgange durch σ durchaus *stetig* ändern, es ist nämlich

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} + \frac{\partial W}{\partial \mathsf{N}} = 0, \tag{9}$$

wenn N die mit ν correspondirende äussere Curven- oder Flächennormale bezeichnet. —

Zum Schlusse sei noch eines wichtigen *Specialfalles* Erwähnung gethan, in dem die Function W_p besonders einfache Werthe annimmt, nämlich des Falles, dass wir $f_\sigma = \text{const.}$, oder noch specieller $f_\sigma = 1$ setzen. Es geht dann W_p in die schon von *Gauss* betrachtete Function

$$w_p = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_p \tag{10}$$

über,*) und diese hat in inneren Punkten i, in Punkten s der gegebenen Curve oder Fläche σ, und in äusseren Punkten a die folgenden einfachen Werthe:

$$w_i = 2, \qquad w_s = 1, \qquad w_a = 0. \tag{10'}$$

§ 2.

Die Oeffnungsfunction und die *Hilbert*'sche Configurationsconstante einer geschlossenen Curve oder Fläche.

Wir wollen jetzt von dem zuletzt betrachteten Falle, dass die Function f_σ eine Constante sei, ganz absehn, vielmehr annehmen, dass f_σ eine wirkliche Function sei, d. h. eine Function, die an verschiedenen Stellen auch thatsächlich verschiedene Werthe annimmt.

Es sei G der grösste, und K der kleinste dieser Werthe, mithin $G - K$ die sogenannte *Schwankung* dieser auf der gegebenen Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Function f. Dann ist die Frage, um die es sich jetzt handelt, die folgende: Wie gross ist unter so bewandten Umständen die Schwankung der Randwerthe W_s der zugehörigen Function W?

Wir wollen für diese Randfunction W_s aus später leicht ersichtlichen Gründen die neue Bezeichnung f' einführen, definiren demnach f_s' durch die folgende Gleichung:

$$f_s' = W_s = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_s. \qquad \text{[vgl. (1) pag. 7]} \tag{1}$$

*) Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum. *Gauss*' ges. Werke, Bd. V, pag. 9, theorema quartum.

Es handelt sich dann also darum, die Schwankung dieser neuen Function f' zu bestimmen, oder wenigstens möglichst enge Grenzen für sie anzugeben, sie in Beziehung zu setzen zu der Schwankung der Function f.

Wir markiren zu diesem Zwecke auf σ zwei beliebig aber fest gewählte Punkte s_1 und s_2, bilden mit Bezug auf beide die Function f' und bilden dann weiter die Differenz dieser beiden Functionswerthe

$$f'_{s_1} - f'_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_{s_1} - \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_{s_2}.$$

Nunmehr zerlegen wir σ zunächst in ganz willkürlicher Weise in zwei Theile α und β. Dann sind jene Integrale hinzuerstrecken über alle Elemente $d\alpha$ des einen, sowie alle Elemente $d\beta$ des anderen Theils, wir müssen also schreiben:

$$f'_{s_1} - f'_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha f_\alpha (d\alpha)_{s_1} + \int_\beta f_\beta (d\beta)_{s_1}\right\} - \frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha f_\alpha (d\alpha)_{s_2} + \int_\beta f_\beta (d\beta)_{s_2}\right\}$$

oder aber:

$$(2)\quad f'_{s_1} - f'_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\int_\alpha f_\alpha [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] - \frac{1}{h\pi}\int_\beta f_\beta [(d\beta)_{s_2} - (d\beta)_{s_1}].$$

Jetzt setzen wir nach *Hilbert* über jene Eintheilung von σ fest, dass

(3) *zum Theile α alle Elemente $d\sigma$ gehören mögen, die von s_1 aus grösser erscheinen als von s_2, und zum Theile β alle übrigen*, also diejenigen Elemente, die von s_2 aus grösser oder gleich gross erscheinen als von s_1,*) sodass also $(d\alpha)_{s_1} > (d\alpha)_{s_2}$ und $(d\beta)_{s_1} \leqq (d\beta)_{s_2}$ ist, oder aber:

$$[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] > 0 \quad \text{und} \quad [(d\beta)_{s_2} - (d\beta)_{s_1}] \geqq 0.$$

Den Ausdruck rechter Hand in (2) werden wir demnach vergrössern, wenn wir daselbst in dem ersten Integrale für f seinen grössten Werth G, in dem zweiten, abzuziehenden, dagegen seinen kleinsten Werth K eintreten lassen. Es ist daher

$$(4)\quad f'_{s_1} - f'_{s_2} \leqq G \cdot \frac{1}{h\pi}\int_\alpha [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] - K \cdot \frac{1}{h\pi}\int_\beta [(d\beta)_{s_2} - (d\beta)_{s_1}].$$

Nach Formel (10′) pag. 9 ist nun aber $w_{s_1} = w_{s_2}$ (nämlich $= 1$), d. i.

$$\frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_{s_1} = \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_{s_2}$$

oder

$$\frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha (d\alpha)_{s_1} + \int_\beta (d\beta)_{s_1}\right\} = \frac{1}{h\pi}\left\{\int_\alpha (d\alpha)_{s_2} + \int_\beta (d\beta)_{s_2}\right\},$$

*) Bei dieser Ausdrucksweise ist wiederum die scheinbare Grösse eines Elementes $d\sigma$ von einem Punkte p aus nicht absolut gerechnet gedacht, sondern positiv oder negativ, je nachdem ein in p gedachter Beobachter auf die innere oder äussere Seite von $d\sigma$ hinblickt [vgl. pag. 7].

woraus sich weiter sofort die einfache Beziehung

$$\frac{1}{h\pi}\int_{\alpha}[(d\alpha)_{s_1}-(d\alpha)_{s_2}]=\frac{1}{h\pi}\int_{\beta}[(d\beta)_{s_2}-(d\beta)_{s_1}] \tag{5}$$

ergiebt. — Den gemeinsamen Werth dieser beiden Ausdrücke wollen wir nun abkürzend mit $D(s_1, s_2)$ bezeichnen; dann können wir die Formel (4) in die folgende einfache Gestalt versetzen:

$$f'_{s_1}-f'_{s_2}\leqq(G-K)\cdot D(s_1, s_2). \tag{6}$$

Die hier eingeführte Function $D(s_1, s_2)$ will ich nun kurz bezeichnen als die *Oeffnungsfunction* von σ in Bezug auf die Pole s_1 und s_2.*) Wir können dieselbe dann folgendermassen definiren:

Man markire auf der gegebenen Curve oder Fläche σ zwei beliebige Punkte s_1 und s_2 und theile sodann σ in der Weise in zwei Theile α und β, dass man zum Theile α alle Elemente $d\sigma$ rechnet, welche von s_1 aus grösser erscheinen als von s_2 aus, zum Theile β aber alle übrigen. — Alsdann verstehn wir unter der Oeffnungsfunction der Curve oder Fläche σ mit Bezug auf s_1 und s_2 als Pole das folgende über den Theil α hinerstreckte Integral:

$$D(s_1, s_2)=\frac{1}{h\pi}\int[(d\alpha)_{s_1}-(d\alpha)_{s_2}]. — \tag{7}$$

Aus dieser Definition geht unmittelbar hervor, dass $D(s_1, s_2)$ wirklich *eine Function lediglich der Lage von s_1 und s_2* ist, denn auch das Integrationsgebiet α ist, ausser natürlich von der Beschaffenheit von σ, nur noch abhängig von der Lage dieser beiden Punkte.

Ferner ist aus jener Definition sofort ersichtlich, dass $D(s_1, s_2)$ eine *wesentlich positive*, d. h. niemals negative Function ist, und endlich, dass diese Function verschwindet, wenn beide Pole zusammenfallen: es ist

$$D(s, s)=0. \tag{8}$$

Es sei sogleich wegen späterer Anwendungen bemerkt, dass dies im Allgemeinen die einzige Art ist, die Oeffnungsfunction zum Verschwinden zu bringen. Sie kann als Summe von lauter positiven Gliedern nur noch dann verschwinden, wenn diese Glieder einzeln sämmtlich zu 0 werden, d. h., wie man wohl leicht übersieht, wenn von den beiden auf σ (9) gelegenen Punkten s_1 und s_2 aus *sämmtliche* Elemente $d\sigma$ gleich gross erscheinen; das erfordert aber eine ganz besondere Beschaffenheit der vorgelegten Curve oder Fläche σ [vgl. weiter unten § 7 und § 10]. —

Die an dieser Stelle für uns wichtigste Eigenschaft der Oeffnungsfunction ist nun aber in der Formel (6) enthalten. Diese besagt, dass

*) Dieser Name dürfte sich darum einigermassen empfehlen, weil man die Grössen $(d\sigma)_p$ [vgl. (2) pag. 7], welche in der Function eine Hauptrolle spielen, stets geometrisch deuten kann als die *Oeffnungen* gewisser Winkel bezw. Kegel.

das Product aus der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ *und der Schwankung* $G - K$ *der ursprünglich auf* σ *vorgeschriebenen Function* f *eine obere Grenze bildet für die Differenz der Werthe von* f' *in den Punkten* s_1 *und* s_2.

Lassen wir nun die Pole s_1 und s_2 auf σ in andere und andere Lagen rücken, so wird die Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ im Allgemeinen andere und andere Werthe annehmen. — Den grössten aller dieser Werthe bezeichnen wir mit c. Es ist dann c die *Hilbert'sche Configurationsconstante* der vorgelegten Curve oder Fläche σ. — In der That hängt dieser Werth c nur noch ab von der Beschaffenheit, von der Configuration von σ.

Nach der *Definition dieser Constanten* c *als Maximum der Oeffnungsfunction* $D(s_1, s_2)$ [vgl. (7)] ist also

$$D(s_1, s_2) \leqq c,$$

welche Lage auch s_1 und s_2 auf σ besitzen mögen, mithin wird nach (6) die Werthdifferenz von f' in zwei solchen beliebigen Punkten s_1 und s_2 umsomehr:

$$f'_{s_1} - f'_{s_2} \leqq (G - K)\, c$$

sein, und diese Relation wird also z. B. auch dann noch gültig bleiben, wenn wir s_1 und s_2 in diejenigen beiden Punkte von σ rücken lassen, in denen die Function f' ihren grössten Werth G', bezw. ihren kleinsten Werth K' annimmt, d. h. es wird auch noch

$$G' - K' \leqq (G - K) \cdot c \tag{10}$$

sein. *Die Hilbert'sche Configurationsconstante* c *besitzt also die Eigenschaft, eine obere Grenze darzustellen für den Quotienten der Schwankungen der ursprünglich auf* σ *vorgeschriebenen Function* f *und der auf Grund derselben gebildeten Function* f' [vgl. (1)].

Das Wesentliche an diesem Resultate liegt nun darin, dass wir bei seiner Herleitung *keinerlei speciellere Voraussetzungen* über die Beschaffenheit der vorgelegten Curve oder Fläche σ, oder über den Werth der Configurationsconstanten c gemacht haben. *Dieser Satz gilt daher auch ganz allgemein, gleichgültig ob z. B. die gegebene Curve oder Fläche* σ *überall convex oder aber convex-concav ist.*

Bemerkung. — Aus den obigen Betrachtungen geht hervor, dass die Differenz $f'_{s_1} - f'_{s_2}$ ihre in (6) angegebene obere Grenze $(G - K) \cdot D(s_1, s_2)$ nur dann wirklich erreicht, wenn die vorgeschriebene Function f unstetig ist, in der Weise, dass sie auf dem Theile α von σ überall den Werth G und auf dem Theile β überall den Werth K besitzt. Dieser so definirten *unstetigen* Function können wir nun aber eine *stetige* Function f beliebig annähern; wir können somit, selbst wenn wir uns auf stetige Functionen f beschränken, die Differenz $f'_{s_1} - f'_{s_2}$ beliebig nahe an $(G - K) \cdot D(s_1, s_2)$ herandrücken, und daraus folgt, dass dieser Ausdruck die *wahre* obere

Grenze für $f'_{\alpha_1} - f'_{\alpha_2}$, und dass demgemäss auch *die Hilbert'sche Configurationsconstante c die wahre d. h. die kleinste obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen der Functionen f und f' darstellt.*

§ 3.

Die Methode des arithmetischen Mittels.

Wir schicken den Ausführungen dieses Paragraphen die folgenden Definitionen voraus [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 16 u. 21]:

I. Unter einer *Fundamentalfunction U eines von einer geschlossenen Curve oder Fläche σ begrenzten innern Gebietes* $\mathfrak{G}$ verstehn wir eine Function, welche *innerhalb* dieses Gebietes $\mathfrak{G}$ die *Haupteigenschaften* besitzt [vgl. deren Definition (3) pag. 8], und überdies auch mit ihren Randwerthen, d. i. *mit ihren Werthen auf σ in stetiger Weise zusammenhängt.*

II. Eine *Fundamentalfunction U des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *ausserhalb einer geschlossenen Curve oder Fläche σ* muss *innerhalb* dieses Gebietes $\mathfrak{A}$ ebenfalls die *Haupteigenschaften* besitzen und ebenfalls mit ihren Randwerthen, d. h. *ihren Werthen auf σ in stetiger Weise zusammenhängen,* zugleich aber auch noch zwei weitere Bedingungen erfüllen, nämlich *in allen unendlich fernen Punkten ein und denselben Werth* besitzen*), und sodann muss noch das über eine beliebige, σ umschliessende Curve oder Fläche ω hinerstreckte *Integral* $\int \frac{\partial U}{\partial N} d\omega$ *verschwinden,* wenn N die innere Normale des Curven- oder Flächenelementes $d\omega$ bedeutet.

Von solchen *Fundamentalfunctionen* gilt nun der Satz, dass sie *durch Angabe ihrer Randwerthe eindeutig bestimmt* sind, d. h. es giebt nicht zwei verschiedene Fundamentalfunctionen eines Gebietes, die auf dessen Begrenzung ein und dieselben Werthe besitzen, wie sich das leicht, am einfachsten wohl mit Hilfe der *Green'*schen Sätze, beweisen lässt.

Eine schwierigere, aber nicht minder wichtige Frage ist die, ob man diese Randwerthe ganz willkürlich wählen darf, oder genauer ausgedrückt, ob es stets, wie man sich auch auf der Begrenzung eines Gebietes eine

*) Dieser Werth braucht durchaus nicht gleich ∞ oder 0 zu sein; darin unterscheiden sich eben diese *Fundamentalfunctionen U* von den wohl schlechthin als *Potentialfunctionen* bezeichneten Functionen V, welche im Unendlichen wie $M \cdot \log \frac{1}{E}$ oder $\frac{M}{E}$, d. h. wie das Potential einer Masse M gleich ∞ bezw. 0 werden, und welche auch nicht die letzte Bedingung erfüllen, für welche vielmehr $\int \frac{\partial V}{\partial N} d\omega$ gleich $2h\pi M$ wird.

Function vorgeschrieben denken mag, eine Fundamentalfunction jenes Gebietes giebt, welche am Rande mit jener Function übereinstimmt.

Einer der ersten, der diese *Frage nach der Existenz einer Fundamentalfunction bei beliebig vorgeschriebenen Randwerthen* aufwarf, war *Dirichlet*. — Er beantwortete sie bejahend, doch ist der Beweis, den er für diese seine Behauptung in dem berühmten *Dirichlet'schen Princip* gab, später als nicht stichhaltig erkannt worden.

Strenge Beweise für die Existenz solcher Fundamentalfunctionen haben erst 1869 und 1870 *H. A. Schwarz**) und *C. Neumann* und in neuerer Zeit *Poincaré* in seiner „méthode de balayage"**) geliefert.

Unter diesen Methoden beansprucht wohl, wie schon erwähnt, die von *C. Neumann* angegebene „Methode des arithmetischen Mittels"***) aus dem Grunde das grösste Interesse, weil sie nicht nur die *Existenz* der gesuchten Fundamentalfunction sicherstellt, sondern unter gewissen, weiter unten zu besprechenden Einschränkungen auch die Aufgabe löst, *die Fundamentalfunctionen des innern, sowie des äusseren Gebietes einer geschlossenen Curve oder Fläche σ aus ihren Randwerthen wirklich herzustellen*, sie liefert uns nämlich einen fertigen analytischen Ausdruck für diese gesuchten Functionen, und zwar verlangt sie zu diesem Zweck von uns die Ausführung der folgenden sogleich anzugebenden Operationen:

Methode des arithmetischen Mittels. — *Man bilde auf Grund der gegebenen Randwerthe f der gesuchten Fundamentalfunctionen successive die folgenden Functionen:*

$$
\begin{aligned}
W_p &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_p\,, & W_s &= f_s'\,,\\
W_p' &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma' (d\sigma)_p\,, & W_s' &= f_s''\,,\\
W_p'' &= \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma'' (d\sigma)_p\,, & W_s'' &= f_s'''\\
&\text{etc.} \quad \text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

---

*) *H. A. Schwarz:* „Zur Theorie der Abbildung", sowie vor Allem: „Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen". Ges. mathem. Abhandlungen, Berlin 1890, Band II, pag. 108 bezw. 144.

**) *H. Poincaré:* „Sur les équations aux derivées partielles de la Physique mathématique". Americ. Journal of Mathematics, Baltimore 1890, vol. XII, pag. 211, daselbst § 1.

***) Zum ersten Male veröffentlicht ist diese Methode in den Berichten der Kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 1870 [vgl. die Berichte über die Sitzungen vom 21. April und 31. Oktober 1870]. — Wegen der ausführlicheren Darstellungen, welche die Methode später durch *C. Neumann* gefunden hat, vgl. oben die Anmerkung pag. 1.

d. h. man bilde auf Grund von f die zugehörige Function W_p, [vgl. (1) pag. 7], bezeichne deren Randwerthe W_s mit f_s' und bilde auf Grund dieser neuen Randfunction f' entsprechend die nächstfolgende Function W_p', bezeichne deren Randwerthe W_s' mit f_s'' und fahre in dieser Weise fort. — Dann werden die so definirten Randfunctionen $f_s^{(n)}$ mit wachsendem n gleichmässig gegen eine Constante, die Convergenzconstante C, convergiren.

Sodann bilde man die beiden folgenden unendlichen Reihen

$$(2a) \qquad \xi_s = (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \cdots,$$

$$(2i) \qquad \eta_s = (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{IV} - f_s^{V}) + \cdots$$

und auf Grund der so definirten Functionen ξ_s und η_s die Ausdrücke:

$$(3a) \quad \Phi_a = C + \frac{1}{h\pi}\int \xi_\sigma (d\sigma)_a = C - [W_a + W_a' + W_a'' + W_a''' + \cdots],$$

$$(3i) \quad \Psi_i = C + \frac{1}{h\pi}\int \eta_\sigma (d\sigma)_i = C + [(W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \cdots].$$

Es stellen alsdann die durch diese Neumann'schen Reihen definirten Functionen Φ_a und Ψ_i diejenigen Fundamentalfunctionen des äussern und innern Gebiets der verlangten geschlossenen Curve oder Fläche σ dar, welche auf σ die Werthe f, d. i. die vorgeschriebenen Randwerthe besitzen.

Auf den Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung wollen wir hier nicht näher eingehn; derselbe ist in aller Strenge von *C. Neumann* geführt worden [vgl. Unters. pag. 192—205, und Abhandl. I, pag. 77—88] unter der einzigen Voraussetzung, dass das angegebene Verfahren convergire. — Auf diesen einen Punkt, auf den *Convergenzbeweis* allein wollen wir daher unser Augenmerk richten. Von *C. Neumann* selber ist er allgemein geführt allein für den Fall einer *nirgends concaven Curve oder Fläche* σ. — Wir werden ihn nun in § 5 in etwas weiterem Umfange führen, wir werden daselbst den *„Hilbert'schen Satz"* beweisen, welcher behauptet, dass die angegebene *Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels convergent ist, sobald nur die Configurationsconstante c der begrenzenden Curve oder Fläche σ kleiner als 1 ist**).

Doch bevor ich auf den Beweis dieses Satzes eingehe, will ich noch im folgenden Paragraphen einen Hilfssatz beweisen, der für unsere weiteren Beweisführungen zwar nicht unumgänglich nothwendig ist, sie aber

---

*) Dass dies thatsächlich eine Erweiterung des *Neumann'schen* Criteriums ist, d. h. dass unter den Curven und Flächen, welche diese Bedingung erfüllen, die nirgend concaven als specielle Fälle enthalten sind, das soll weiter unten in § 6 näher ausgeführt werden [vgl. pag. 27].

wesentlich abkürzt, ein Satz, der übrigens auch an und für sich einiges Interesse beanspruchen dürfte, da er uns einen tieferen Einblick in das Wesen der aufeinanderfolgenden Functionen $f_s^{(n)}$ gestattet.

§ 4.

Beweis eines Hilfssatzes. Folgerungen.

Die in § 1 ausführlicher behandelte Function W_p dürfen wir nicht etwa ohne Weiteres als Fundamentalfunction der Gebiete innerhalb und ausserhalb σ ansprechen; denn erfüllt sie auch die übrigen an solche Functionen gestellten Anforderungen, so hängt sie doch nicht stetig mit ihren Randwerthen W_s zusammen, die Werthe W_i innerhalb σ nähern sich vielmehr am Rande der Function $W_s + f_s$ und die Werthe W_a ausserhalb σ der Function $W_s - f_s$ [vgl. (7) pag. 8]. Wir können daher nur sagen:

Die Werthe W_i und $W_s + f_s$ bilden in ihrer Gesammtheit eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{I}$ innerhalb der geschlossenen Curve oder Fläche σ — und entsprechend die Werthe W_a und $W_s - f_s$ eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ ausserhalb σ.

Nun ist eine Fundamentalfunction entweder innerhalb ihres ganzen Gebietes constant, d. h. hat überall denselben Werth, oder aber sie nimmt ihren grössten und kleinsten Werth nur auf der dieses Gebiet begrenzenden Curve oder Fläche σ, *nicht aber etwa im Unendlichen* an [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 20 u. 26].

Die zuletzt betrachtete Fundamentalfunction W_a, $W_s - f_s$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ hat nun im Unendlichen den Werth 0 [vgl. (5) pag. 8]; es bleiben daher nach dem soeben Gesagten nur diese beiden Möglichkeiten:

(1a) *entweder* besitzt jene Function überall im äusseren Gebiete $\mathfrak{A}$, also auch auf σ den Werth 0,

(1b) *oder aber* sie besitzt auf σ sowohl Werthe, die grösser als 0, als auch solche, die kleiner als 0 sind.

Diese Werthe der Function auf σ sind nun aber nach dem obigen Satze enthalten unter der Form $W_s - f_s$ oder $f_s' - f_s$ [vgl. (1), pag. 14]. — Wir gelangen somit zu dem Resultate, dass entweder, nämlich im Falle (1a) für *alle* Punkte s auf σ

$$f_s' - f_s = 0, \qquad f_s' = f_s \tag{2a}$$

ist, oder aber, dass es, nämlich im Falle (1b), auf σ sicher zwei Punkte s_1 und s_2 giebt, derart, dass

$$f_{s_1}' - f_{s_1} > 0 \quad \text{dagegen} \quad f_{s_2}' - f_{s_2} < 0$$

ist. Nun sind aber f und f' *stetige* Functionen [vgl. (8) pag. 9], und Gleiches

gilt daher auch von der Differenz $f' - f$. Eine stetige Function nimmt nun aber alle Werthe zwischen irgend zweien ihrer Werthe wirklich an, und es wird daher diese Differenz auch den zwischen $f'_{s_1} - f_{s_1}$ und $f'_{s_2} - f_{s_2}$ gelegenen Werth 0 annehmen, d. h. es wird auch im Falle (1b) wenigstens *gewisse* Punkte s auf σ geben, in denen

$$f'_s - f_s = 0, \qquad f'_s = f_s \tag{2b}$$

ist. Wir gelangen somit zu dem Resultate, dass *stets* (d. h. im Falle (1a), sowie (1b)) *die Functionen f und f' gemeinsame Werthe besitzen*, oder genauer ausgedrückt:

Es lassen sich stets solche Werthe finden, welche in gleicher Weise anzutreffen sind unter den Functionswerthen der ursprünglich vorgeschriebenen Function f_s, sowie unter den Werthen der auf Grund von f_s gebildeten Function f'_s [vgl. (1), pag. 9].

Dieser Satz stellt einen Specialfall des zu beweisenden allgemeinen Satzes dar. — Zu diesem gelangen wir, wenn wir, analog wie wir vorhin von der Fundamentalfunction W_a, $f'_s - f_s$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ ausgingen, so jetzt ausgehn von einem Aggregat mehrerer solcher Functionen, von der Summe $W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)} + W_a^{(n+2)} + \cdots + W_a^{(n+\varrho-1)}$, welche ebenfalls im Unendlichen verschwindet, und zusammen mit den Werthen $(f_s^{(n+1)} - f_s^{(n)}) + (f_s^{(n+2)} - f_s^{(n+1)}) + \cdots + (f_s^{(n+\varrho)} - f_s^{(n+\varrho-1)})$, d. h. mit den Werthen $f_s^{(n+\varrho)} - f_s^{(n)}$, eine Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ bildet. — Wir gelangen dann, wie man wohl leicht übersieht, durch genau dieselben Schlüsse, die wir oben anwandten, zu dem Resultate, dass es *stets* auf σ solche Punkte s giebt, in denen

$$f_s^{(n+\varrho)} - f_s^{(n)} = 0, \qquad f_s^{(n+\varrho)} = f_s^{(n)} \tag{3}$$

ist, oder dass *die Functionen $f^{(n+\varrho)}$ und $f^{(n)}$ stets gemeinsame Werthe haben.* — Dieses Resultat können wir so aussprechen:*)

Hilfssatz. — *Wie wir auch aus der Reihe der unendlich vielen in* (1) *pag.* 14 *definirten aufeinanderfolgenden Functionen f_s, f'_s, f''_s, f'''_s, etc. zwei beliebige $f_s^{(n)}$ und $f_s^{(n+\varrho)}$ herausgreifen mögen, stets werden sich solche Werthe finden lassen, die sowohl anzutreffen sind unter den Functionswerthen der einen, sowie der andern dieser beiden Functionen.* —

Wir greifen jetzt zurück auf die Gleichungen (2a) und (2b) und leiten aus ihnen in leicht ersichtlicher Weise die folgenden beiden Ungleichungen ab:

$$G' \geqq K, \qquad K' \leqq G, \tag{4}$$

und entsprechend aus (3), wenn wir noch allgemein den grössten und den

*) Wir sehen dabei ab von dem für uns unwesentlichen Umstande, dass diese gemeinsamen Werthe auch theilweise *in denselben Punkten von σ* anzutreffen sind.

kleinsten Werth der Function $f_s^{(n)}$ mit $G^{(n)}$, bezw. mit $K^{(n)}$ bezeichnen, diese beiden allgemeinen Ungleichungen:

$$G^{(n+q)} \geqq K^{(n)}, \qquad K^{(n+q)} \leqq G^{(n)}. \tag{5}$$

Diese können wir dann geradezu als den analytischen Ausdruck des soeben ausgesprochenen Satzes ansehn, wie das wohl am einfachsten aus der folgenden geometrischen Darstellungsweise zu ersehen ist.

Wir tragen, z. B. im Specialfalle (4) der Ungleichungen (5), auf zwei benachbarten Ordinaten eines rechtwinkligen Coordinatensystems die Werthe K und G, bezw. K' nnd G' ab. Dann können wir die Ordinaten der zwischen K und G bezw. K' und G' gelegenen Punkte ansehn als Repräsentanten der Functionswerthe von f_s bezw. f_s'. — Die Bedingungen (4) verlangen dann, dass sich diese beiden Strecken KG und $K'G'$ übereinander schieben, dass ihnen Punkte mit gleichen Ordinaten angehören, d. h. sie besagen, dass thatsächlich die Functionen f_s und f_s' gemeinsame Werthe besitzen. q. e. d.

Um nun weiterzugehn, beachten wir, dass diesen Bedingungen (4) im Ganzen auf vier verschiedene Arten genügt werden kann, dass dieses Uebereinandergreifen der Strecken KG und $K'G'$ auf vier verschiedene Arten stattfinden kann, welche die folgenden, wohl auch ohne weitere Erklärung verständlichen Schemata zur Anschauung bringen:

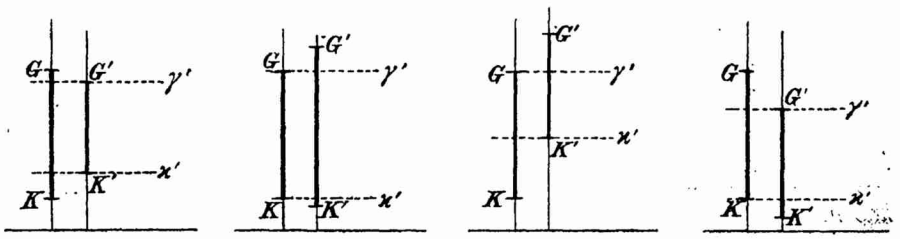

Fig. 2.

Diesen Figuren entnehmen wir sofort, dass wenn wir den grössten und den kleinsten der den beiden Functionen f_s und f_s' *gemeinsamen* Werthe mit γ' und $\varkappa'$ bezeichnen, stets

$$\gamma' = G \text{ oder } G', \qquad \varkappa' = K \text{ oder } K' \tag{6}$$

ist. — Nunmehr ziehen wir noch die Function f_s'' mit in den Bereich unserer Betrachtungen. Da sie nach unserem ersten Satze sowohl gemeinsame Werthe mit f_s, wie auch mit f_s' haben muss, so entsprechen ihre extremen Werthe G'' und K'', eben nach (5), den Bedingungen

$$\begin{matrix} G'' \geqq K \\ K'' \leqq G \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G'' \geqq K' \\ K'' \leqq G', \end{matrix}$$

also zufolge (6) sicherlich auch den Relationen

$$G'' \geqq \varkappa', \qquad K'' \leqq \gamma', \tag{7}$$

welche besagen, dass die Intervalle $K''G''$ und $\varkappa'\gamma'$ sich theilweise überdecken, dass f_s'' somit auch Werthe annimmt, die zwischen $\varkappa'$ und γ' gelegen sind, die also sowohl unter den Werthen von f_s, als auch von f_s' anzutreffen sind, d. h. *die drei Functionen f_s, f_s' und f_s'' besitzen gleichzeitig ihnen allen dreien gemeinsame Werthe.*

Den grössten und kleinsten dieser Werthe, welche also den Intervallen $\varkappa'\gamma'$ und $K''G''$ gleichzeitig angehören, bezeichnen wir nun mit γ'' und $\varkappa''$. — Dann folgt, ähnlich wie oben, aus der geometrischen Darstellung, dass:

$$\gamma'' = \gamma' \text{ oder } G'', \qquad \varkappa'' = \varkappa' \text{ oder } K'',$$

oder aber, unter Berücksichtigung der Werthe (6) von γ' und $\varkappa'$, dass:

$$\gamma'' = G \text{ oder } G' \text{ oder } G'', \qquad \varkappa'' = K \text{ oder } K' \text{ oder } K'' \tag{8}$$

— Die nächstfolgende Function f_s''' hat nun gemeinsame Werthe sowohl mit f_s wie mit f_s', wie auch mit f_s''; es ist daher [vgl. (5)]

$$\begin{matrix} G''' \geqq K \\ K''' \leqq G \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G''' \geqq K' \\ K''' \leqq G' \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} G''' \geqq K'', \\ K''' \leqq G'', \end{matrix}$$

d. h. nach (8) sicherlich auch:

$$G''' \geqq \varkappa'', \qquad K''' \leqq \gamma'', \tag{9}$$

woraus wieder folgt, dass die Werthe von f_s''' wenigstens theilweise in dem Intervall $\varkappa''\gamma''$ der den Functionen f_s, f_s' und f_s'' gemeinsamen Werthe enthalten sind, dass es somit *Werthe giebt, die allen vier Functionen f_s, f_s', f_s'' und f_s''' gleichzeitig gemeinsam sind.*

Mit dieser Schlussweise können wir nun fortfahren; wir kommen dann zu dem Resultate, dass es bei ganz beliebigem n stets ein Werthintervall $\varkappa^{(n)}\gamma^{(n)}$ giebt, welches *gleichzeitig* den Werthen der $n+1$ Functionen $f_s, f_s', f_s'', \cdots, f_s^{(n)}$ angehört. — Da dieses Intervall $\varkappa^{(n)}\gamma^{(n)}$ seiner Natur nach nun aber mit wachsendem n niemals grösser, wohl aber kleiner werden kann, so ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass es sich schliesslich auf einen einzigen Punkt zusammenzieht, und wir werden daher unser Resultat nur so aussprechen dürfen:

Erste Folgerung. — *Es giebt sicher mindestens einen Werth, welcher anzutreffen ist unter den Werthen der sämmtlichen aufeinanderfolgenden Functionen f_s, f_s', f_s'', etc.* [vgl. (1), pag. 14].

Sollten sich nun diese Functionen schliesslich immer weniger und weniger von einem bestimmten Werthe unterscheiden, also in unserer früheren Ausdrucksweise eine *Convergenzconstante* besitzen [vgl. pag. 15],

so kann diese allein augenscheinlich jenen einzigen allen Functionen gemeinsamen Werth darstellen und wir gelangen somit zu folgendem Satze:

Zweite Folgerung. — *Vorausgesetzt die aufeinanderfolgenden Functionen $f_\sigma, f_\sigma', f_\sigma''$, etc. besässen eine Convergenzconstante, so ist deren Werth sicherlich enthalten unter den Werthen einer jeden dieser Functionen, also jedenfalls auch unter den Werthen der ursprünglich auf der vorgelegten Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Function f_σ.*

§ 5.

Beweis des *Hilbert*'schen Satzes.

Wir wenden uns nunmehr zum Beweise des schon in § 3 erwähnten *Hilbert*'schen Satzes. — Demgemäss nehmen wir im Folgenden immer an, die betrachtete Curve oder Fläche σ habe die Eigenschaft, dass ihre Configurationsconstante [vgl. § 2, pag. 12]

$$c < 1 \tag{1}$$

sei und zwar wirklich *kleiner* als 1 (nicht nur $\leqq 1$). Unter dieser Voraussetzung wollen wir sodann die Convergenz der in § 3 angegebenen Methode des arithmetischen Mittels beweisen.

Dieser Convergenzbeweis wird naturgemäss in zwei getrennte Theile zerfallen, nämlich zunächst in den Beweis für die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten C, und sodann in den Beweis für die Convergenz der Reihen (3a) und (3i) pag. 15, oder, wovon diese eine blosse Folge ist, die *gleichmässige* Convergenz der Reihen (2a) und (2i) pag. 15. — Von diesen beiden Theilen des Convergenzbeweises macht die weitaus grösseren Schwierigkeiten der erstere, der *Beweis für die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten C;* auf diesen Beweis wollen wir daher zunächst eingehn. Nach Absolvirung dieses Beweises wird sich die Convergenz der Reihen (2a) und (2i) pag. 15 so gut wie von selbst ergeben.

Wir knüpfen an die Ungleichungen (5) pag. 18 an und bringen sie im Specialfalle $n = 0$ zur Anwendung, wo sie die folgende Gestalt annehmen:

$$K^{(q)} \leqq G, \qquad G^{(q)} \geqq K.$$

Wir addiren, bezw. subtrahiren jetzt beiderseits $G^{(q)} - K^{(q)}$, um zu erhalten:

$$G^{(q)} \leqq G + (G^{(q)} - K^{(q)}), \qquad K^{(q)} \geqq K - (G^{(q)} - K^{(q)}). \tag{2}$$

Nun fanden wir ganz allgemein in (10) pag. 12:

$$G' - K' \leqq (G - K) \cdot c.$$

Da aber durch genau dieselben Operationen, durch die f' aus f entstand, auch f'' aus f' hervorgeht, und weiter f''' aus f'' u. s. w. f. [vgl. (1) pag. 14],

so wird die nämliche Relation zwischen den Schwankungen je zweier aufeinanderfolgender Functionen bestehn, d. h. es folgt analog:

$$G'' - K'' \leqq (G' - K') \cdot c, \qquad G''' - K''' \leqq (G'' - K'') \cdot c, \quad \text{u. s. w. f.,}$$

und hieraus ergiebt sich das folgende Formelsystem:

$$(3) \qquad \begin{cases} G' - K' \leqq (G - K) \cdot c, \\ G'' - K'' \leqq (G - K) \cdot c^2, \\ G''' - K''' \leqq (G - K) \cdot c^3, \\ G^{IV} - K^{IV} \leqq (G - K) \cdot c^4, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ G^{(n)} - K^{(n)} \leqq (G - K) \cdot c^n. \end{cases}$$

Mit Rücksicht hierauf nehmen dann die Formeln (2) die Gestalt an:

$$G^{(q)} \leqq G + (G - K) \cdot c^q, \qquad K^{(q)} \geqq K - (G - K) \cdot c^q,$$

woraus weiter, da unserer Voraussetzung (1) zufolge $c < 1$ ist, *a fortiori*

$$(4) \qquad G^{(q)} \leqq G + (G - K), \qquad K^{(q)} \geqq K - (G - K)$$

folgt, oder aber, wenn wir jetzt noch der Gleichförmigkeit halber die ganz beliebig gewählte Zahl q mit n bezeichnen:

$$(5) \qquad G^{(n)} \leqq 2G - K, \qquad K^{(n)} \geqq 2K - G.$$

Damit haben wir zunächst das Resultat erhalten, dass *die sämmtlichen Functionen* $f^{(n)}$ *stets zwischen den endlichen Grenzen* $2G - K$ *und* $2K - G$ *bleiben*, niemals also etwa, wie gross wir n auch wählen mögen, unendlich gross werden können.

Nun folgt weiter aus der letzten Formel (3) unter Rücksicht auf unsere Voraussetzung $c < 1$

$$\lim_{n=\infty} (G^{(n)} - K^{(n)}) \leqq 0.$$

oder, da $G^{(n)} - K^{(n)}$ eine wesentlich positive Grösse ist, d. h. *niemals negativ* werden kann:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} (G^{(n)} - K^{(n)}) = 0,$$

d. h. die Schwankungen der aufeinanderfolgenden Functionen f, f', f'', f''', etc. werden immer kleiner bis zur 0 herab; je grösser n ist, umsoweniger unterscheidet sich also $f^{(n)}$ von einer Constanten, die aufeinanderfolgenden Functionen gehn also schliesslich in Constanten über, die nach unseren obigen Feststellungen [vgl. (5)] sicher zwischen endlichen Grenzen liegen müssen. — Damit allein ist aber noch keineswegs der Beweis erbracht, dass diese Functionen wirklich eine endliche Convergenzconstante besitzen, denn wir haben bisher nur bewiesen, dass sich bei hinreichend grossem n die einzelnen Functionen $f^{(n)}$ beliebig wenig von Constanten unter-

scheiden, aber noch nicht, dass diese einzelnen Constanten alle einander gleich sind. — Dies ergiebt sich erst, wenn wir den im vorigen Paragraphen bewiesenen Satz zu Hilfe nehmen, dass die sämmtlichen aufeinanderfolgenden Functionen $f, f', f'',$ etc. sicher einen gemeinsamen Werth haben müssen. Dieser Satz schliesst nämlich den Fall aus, dass die Werthe der Constanten, denen sich schliesslich die Functionen $f^{(n)}$ nähern, sich von Function zu Function ändern, z. B. den Fall, dass sich die Functionen $f^{(2\nu)}$ und $f^{(2\nu+1)}$ mit wachsendem ν zwei verschiedenen Constanten nähern. — Es bleibt somit nur die Möglichkeit, dass thatsächlich die Functionen f, f', f'', f''', etc. sämmtlich gegen ein und dieselbe Constante convergiren, dass sie eine *Convergensconstante* besitzen. q. e. d.

Doch um jeden Zweifel an der Richtigkeit dieser Ausführungen zu beseitigen, wollen wir noch einen Augenblick bei diesem Gegenstande verweilen, und die Sachlage mehr an der Hand mathematischer Formeln prüfen.

Wie wir, ausgehend von der ursprünglich auf σ vorgeschriebenen Function f, zu dem in den Formeln (4) enthaltenen Resultate gelangten, so können wir auch von einer der späteren Functionen, z. B. von $f^{(n)}$ ausgehn, wo n eine beliebige aus der Reihe der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ bedeutet, und werden dann zu dem analogen Resultate gelangen und die folgenden Ungleichungen erhalten:

$$G^{(n+q)} \leqq G^{(n)} + (G^{(n)} - K^{(n)}), \qquad K^{(n+q)} \geqq K^{(n)} - (G^{(n)} - K^{(n)}),$$

d. i.

$$G^{(n+q)} - G^{(n)} \leqq G^{(n)} - K^{(n)}, \qquad K^{(n)} - K^{(n+q)} \leqq G^{(n)} - K^{(n)}.$$

Addiren wir jetzt in den beiden Relationen beiderseits $G^{(n)} - K^{(n)}$, so folgt

$$G^{(n+q)} - K^{(n)} \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)}), \qquad G^{(n)} - K^{(n+q)} \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)}).$$

In diesen Ungleichungen sind nun aber die Ausdrücke linkerhand augenscheinlich obere Grenzen für $f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)} = u$, bezw. $f_s^{(n)} - f_{s'}^{(n+q)} = -u$, wenn s und s' zwei *ganz beliebige Punkte auf* σ bedeuten. Es folgt also, dass:

$$u \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)}) \quad \text{und} \quad -u \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)})$$

ist, sicherlich also auch, dass:

$$\text{abs } u \text{ d. i. abs } (f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)}) \leqq 2(G^{(n)} - K^{(n)})$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (3):

$$\text{(7)} \qquad \text{abs } (f_{s'}^{(n+q)} - f_s^{(n)}) \leqq 2(G - K) \cdot c^n.$$

Da nun unserer Voraussetzung (1) zufolge, c ein echter Bruch ist, so besagt diese Relation (7), dass wir durch Annahme eines genügend grossen n es stets erreichen können, dass sich die *sämmtlichen Functionswerthe aller auf* $f^{(n)}$ *folgenden Functionen* $f^{(n+q)}$ $(q = 1, 2, 3, \cdots)$ von irgend einem

Werthe $f_s^{(n)}$ dieser Function $f^{(n)}$ beliebig wenig unterscheiden. — Das heisst aber nichts anderes, als dass, wie wir beweisen wollten, die sämmtlichen *aufeinanderfolgenden Functionen* f, f', f'', f''', *etc. in allen Punkten von* σ *gleichmässig gegen ein und dieselbe, nach* (5) *sicher endliche, Constante* C convergiren, sodass wir also schreiben können:

$$\lim_{n=\infty} f^{(n)} = C \qquad \text{oder kürzer} \qquad f^{(\infty)} = C. \tag{8}$$

Diese so definirte Constante C wollen wir nun also die *Convergenzconstante* jener aufeinanderfolgenden Functionen, oder kurz die der ursprünglich auf der Curve oder Fläche σ vorgeschriebenen Function f zugehörige Convergenzconstante nennen.

Wir haben damit also den Beweis für die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten in aller Strenge geliefert. — Um sodann auch noch *die Convergenz der Reihen* (2a) *und* (2i) pag. 15, d. i. der beiden Reihen

$$\xi_s = (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \cdots,$$
$$\eta_s = (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{IV} - f_s^{V}) + \cdots$$

zu beweisen, brauchen wir jetzt nur die Formel (7) auf die speciellen Fälle $q = \infty$ bezw. $q = 1$ und $s' = s$ anzuwenden; wir erhalten dann unter Rücksicht auf (8):

$$\text{abs}\,(C - f_s^{(n)}) \leqq 2(G - K)c^n \quad \text{bezw.} \quad \text{abs}\,(f_s^{(n)} - f_s^{(n+1)}) \leqq 2(G - K)c^n,$$

woraus sofort die absolute Convergenz der Reihen ξ_s und η_s folgt, ja sogar noch weiter folgt, dass diese *Reihen gleichmässig in allen Punkten* s *von* σ *convergiren.*

Wir haben jetzt somit sowohl die Existenz einer endlichen Convergenzconstanten, als auch die Convergenz der Reihen ξ_s und η_s, und damit überhaupt die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels bewiesen, unter der alleinigen Voraussetzung (1), dass die Configurationsconstante c der gegebenen Curve oder Fläche σ *kleiner als* 1 sei. — Das ist aber die Behauptung des schon früher (§ 3) erwähnten *Hilbert*'schen Satzes. Wir haben somit diesen Satz jetzt in aller Strenge bewiesen. Er lautet, um ihn nochmals auszusprechen, folgendermassen:

Hilbert'scher Satz. — *Die Methode des arithmetischen Mittels [vgl. pag. 14] ist sicher convergent, sobald nur die Configurationsconstante* c *der betrachteten Curve oder Fläche* σ *wirklich kleiner als* 1 *ist.*

Wieder ist hierbei besonders hervorzuheben, dass wir *keinerlei specielle Annahmen* über die Beschaffenheit der betrachteten Curve oder Fläche σ gemacht haben, im Besonderen auch die Frage, ob σ nirgends concav, oder aber convex-concav sei, ganz offen gelassen haben.

§ 6.

Ueber den Zusammenhang der *Hilbert*'schen und der *Neumann*'schen Configurationsconstanten. Folgerungen.

Die Oeffnungsfunction einer Curve oder Fläche σ in Bezug auf zwei Punkte s_1 und s_2 [vgl. (7) pag. 11]

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{\hbar\pi}\left\{\int_\alpha (d\alpha)_{s_1} - \int_\alpha (d\alpha)_{s_2}\right\} \tag{1}$$

lässt sich noch in eine andere Form versetzen, die namentlich darum beachtenswerth ist, weil sie sofort den Zusammenhang zwischen der *Hilbert*'schen und der *Neumann*'schen Configurationsconstanten erkennen lässt.*)

Nach der Formel (10′) pag. 9 ist

$$w_{s_1} = 1, \quad \text{d. i.} \quad \frac{1}{\hbar\pi}\int (d\sigma)_{s_1} = 1$$

oder aber es folgt, wenn wir uns σ wieder in die beiden Theile α und β zerlegt denken [vgl. (3) pag. 10]:

$$0 = 1 - \frac{1}{\hbar\pi}\left\{\int_\alpha (d\alpha)_{s_1} + \int_\beta (d\beta)_{s_1}\right\}.$$

Addiren wir nun diese Relation zu der Gleichung (1), so erhalten wir:

$$D(s_1, s_2) = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{\hbar\pi}, \tag{2}$$

und als das Maximum dieser Function ist die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c definirt:

$$c = \text{Max.}\left\{1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{\hbar\pi}\right\}. \tag{3}$$

Vergleichen wir damit einmal die Definition der *Neumann*'schen Configurationsconstanten λ! — *C. Neumann* definirt etwa folgendermassen [vgl. z. B. Unters. pag. 172]:

„Man zerlege die gegebene Curve oder Fläche σ *in willkürlicher Weise* in zwei Theile α und β, markire überdies auf σ zwei beliebige Punkte s_1 und s_2, und bilde sodann den Ausdruck:

$$\xi = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2\hbar\pi}. \tag{4}$$

*) Wegen einer weiteren, besonders einfachen, Darstellungsform für die Oeffnungsfunction vgl. den Anfang von § 11, daselbst Formel (2) pag. 46.

„Der Werth dieses Ausdrucks wird dann abhängen einmal von der Eintheilung von σ in die Theile α und β und sodann von der Lage der Punkte s_1 und s_2. — Der grösste aller Werthe, deren ζ bei beliebiger Abänderung der Eintheilung von σ, sowie der Lage von s_1 und s_2 fähig ist, ist dann die Configurationsconstante λ von σ, also

$$\lambda = \text{Max.} \left\{ 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2h\pi} \right\}. \text{“} \quad (5)$$

Um nun zu diesem Maximum von ζ zu gelangen, können wir augenscheinlich so verfahren: Wir suchen zunächst *bei festem aber unbestimmtem* s_1 *und* s_2 diejenige Eintheilung von σ, für welche ζ den grössten Werth annimmt, machen in dieser Weise also die Eintheilung abhängig von s_1 und s_2, und verwandeln somit ζ in eine Function $\zeta(s_1, s_2)$ *allein der Lage von* s_1 *und* s_2 — und suchen alsdann das Maximum dieser Function $\zeta(s_1, s_2)$ auf. (6)

Bestimmen wir nun aber wirklich bei festem aber unbestimmtem s_1 und s_2 die Eintheilung von σ, für welche ζ seinen grössten Werth annimmt, so kommen wir augenscheinlich zu der *Hilbert*'schen Eintheilung (3) pag. 10; denn wollten wir etwa ein Element $d\sigma$, das von s_1 aus grösser erscheint, als von s_2, anstatt zu α zum Theile β rechnen, so würden wir augenscheinlich die Summe $\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}$ nur vergrössern, und somit ζ verkleinern [vgl. (4)]. — Es folgt somit, dass wir bei der aus der *Neumann*'schen Definition hergeleiteten Function

$$\zeta(s_1, s_2) = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2h\pi} \quad \text{[vgl. (6)]}. \quad (7)$$

unter α und β genau dieselben Theile von σ zu verstehn haben, wie bei der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$.

Beachten wir aber dies, so ist aus den Darstellungen (2) und (7) der Zusammenhang zwischen beiden Functionen sofort ersichtlich: Setzen wir

$$D(s_1, s_2) = 1 - \xi(s_1, s_2), \qquad \text{so ist} \qquad \zeta(s_1, s_2) = 1 - \frac{1}{2}\xi(s_1, s_2),$$

die Function $\zeta(s_1, s_2)$ liegt also stets in der Mitte zwischen der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ und der Zahl 1, oder: *Für jedwede Lage der Pole* s_1 *und* s_2 *auf* σ *ist die Function* $\zeta(s_1, s_2)$ *das arithmetische Mittel aus der Zahl* 1 *und der Oeffnungsfunction* $D(s_1, s_2)$; es werden demgemäss auch beide Functionen gleichzeitig, d. h. für dieselbe Lage der Pole s_1 und s_2 ihr Maximum erreichen. — Es überträgt sich also dieser Satz von den

Functionen $\xi(s_1, s_2)$ und $D(s_1, s_2)$ selber sofort auch auf ihre Maxima, d. h. nach (5) und (3) auf die Configurationsconstanten λ und c. Wir erhalten sonach das folgende Resultat:

Erster Satz. — *Die Neumann'sche Configurationsconstante λ ist stets das arithmetische Mittel zwischen der Zahl* 1 *und der Hilbert'schen Configurationsconstanten c der betreffenden Curve oder Fläche σ:*

$$\lambda = \frac{1+c}{2}. \tag{8}$$

Aus diesem Resultate wollen wir nun noch einige Schlussfolgerungen ziehn: Zunächst ergiebt sich daraus sofort folgender wichtige Satz:

Zweiter Satz. — *Die Neumann'sche und die Hilbert'sche Configurationsconstante einer beliebigen Curve oder Fläche σ sind entweder beide gleichzeitig kleiner als* 1, *oder aber beide gleich* 1, *oder endlich beide grösser als* 1; *niemals also kann die eine der Constanten grösser, die andere aber kleiner als* 1 *sein.*

Wäre es also, wie Herr *Ch. A. Noble* anzunehmen scheint, bereits vor *Hilbert* bekannt gewesen, dass die Methode des arithmetischen Mittels sicher convergirt, sobald nur die Configurationsconstante kleiner als 1 ist, so hätte die *Neumann*'sche Constante λ die Convergenz der Methode in genau demselben Umfange verbürgt, wie die *Hilbert*'sche Constante c, es würde sonach der Bereich der Fälle, in denen die Convergenz der Methode *a priori* zu verbürgen ist, durch die *Hilbert*'schen Betrachtungen gar nicht erweitert sein — das Verdienst von *Hilbert* besteht aber eben gerade darin, dass er zuerst erkannt hat, dass es thatsächlich *völlig hinreichend* für die Convergenz der Methode ist, dass die Configurationsconstante der betrachteten Curve oder Fläche σ kleiner als 1 ist — wie das im vorigen Paragraphen näher ausgeführt ist (*Hilbert*'scher Satz). —

Bei *C. Neumann* spielt noch immer die Frage eine wichtige Rolle, ob die gegebene Curve oder Fläche σ überall *convex*, oder aber convex-concav ist. Das Analogon zu dem in § 2, pag. 12 ganz allgemein bewiesenen Satz, dass die Configurationsconstante c eine obere Grenze darstellt für den Quotienten zweier aufeinanderfolgender Functionen f und f', wird dort nur für den ersteren Fall, für den Fall einer überall convexen, oder richtiger gesagt, einer nirgend concaven Curve oder Fläche σ bewiesen [vgl. Unters. pag. 183—185 und Abhandl. I, pag. 50—56] und dies ist ein wesentlicher Grund, weshalb sich *C. Neumann*, abgesehen von ganz speciellen Fällen, immer auf die Betrachtung solcher nirgends concaver Curven oder Flächen σ beschränkte, — dass er aber für sie ganz allgemein die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels beweisen konnte, das hat seinen Grund in dem folgenden von ihm bewiesenen Satze:

„Die Configurationsconstante λ einer nirgends concaven Curve oder Fläche σ ist stets wirklich kleiner als 1 (nicht etwa nur $\leqq 1$)“*),
ein Satz, den *C. Neumann* selber den Angelpunkt seiner Methode nennt.

Dieser Satz [vgl. C. N. Unters. pag. 173 und Abhandl. I, pag. 5 u. 72] lässt sich nun vermittelst unseres obigen zweiten Satzes leicht übertragen auf die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c. Es folgt so:

Dritter Satz. — *Die Hilbert'sche Configurationsconstante c einer nirgend concaven Curve oder Fläche σ ist stets wirklich kleiner als* 1 (*nicht etwa nur* $\leqq 1$).

Danach stellt sich die *Neumann*'sche Behauptung, dass die Methode des arithmetischen Mittels für nirgend concave Curven oder Flächen convergirt, jetzt also thatsächlich nur als ein *Specialfall* des *Hilbert*'schen Satzes dar [vgl. die Anmerkung pag. 15]. — Sicher ist dies freilich der bei Weitem wichtigste Specialfall. —

In ähnlicher Weise, wie wir es schon soeben einmal thaten, können wir nun vermittelst unserer beiden ersten Sätze auch noch andere von *C. Neumann* für seine Configurationsconstante λ bewiesene Sätze übertragen auf die *Hilbert*'sche Constante c. — So folgen z. B. aus zwei von *C. Neumann* in seinen „Untersuchungen“ [pag. 174—179] bewiesenen Sätzen über λ die beiden folgenden Parallelsätze:

Die Hilbert'sche Configurationsconstante c

einer nirgend concaven Curve entspricht der Relation:

$$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma}{\pi \Delta},$$

wo σ den Umfang, die Länge der Curve, und Δ den Durchmesser des grössten Kreises bedeutet, der irgend drei Punkte mit der Curve gemein hat.

einer nirgend concaven Fläche entspricht der Relation:

$$\lambda \leqq 1 - \frac{\sigma}{2\pi \Delta^2},$$

wo σ die Grösse der Oberfläche (ihren Quadratinhalt) und Δ den Durchmesser der grössten Kugelfläche bedeutet, die irgend vier Punkte mit der Fläche gemein hat.

Bemerkung. — Solange die Configurationsconstanten λ und c *kleiner als* 1 sind, also im Besonderen bei allen nirgend concaven Curven und Flächen wird, wie aus unserm ersten Satze folgt, die *Neumann*'sche Constante λ stets *grösser* sein, als die *Hilbert*'sche Constante c, sie stellt also eine zu grosse d. h. nie erreichbare obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen zweier aufeinanderfolgender Functionen $f^{(n)}$ und $f^{(n+1)}$ dar,

*) Der Fall der „Zweisternigkeit“, den *C. Neumann* noch besonders ausschliesst, kommt für uns nicht in Betracht, er ist bereits durch unsere Grundvoraussetzung ausgeschlossen, dass σ frei von Spitzen, bezw. Ecken und Kanten sei. [vgl. pag. 6.]

und es folgt daher, dass die Reihen der Methode des arithmetischen Mittels thatsächlich rascher convergiren, als sich dies mit Hilfe der *Neumann*'schen Constanten λ beweisen liess.

Sind andrerseits die Configurationsconstanten λ und c *grösser als* 1, so folgt (wieder aus dem ersten Satze), dass die *Neumann*'sche Constante λ *kleiner* ist als die *Hilbert*'sche Constante c. Nun ist aber nach dem am Schlusse von § 2, pag. 13 bewiesenen Satze diese letztere Constante c stets die wahre, d. h. die kleinste obere Grenze jenes Quotienten und es stellt somit die (kleinere) *Neumann*'sche Constante λ überhaupt nicht mehr eine obere Grenze für diesen Quotienten dar, und verliert damit jede wesentliche Bedeutung.

In jedem Falle also, mögen nun diese Constanten kleiner oder grösser als 1 sein, ist die *Hilbert*'sche Constante c der *Neumann*'schen Constanten λ in gewisser Hinsicht überlegen.

Der letztere Fall, dass die Configurationsconstanten grösser als 1 sind, interessirt uns nun im Allgemeinen zwar weniger, wenigstens, wenn es sich um die Randwerthaufgabe handelt, d. h. um die Aufgabe, die Fundamentalfunction eines Gebietes aus ihren Randwerthen zu bestimmen. — Nur bei Behandlung physikalischer Probleme werden wir uns später auch mit Gebieten beschäftigen, deren Configurationsconstanten grösser als 1 sind, und dann werden uns die letzteren Bemerkungen wesentliche Dienste leisten.

§ 7.

Die Configurationsconstante des Kreises. Ueber das Verschwinden der Oeffnungsfunction in der Ebene.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Configurationsconstante c eines Kreises zu berechnen.

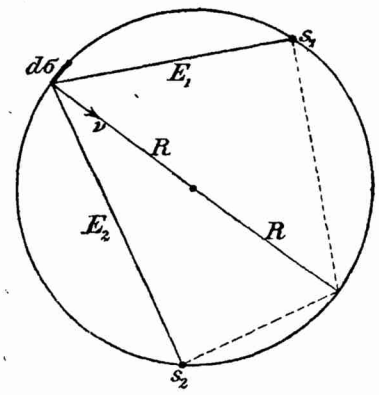

Fig. 3.

Es sei gegeben ein Kreis vom Radius R. Alsdann markiren wir auf demselben zwei beliebige Punkte s_1 und s_2, deren Entfernungen von dem Peripherieelemente $d\sigma$ wir mit E_1 bezw. E_2 bezeichnen. Dann ist, wie sofort aus der Figur ersichtlich:

$$E_1 = 2R\cdot\cos(\nu,E_1), \quad E_2 = 2R\cdot\cos(\nu,E_2)$$

und daher [vgl. (2) pag. 7 $(h=1)$]:

$$(d\sigma)_{s_1} = \frac{\cos(\nu,E_1)}{E_1}\,d\sigma = \frac{d\sigma}{2R},$$

$$(d\sigma)_{s_2} = \frac{\cos(\nu,E_2)}{E_2}\,d\sigma = \frac{d\sigma}{2R},$$

oder aber es ist, was für ein Peripherieelement wir auch unter $d\alpha$ verstehn mögen, stets:

$$(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2} = \frac{d\alpha}{2R} - \frac{d\alpha}{2R} = 0,$$

und mithin die Oeffnungsfunction des Kreises mit Bezug auf die Pole s_1 und s_2 [vgl. (7) pag. 11 $(h=1)$]:

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi}\int [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] = 0.$$

Dies gilt, wie wir auch die Lage der beiden Punkte s_1 und s_2 auf der Kreisperipherie wählen mögen, es wird somit auch noch das *Maximum* der Oeffnungsfunction, d. h. die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c verschwinden:

Die Hilbert'sche Configurationsconstante des Kreises hat den Werth

$$c = 0.$$

Damit hängt es, wie auch *Noble* bemerkt, zusammen, dass die Methode des arithmetischen Mittels, angewandt auf die Kreisfläche, schon von selbst beim ersten Gliede abbricht, indem bereits die Function f' einen constanten Werth C annimmt [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 93, (4)]. —

Die *Neumann*'sche Configurationsconstante λ ist nun stets in der Mitte gelegen zwischen der *Hilbert*'schen Constanten c und der Zahl 1, es ist stets $\lambda = \frac{1+c}{2}$ [vgl. (8) pag. 26], also beim Kreise:

$$\lambda = \frac{1}{2},$$

und dies ist thatsächlich der von *C. Neumann* für die Configurationsconstante des Kreises angegebene Werth [vgl. Unters. pag. 174]. —

Die obigen Betrachtungen über die Oeffnungsfunction und die *Hilbert*'sche Configurationsconstante des Kreises legen nun die Frage ungemein nahe, ob es noch andere Curven giebt, deren Configurationsconstante c gleich 0 ist, oder ob es überhaupt ausser der Kreislinie noch andere Curven σ giebt, für welche die Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ verschwinden kann, auch ohne dass die beiden auf σ gelegenen Punkte s_1 und s_2 zusammenfallen [vgl. (8) pag. 11].

Um dies näher zu untersuchen, kehren wir die Fragestellung in gewissem Sinne um; wir denken uns zwei *nicht zusammenfallende Punkte* s_1 *und* s_2 *fest gegeben* und fragen dann, ob es irgend eine Curve σ durch diese Punkte giebt, deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ mit Bezug auf s_1 und s_2 verschwindet. — Dazu ist es, wie wir schon oben [vgl. (9) pag. 11] anmerkten, nothwendig, dass die *sämmtlichen* Curvenelemente $d\sigma$ von s_1 und s_2 aus gleich gross erscheinen, dass also ganz allgemein

$$(1) \qquad (d\sigma)_{s_1} = (d\sigma)_{s_2}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1}\, d\sigma = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2}\, d\sigma$$

ist, wenn E_1 und E_2 die Entfernungen des Elementes $d\sigma$ von s_1 bezw. s_2 bedeuten.

Es handelt sich also zunächst darum, diese Bedingung (1) für die Curve σ noch in andrer Weise zu formuliren. Zu diesem Zweck führen wir rechtwinklige Coordinaten ein, derart, dass die x-Axe durch s_1 und s_2 geht und der Anfangspunkt die Linie $\overline{s_1 s_2} = 2a$ halbirt, sodass also s_1 und s_2 die Abscissen $+a$ bezw. $-a$ besitzen. — Es ist dann

$$\cos(\nu, E_1) = \cos(\nu, x)\cos(E_1, x) + \cos(\nu, y)\cos(E_1, y)$$
$$= -\frac{(x-a)\cos(\nu, x) + y\cos(\nu, y)}{E_1},$$

und

$$\cos(\nu, E_2) = \cos(\nu, x)\cos(E_2, x) + \cos(\nu, y)\cos(E_2, y)$$
$$= -\frac{(x+a)\cos(\nu, x) + y\cos(\nu, y)}{E_2}.$$

Nehmen wir nun an, die gesuchte Curve σ habe in jenem Coordinatensysteme die Gleichung

$$F(x, y) = \text{const.}, \tag{2}$$

so sind $\cos(\nu, x)$ und $\cos(\nu, y)$ bekanntlich proportional mit $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ und wir können daher die Bedingung (1) jetzt auch so schreiben:

$$\frac{(x-a)\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}}{E_1^2} = \frac{(x+a)\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}}{E_2^2},$$

oder aber, wenn wir noch die Bedeutungen von E_1^2 und E_2^2:

$$E_1^2 = (x-a)^2 + y^2, \qquad E_2^2 = (x+a)^2 + y^2$$

berücksichtigen, nach einfacher Umformung auch so:

$$(x^2 - y^2 - a^2)\frac{\partial F}{\partial x} + 2xy\frac{\partial F}{\partial y} = 0. \tag{3}$$

Soll also die mit Bezug auf s_1 und s_2 als Pole gebildete Oeffnungsfunction für die Curve $F(x, y) = \text{const.}$ verschwinden, so muss die Function $F(x, y)$ der Differentialgleichung (3) genügen. — Diese lässt nun aber nur eine einzige Lösung zu, die sich nach bekannten Regeln auch sehr leicht bestimmen lässt. Sie lautet:

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{y}.$$

Die einzigen Curven, welche die angegebene Eigenschaft besitzen, sind also durch die Gleichung

$$F(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - a^2}{y} = \text{const.} = 2b$$

oder

$$x^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

dargestellt, wo b also eine ganz willkürliche Constante ist, d. h. es sind dies durch s_1 und s_2 hindurchgehende Kreise, wie das im besten Einklang steht mit unseren obigen Resultaten. — Doch geht erst aus unseren letzten Betrachtungen unzweifelhaft hervor, dass *der Kreis die einzige ebene Curve ist, deren Oeffnungsfunction verschwinden kann ohne dass ihre Pole zusammenfallen**), woraus sofort weiter der Satz folgt: *der Kreis ist die einzige Curve in der Ebene, deren Configurationsconstante c gleich* 0 *ist.*

§ 8.

Die Configurationsconstante der Ellipse. Ein Satz über *Fourier*'sche Reihen.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Oeffnungsfunction und die Configurationsconstante der Ellipse zu bestimmen.

Zu diesem Zweck werden wir gut daran thun, elliptische Coordinaten λ, ϑ einzuführen, welche mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y durch die folgenden Relationen zusammenhängen:

$$(1)\quad x = k\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\cos\vartheta, \qquad y = k\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2}\sin\vartheta \qquad (0<\lambda;\ 0<\vartheta<2\pi)$$

wo k eine Constante bedeutet.

Dann wird eine Ellipse in einfachster Weise dargestellt durch die Gleichung:

$$\lambda = \text{const.},$$

und zwar hängen die Halbaxen a und b dieser Ellipse mit dem Werth von λ folgendermassen zusammen: es ist

$$(2)\quad a = k\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}, \qquad b = k\frac{e^{\lambda}-e^{-\lambda}}{2} \qquad \text{und daher} \qquad e^{-2\lambda} = \frac{a-b}{a+b}.$$

Wir denken uns nun eine solche Ellipse σ fest gegeben, ihr Parameter sei λ_0. — Unsere *erste Aufgabe* sei dann diese, die scheinbare Grösse

---

*) Man könnte meinen, dass die Oeffnungsfunction auch für Curven, welche von zwei Kreisbogen gebildet werden, verschwinde, sobald die Pole in die beiden Schnittpunkte dieser Kreise rückten. — Dem wäre allerdings so, wenn wir bei einer solchen mit Spitzen behafteten Curve die Oeffnungsfunction in derselben Weise definiren wollten, wie wir es oben für stetig gekrümmte Curven thaten. Bei einem solchen Verfahren würde aber die Function für uns jede wesentliche Bedeutung verlieren. — Wir sind daher gezwungen, bei derartig unstetig gekrümmten Curven oder auch Flächen bei der Definition der Oeffnungsfunction eine gewisse *Modification* eintreten zu lassen, auf die ich hier jedoch nicht näher eingehn will. Es zeigt sich dann, dass die Oeffnungsfunction einer solchen von zwei Kreisbogen gebildeten Curve thatsächlich *nicht* verschwindet, wenn die Pole in die Spitzen hineinfallen.

eines Elementes $d\sigma(\lambda_0, \vartheta)$ dieser Ellipse von einem Punkte $s(\lambda_0, \omega)$ eben dieser Ellipse zu berechnen. Wir bezeichnen dieserhalb mit E die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von s und mit ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Ellipsennormale; dann wird sich bei der Bewegung eines Punktes längs dieser Normalen ν nur seine λ-Coordinate ändern, und es folgt demgemäss:

$$(3) \qquad (d\sigma)_s = \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu}\,d\sigma = \left[\frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0}\frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\,d\sigma$$

Nun ist aber das Quadrat der Entfernung E eines Punktes λ, ϑ von jenem Ellipsenpunkte $s(\lambda_0, \omega)$:

$$(4) \quad E^2 = \frac{k^2}{4}\left(e^{\lambda+\lambda_0} + e^{-(\lambda+\lambda_0)} - 2\cos(\vartheta+\omega)\right)\cdot\left(e^{\lambda-\lambda_0} + e^{\lambda_0-\lambda} - 2\cos(\vartheta-\omega)\right),$$

und in Rücksicht hierauf ergiebt sich aus (3) zunächst:

$$(5) \qquad (d\sigma)_s = -\frac{1}{2}\,\frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta+\omega)}\,\frac{\partial\lambda}{\partial\nu}\,d\sigma.$$

Nun folgt weiter aus (4) durch einen leichten Grenzübergang für das Quadrat eines beliebigen Linienelementes dl, wenn $d\lambda$ und $d\vartheta$ die Zuwächse bedeuten, die λ und ϑ darauf erfahren, der folgende Ausdruck:

$$(6) \qquad dl^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{k^2}{2}\left(e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} - 2\cos 2\vartheta\right)\cdot(d\lambda^2 + d\vartheta^2).$$

Wenden wir diese Formel einmal an auf ein Element $d\sigma$ der Ellipse λ_0 und sodann auf ein Element $d\nu$ der Normalen ν, also das eine Mal auf ein Linienelement, für welches $d\lambda = 0$, das andere Mal $d\vartheta = 0$ ist, so erhalten wir:

$$(7) \qquad d\sigma = \frac{k}{2}\sqrt{2(e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos 2\vartheta)}\,d\vartheta$$

und andrerseits:

$$(7') \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\nu} = -\frac{1}{\frac{k}{2}\sqrt{2(e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos 2\vartheta)}}\,^*);$$

Die Formel (5) nimmt daher jetzt die folgende einfachere Gestalt an:

$$(8) \qquad (d\sigma)_s = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta+\omega)}\cdot d\vartheta.$$

Damit wäre jetzt aber unsere erste Aufgabe gelöst, die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma(\lambda, \vartheta)$ vom Ellipsenpunkte $s(\lambda_0, \omega)$ aus berechnet.

---

*) Das *negative* Vorzeichen muss $\frac{\partial\lambda}{\partial\nu}$ erhalten, weil λ in der Richtung der inneren Ellipsennormalen ν abnimmt.

Aus dem erhaltenen Resultate folgt sofort für die *Differenz* der scheinbaren Grössen dieses Elementes $d\sigma$ von zwei Punkten $s_1(\lambda_0, \omega_1)$ und $s_2(\lambda_0, \omega_2)$ der Ellipse der Ausdruck:

$$(9)\quad (d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega_1)} - \frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega_2)}\right) d\vartheta$$
$$= \frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{2}\left[\frac{d\vartheta}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega)}\right]_{\omega=\omega_2}^{\omega=\omega_1}.$$

Um nun die *Oeffnungsfunction* der Ellipse mit Bezug auf diese beiden Punkte s_1 und s_2 zu bestimmen, müssen wir nun weiter zunächst die *Hilbert*'sche Eintheilung der Ellipse σ in die beiden Theile α und β feststellen, deren Elemente von s_1 bezw. s_2 aus grösser erscheinen [vgl. (3), pag. 10]. — Die Grenze zwischen diesen Theilen α und β werden danach jedenfalls solche Elemente $d\sigma$ bilden, welche *von* s_1 *und von* s_2 *aus gleich gross* erscheinen, für welche somit die Differenz (9) gleich 0, oder aber $\cos(\vartheta + \omega_1) = \cos(\vartheta + \omega_2)$ wird, d. h. die Theile α und β der Ellipse werden begrenzt durch zwei Punkte mit den ϑ-Coordinaten $\pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und $2\pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ und zwar werden, sofern $\omega_1 > \omega_2$ ist, alle Elemente $d\sigma$, deren ϑ-Coordinaten der Relation

$$(10)\qquad \pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} < \vartheta < 2\pi - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

entsprechen, von s_1 aus grösser als von s_2 aus erscheinen (für sie wird nämlich, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, die Differenz (9) positiv); *dieses Intervall* (10) *von* ϑ *entspricht somit dem Theile* α.

Wenn wir also die Oeffnungsfunction

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{\pi}\int [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}],$$

d. h. das Integral des Ausdrucks (9), hinerstreckt über den Theil α, bilden wollen [vgl. (7) pag. 11 ($h = 1$)], so müssen wir nach ϑ über jenes Intervall (10) hin integriren; es folgt sonach:

$$(11)\quad D(s_1, s_2) = \frac{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}{2\pi}\left[\int_{\pi - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}}^{2\pi - \frac{\omega_1+\omega_2}{2}} \frac{d\vartheta}{e^{2\lambda_0} + e^{-2\lambda_0} - 2\cos(\vartheta + \omega)}\right]_{\omega=\omega_2}^{\omega=\omega_1}.$$

Die Ausführung der Integration und eine einfache weitere Umformung des Resultats liefert uns dann schliesslich den folgenden Ausdruck für *die Oeffnungsfunction der Ellipse in Bezug auf die Punkte* s_1 *und* s_2 *mit den* ϑ*-Coordinaten* ω_1 *und* $\omega_2(\omega_1 > \omega_2)$:

$$(12) \qquad D(s_1, s_2) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}\right).$$

dabei ist natürlich $\operatorname{arctg} x$ *im ersten Quadranten* anzunehmen, denn für $\omega_1 = \omega_2$, d. h. wenn die beiden Pole s_1 und s_2 zusammenfallen, muss ja $D(s_1, s_2)$ zu 0 werden [vgl. (8), pag. 11]. —

Aus dieser Darstellungsweise (12) ist nun sofort ersichtlich, dass die Oeffnungsfunction ihren grössten Werth annimmt, wenn $\omega_1 - \omega_2 = \pi$ ist (d. h. geometrisch gesprochen, wenn s_1 und s_2 auf den beiden Zweigen ein und derselben zur Ellipse confocalen Hyperbel, und zwar in gegenüberliegenden Ellipsenquadranten liegen), und für dieses Maximum selber, die Configurationsconstante c, ergiebt sich der Werth:

$$c = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{e^{2\lambda_0} - e^{-2\lambda_0}}\right) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(e^{-2\lambda_0}\right).$$

Die Configurationsconstante einer Ellipse vom Parameter λ_0 *ist*

$$(13) \quad c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(e^{-2\lambda_0}\right), \quad \textit{oder auch} \quad c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{a+b}\right) \quad [\text{vgl. (2)}],$$

wenn a und b die grosse und die kleine Halbaxe der Ellipse bedeuten — unter $\operatorname{arctg} x$ natürlich den *kleinsten* Bogen verstanden, dessen Tangente x ist.

Es ist dies der auch von *Noble* angegebene Werth der Configurationsconstanten c der Ellipse; da arctg von einem echten Bruche stets kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist, so ist er thatsächlich, wie nach dem dritten Satze pag. 27 zu erwarten war, stets *kleiner als* 1.

Wir wollen uns jetzt einmal auf der Ellipse irgend eine daselbst stetige Function f vorgeschrieben denken. Es ist dies dann lediglich eine Function des Argumentes ϑ, das auf der Ellipse alle Werthe von 0 bis 2π annimmt. Demgemäss können wir uns diese willkürlich gegebene Function dargestellt denken durch eine *Fourier*'sche Reihe:

$$(14) \qquad f_s = f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Wir wollen dann auf Grund dieser Function f das Potential W_p [vgl. § 1], und vor Allem die aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc. für die Ellipse wirklich zu berechnen suchen.

Um nun zunächst W_i und W_a, die Werthe des Potentials W in *inneren* und *äusseren* Punkten $i(\lambda_i, \vartheta_i)$ und $a(\lambda_a, \vartheta_a)$ $[0 < \lambda_i < \lambda_0 < \lambda_a]$ zu bestimmen, müssen wir zunächst die scheinbaren Grössen $(d\sigma)_i$ und $(d\sigma)_a$ des Ellipsenelementes $d\sigma(\lambda_0, \vartheta)$ von diesen Punkten i und a aus kennen. Diese

lassen sich nun ganz ähnlich berechnen, wie wir oben $(d\sigma)_s$ fanden; doch wollen wir jetzt nicht mit solchen *geschlossenen* Ausdrücken operiren, uns vielmehr auch hier der Entwicklung in *Fourier'sche Reihen* bedienen. Wir erhalten dann, wie ich nicht näher ausführen will:

$$(d\sigma)_i = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_i+\lambda_0)} \cos n(\vartheta_i+\vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_i-\lambda_0)} \cos n(\vartheta_i-\vartheta) \right) d\vartheta \quad (\lambda_i<\lambda_0),$$

$$(d\sigma)_a = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_0+\lambda_a)} \cos n(\vartheta+\vartheta_a) - \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_0-\lambda_a)} \cos n(\vartheta-\vartheta_a) \right) d\vartheta \quad (\lambda_a>\lambda_0),$$

und daraus dann sofort weiter unter Benutzung der bekannten Integraleigenschaften der Kreisfunctionen:

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{1}{\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_i = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_i+\lambda_0)} (a_n \cos n\vartheta_i - b_n \sin n\vartheta_i) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_i-\lambda_0)} (a_n \cos n\vartheta_i + b_n \sin n\vartheta_i), \\ W_a &= \frac{1}{\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_a = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(\lambda_0+\lambda_a)} (a_n \cos n\vartheta_a - b_n \sin n\vartheta_a) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} e^{n(\lambda_0-\lambda_a)} (a_n \cos n\vartheta_a + b_n \sin n\vartheta_a). \end{aligned} \tag{15}$$

Lassen wir nun den Punkt i bezw. a sich einem Punkte $s(\lambda_0, \vartheta)$ der Ellipse selber nähern, so ergeben sich für die *inneren und äusseren Grenzwerthe* des Potentials W die folgenden Darstellungen:

$$\begin{aligned} W_{is} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\ W_{as} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) - \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta). \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Grenzwerthe hängen nun mit dem Werthe $W_s = f_s'$ von W im Punkte s der Ellipse selber nach (7) pag. 8 durch die Relationen

$$W_{is} = f_s' + f_s \qquad \text{und} \qquad W_{as} = f_s' - f_s \tag{17}$$

zusammen, und es ergeben daher die beiden Formeln (16) übereinstimmend für f_s' den Werth:

$$f_s' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta), \tag{18}$$

worin wir eine gewisse *Bestätigung jener beiden allgemeinen Formeln* (17) in unserem speciellen Falle erblicken können. —

Wollen wir nun die weiteren aufeinanderfolgenden Functionen f_s'', f_s''', etc. bilden, so haben wir nur zu beachten, dass jede derselben aus der vorhergehenden durch genau dieselben Operationen hervorgeht, wie f_s' aus f_s. Wir gelangen somit *bei der Ellipse* zu dem folgenden System *aufeinanderfolgender Functionen:*

$$
\begin{aligned}
f_s &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\
f_s' &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta), \\
f_s'' &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta), \\
f_s''' &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-6n\lambda_0} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta), \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Aus diesen Functionen f, f', f'', etc. ergeben sich dann in genau derselben Weise, wie wir oben W aus f erhielten, die weiteren Potentiale W', W'', W''', etc., und aus diesen lassen sich dann nach den allgemeinen Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels [vgl. pag. 15] die Fundamentalfunctionen des inneren und des äusseren Gebietes der Ellipse σ zusammensetzen, welche auf σ selber die ursprünglich vorgeschriebenen Werthe f besitzen. —

Doch darauf wollen wir hier nicht weiter eingehn, vielmehr an die Formeln (19) die folgende Bemerkung knüpfen: In der Configurationsconstanten (13) der Ellipse besitzen wir nach dem allgemeinen Satze pag. 12 eine obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen zweier solcher aufeinanderfolgender Functionen. Beachten wir aber, dass unsere Ellipse mit dem Parameter $\lambda_0 (\lambda_0 > 0)$ ganz *willkürlich* aus dem Systeme der confocalen Ellipsen herausgegriffen war, dass wir demnach unter $e^{-2\lambda_0}$ einen ganz beliebigen positiven echten Bruch Θ verstehn können, so sind wir damit zu folgendem Resultate gelangt:

Satz. — *Besitzt die durch die Fourier'sche Reihe:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = f(\vartheta) \qquad (0 < \vartheta < 2\pi)$$

dargestellte Function f die Schwankung δ, und verstehn wir unter Θ einen beliebigen positiven echten Bruch, so besitzt die durch die Entwicklung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) = F(\vartheta)$$

dargestellte Function F eine Schwankung Δ, welche der Relation

$$\Delta \leqq c \cdot \delta$$

entspricht, wo $c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \Theta$ *ist.**)

Wenn ich bei Aussprache dieses Satzes die früher über die Function f gemachte Voraussetzung der Stetigkeit unterdrückt habe, so hat das seinen Grund darin, dass die zum Satze führenden Betrachtungen, wie hier ohne Beweis mitgetheilt sei, *in gleicher Weise für nur abtheilungsweise stetige Functionen, wie für geradezu stetige Functionen gültig bleiben.*

§ 9.

Die Configurationsconstante der Kugel. Folgerungen: Zwei Sätze über das Potential einer Kugelflächenbelegung, bezw. über Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten.

Gegeben sei eine Kugelfläche σ vom Radius R. — Um alsdann deren Configurationsconstante c zu berechnen, markire ich auf ihr zwei Punkte s_1 und s_2 und bezeichne die Entfernungen derselben von einem Oberflächenelemente $d\sigma$ dieser Kugelfläche mit E_1 und E_2. Dann folgt sofort aus der Betrachtung der beiden durch $d\sigma$ einerseits und s_1 bezw. s_2 andrerseits gelegten grössten Kreise [vgl. Figur 3 pag. 28]:

$$E_1 = 2R \cos(\nu, E_1), \qquad E_2 = 2R \cos(\nu, E_2)$$

und es ergiebt sich daher für die scheinbare Grösse jenes Elementes $d\sigma$ von s_1 und s_2 aus [vgl. (2) pag. 7 $(h=2)$]

$$(1) \quad (d\sigma)_{s_1} = \frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1^2}\, d\sigma = \frac{1}{E_1}\,\frac{d\sigma}{2R}, \qquad (d\sigma)_{s_2} = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2^2}\, d\sigma = \frac{1}{E_2}\,\frac{d\sigma}{2R},$$

und hieraus ist sofort ersichtlich, dass zum Theile α der *Hilbert'schen Eintheilung* von σ, dessen Elemente grösser von s_1 als von s_2 erscheinen, alle Elemente $d\sigma$ gehören, für welche $E_1 < E_2$ ist, die also näher an s_1 als an s_2 liegen, und zum Theile β alle übrigen, die demnach näher an s_2 als an s_1 liegen. Die Kugelfläche σ wird also in die Theile α und β zerlegt durch die zu den Punkten s_1 und s_2 mittelsenkrechte Ebene, jeder Theil für sich wird also eine *Halbkugelfläche* bilden.

---

*) Es ist nämlich $F(\vartheta) = f(2\pi - \vartheta)$, die Functionen F und f nehmen also zwischen 0 und 2π genau dieselben Werthe (nur an verschiedenen Stellen) an, und es überträgt sich daher der oben nur für f bewiesene Satz sofort auch auf die Function F.

Um uns nun im Folgenden kürzer ausdrücken zu können, wollen wir uns unter jener Kugelfläche die *Erd*kugelfläche vorstellen. Wir können dann, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, s_1 und s_2 als zwei in Bezug auf die Aequatorialebene E *symmetrisch* gelegene Punkte ansehn, und zwar wollen wir festsetzen, dass s_1 auf der *nördlichen*, s_2 auf der *südlichen* Hemisphäre liege.

Unter Benutzung dieser Vorstellung können wir dann kurz sagen: der Theil α der *Hilbert*'schen Eintheilung wird gebildet durch die *nördliche*, der Theil β durch die *südliche* Hemisphäre.

Wir knüpfen nun bei Berechnung der Oeffnungsfunction der Kugel ($h = 2$) an den zweiten in (2) pag. 24 für dieselbe abgeleiteten Ausdruck

$$D(s_1, s_2) = 1 - \frac{\int (d\alpha)_{s_2} + \int (d\beta)_{s_1}}{2\pi}$$

an; die beiden hier auftretenden Integrale stellen die scheinbare Grösse der nördlichen Hemisphäre von s_2 aus, bezw. der südlichen Hemisphäre von s_1 aus dar, sind also augenscheinlich einander gleich, jedes ist gleich der *scheinbaren Grösse* Ω *des Aequators* von s_1 oder (was dasselbe ist) von s_2 aus.

Dieses vorläufige Resultat können wir etwa so fixiren:

Wir fassen die beiden auf einer Kugelfläche σ *beliebig gegebenen Punkte* s_1 *und* s_2 *auf als zwei Orte der Erdoberfläche, die gegenseitige Spiegelpunkte in Bezug auf die Aequatorialebene sind. — Alsdann ist die mit Bezug auf* s_1 *und* s_2 *gebildete Oeffnungsfunction der Kugelfläche*

$$D(s_1, s_2) = 1 - \frac{\Omega}{\pi}, \tag{2}$$

wo Ω *die scheinbare Grösse des Aequators vom Punkte* s_1 *aus, oder, was dasselbe ist, von* s_2 *aus bedeutet.*

Wollen wir nun das *Maximum* der Oeffnungsfunction, d. h. die *Hilbert*'sche Configurationsconstante c der Kugelfläche, bestimmen, so müssen wir uns also zunächst der Frage zuwenden, für welchen Punkt s_1 der nördlichen Hemisphäre die scheinbare Grösse Ω des Aequators ein *Minimum* wird. — Da nun augenscheinlich Ω für alle Punkte desselben Parallelkreises gleich gross ist, so können wir uns auf die Betrachtung eines einzigen Meridiankreises, oder sogar Meridianhalbkreises ANB beschränken und uns fragen: Welche geographische Breite φ muss ein Punkt s_1 dieses Meridianhalbkreises besitzen, damit von ihm aus der Aequator möglichst klein erscheine?

Die scheinbare Aequatorgrösse Ω wird nun gemessen durch die Oeffnung eines Kegels, der von s_1 aus an den Aequator gelegt wird, also im

Allgemeinen eines elliptischen Kegels. — Von den beiden Axenöffnungen dieses elliptischen Kegels bleibt nun die eine, der Winkel As_1B immer gleich gross, nämlich gleich 90^0, wie wir auch s_1 auf unserem Meridianhalbkreise annehmen; die zweite Axenöffnung ϑ hingegen hängt, wie einfache geometrische Ueberlegungen lehren, mit der geographischen Breite φ des Punktes s_1 durch die folgende Relation zusammen:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sin \varphi}.$$

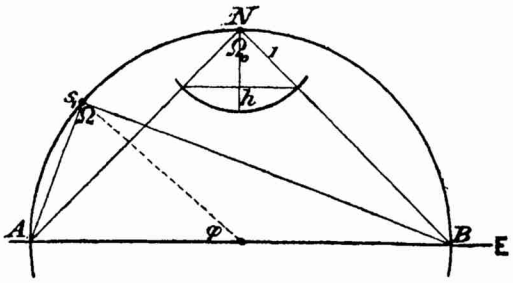

Fig. 4.

Es erreicht somit diese Oeffnung ϑ und damit auch die räumliche Kegelöffnung Ω ihr Minimum für die geographische Breite $\varphi = 90^0$, d. h. wenn der Punkt s_1 in den *Nordpol* N hineinrückt.

Dieses Minimum Ω_0 der scheinbaren Grösse Ω ist daher leicht zu berechnen. Wir können es messen durch die Calotte, die der über dem Aequator errichtete Kreiskegel, dessen Spitze im Pole N liegt, aus einer um N mit dem Radius 1 beschriebenen Kugelfläche ausschneidet. Die Höhe dieser Calotte ist aber, wie sofort aus der Figur ersichtlich:

$$h = 1 - 1 \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

und daher die Calotte selber oder das Minimum der scheinbaren Aequatorgrösse:

$$\Omega_0 = 2\pi h = \pi(2 - \sqrt{2}).$$

Diesem Minimum entspricht aber nach (2) das Maximum der Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$, d. h. die Configurationsconstante c; es folgt somit:

$$c = 1 - \frac{\Omega_0}{\pi} = \sqrt{2} - 1.$$

Die Hilbert'sche Configurationsconstante der Kugelfläche hat also den Werth:

(3) $$c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41421 \cdots.$$

Die *Neumann*'sche Constante λ ist nun, wie wir sahen, [vgl. (8), pag. 26] gleich $\frac{1+c}{2}$, also bei der Kugelfläche: $\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}70710\cdots$, thatsächlich also, wie *C. Neumann* in einer Vorlesung bewies, $< \frac{3}{4}$ d. i. $< 0{,}75$.

Folgerungen. — Denken wir uns jetzt auf der Kugelfläche eine beliebige aber stetige Function f ausgebreitet und auf Grund derselben nach den Vorschriften von § 1 ($h = 2$) die Werthe W_i oder

$$f_s' = \frac{1}{2\pi}\int f_\sigma (d\sigma)_s$$

gebildet, so stellt die Configurationsconstante c eine obere Grenze dar für den Quotienten der Schwankungen der Functionen f und f' [vgl. (10) pag. 12]. — Nun ist aber nach (1) die Function f_s' auch so darstellbar:

$$f_s' = \frac{1}{4\pi R}\int f_\sigma \frac{d\sigma}{E},$$

woraus ersichtlich, dass f_s die Oberflächenwerthe des Potentials einer auf der Kugelfläche ausgebreiteten Belegung von der Dichtigkeit $\frac{f}{4\pi R}$ darstellt; wir können somit unser obiges Resultat auch so ausdrücken:

Erster Satz. — *Ist auf einer Kugelfläche vom Radius R eine Massenbelegung ausgebreitet, deren grösste und kleinste Dichtigkeit g bezw. k ist, so ist die Schwankung* Δ *der Oberflächenwerthe des Potentials dieser Belegung*

$$\Delta \leqq 4\pi R(g-k)\cdot c,$$

wo $c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41421\cdots$ *ist.*

Nun sind die extremen Werthe an der Oberfläche bekanntlich gleichzeitig die extremen Werthe des Potentials in inneren Punkten, jene Grenze stellt also *gleichzeitig eine obere Grenze für die Schwankung der inneren Potentialwerthe* dar — für die äusseren hingegen nur, wenn neben positiven Potentialwerthen gleichzeitig auch negative vorkommen, wenn also der Werth 0 im Unendlichen kein extremer Werth ist. —

Zu einem weiteren nicht uninteressanten Resultate führt unser obiger Satz über die Schwankungen der beiden Functionen f und f', wenn wir uns die auf der Kugelfläche σ ausgebreitete Function f jetzt entwickelt denken nach Kugelfunctionen:

$$f_s = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi),$$

wo $\mu = \cos\vartheta$ und ψ die bekannten Polarcoordinaten bedeuten. Dann ist die Function f_s' durch die folgende Reihe darstellbar:

$$f_s' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, Y_n(\mu, \psi) \qquad \text{[vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 101, (4)]}$$

und wir können daher jetzt jenen Satz auch so aussprechen:

Zweiter Satz. — *Besitzt die durch die nach Laplace'schen Kugelfunctionen fortschreitende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi) = f(\mu, \psi) \qquad (-1 < \mu < +1;\ 0 < \psi < 2\pi)$$

definirte Function f die Schwankung δ, so ist die Schwankung δ′ der durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\mu, \psi) = f'(\mu, \psi)$$

dargestellten Function f′:

$$\delta' \leqq c \cdot \delta,$$

wo wieder $c = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41421 \cdots$ *ist**).

Dieser Satz stellt nun nach seiner *Herleitung* völlig das Analogon zu dem auf pag. 36 bewiesenen Satze über die *Fourier*'sche Reihen dar; einen weiteren Satz über Reihen nach Kugelfunctionen, welcher *inhaltlich* jenem Satze noch weit besser entspricht, werden wir im folgenden Paragraphen kennen lernen.

§ 9a.

Ein allgemeiner Satz über Fundamentalfunctionen des Raumes 𝔄 ausserhalb einer Kugelfläche. Ein weiterer Satz über Reihen, die nach Kugelfunctionen fortschreiten.

Anlehnend an die im vorigen Paragraphen angestellten Untersuchungen über die Kugelfläche will ich hier einen Satz mittheilen, der sich öfters als recht brauchbar erweist, und von dem ich möglichenfalls weiter unten noch Gebrauch machen werde.

Denkt man sich auf einer Kugelfläche σ vom Radius R eine beliebige Function φ vorgeschrieben, so giebt es sicherlich eine Fundamentalfunction des Raumes 𝔄 ausserhalb σ, welche mit diesen Werthen φ auf σ in stetiger Weise zusammenhängt, wie sich das leicht, z. B. mit Hilfe der Methode des arithmetischen Mittels beweisen lässt. — Wir wollen nun die Werthe dieser Fundamentalfunction — sie möge Φ heissen — speciell auf einer zu σ concentrischen (grösseren) Kugelfläche Σ mit dem Radius ϱ näher untersuchen, und im Besonderen zusehn, zwischen welchen Grenzen Γ und K diese Functionswerthe liegen; wir wollen uns nämlich die Frage vorlegen: Wie hängt die *Schwankung* $\Gamma - K$ der Functionswerthe von Φ auf jener Kugelfläche Σ zusammen mit der Schwankung $\gamma - \varkappa$ ihrer Randwerthe, d. h. der ursprünglich auf σ vorgeschriebenen Werthe φ?

Ohne auf die Ableitung näher einzugehn, möchte ich das Resultat der diesbezüglichen Untersuchung mittheilen:

Allgemeiner Satz. — *Bezeichnet* Φ_a *irgend eine Fundamentalfunction des Raumes* 𝔄 *ausserhalb einer Kugelfläche* σ *vom Radius R, und bezeichnen*

---

*) Die Voraussetzung, dass die Function *f* stetig sei, ist hier wieder nicht nothwendig [vgl pag. 37, die Schlussbemerkung von § 8].

γ und $\varkappa$ den grössten und kleinsten ihrer Oberflächenwerthe (Werthe auf σ), so entspricht die Schwankung $\Gamma - K$ dieser Function auf einer mit σ concentrischen, grösseren, Kugelfläche Σ vom Radius ϱ der Relation:

$$\Gamma - K \leqq q(\gamma - \varkappa),$$

wo $q = 1 - \frac{\varrho^2 - R^2}{\varrho\sqrt{\varrho^2 + R^2}}$ *ist*).* —

Denken wir uns nun diese Oberflächenwerthe φ der Fundamentalfunction Φ in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi),$$

so sind die Werthe von Φ im Centralabstande $\varrho > R$ so darstellbar:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} Y_n(\mu, \psi) \quad \text{[vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 103, (10)].}$$

Die Schwankungen dieser beiden Reihen setzt nun unser obiger Satz in eine gewisse Beziehung zu einander. — Beachten wir noch, dass ϱ der Radius der Kugelfläche Σ, auf der wir die Werthe von Φ betrachteten, ganz beliebig gewählt war, nur so, dass $\varrho > R$ ist, dass wir demnach unter $\frac{R}{\varrho}$ einen beliebigen positiven echten Bruch Θ verstehn können, so dürfen wir das erhaltene Resultat auch so aussprechen:

Satz. — *Besitzt die durch die nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\mu, \psi) = \varphi(\mu, \psi) \qquad (-1 < \mu < +1;\ 0 < \psi < 2\pi)$$

definirte Function φ die Schwankung δ, und bezeichnet Θ einen beliebigen positiven echten Bruch, so besitzt die durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Theta^{n+1} Y_n(\mu, \psi) = \Phi(\mu, \psi)$$

---

*) Der Beweis dieses Satzes beruht, um nur das anzugeben, im Wesentlichen auf derselben Schlussweise, wie wir sie oben in § 2 bei einer ähnlichen Untersuchung anwandten. — Im Uebrigen thut man gut daran, zunächst die *Potential*function V zu betrachten, die auf σ die Werthe φ besitzt, und welche sich mit Hilfe der *Green'schen Function* darstellen lässt. Von dieser *Potentialfunction* V ist dann leicht der Uebergang zur *Fundamentalfunction* Φ gemacht. [Wegen des Unterschiedes zwischen diesen beiden Gattungen von Functionen vgl. die Anmerkung pag. 13].

definirte Function Φ *eine Schwankung* Δ, *welche der Relation entspricht:*

$$\Delta \leqq q \cdot \delta$$

wo $q = 1 - \frac{1-\Theta^2}{\sqrt{1+\Theta^2}}$ *ist.*

Die Analogie zwischen diesem Satze und dem auf pag. 36 gefundenen Satze über *Fourier*'sche Reihen, tritt klar zu Tage.

§ 10.

Ueber das Verschwinden der Oeffnungsfunction im Raume.

In § 7 lernten wir in dem Kreise eine, und zwar die einzige Curve in der Ebene kennen, deren Configurationsconstante c gleich 0 ist. — Wir wollen nun analog in diesem Paragraphen die Frage erörtern, ob es vielleicht auch eine *Fläche im Raume* giebt, deren Configurationsconstante den Werth 0 hat, oder deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ überhaupt verschwinden kann, auch ohne dass ihre beiden Pole s_1 und s_2 coïncidiren.

Wir nehmen dieserhalb ganz analog, wie wir es in § 7 thaten, diese beiden *Punkte* s_1 *und* s_2 *im Raum fest gegeben* an und legen uns die Frage vor, ob es eine durch diese beiden Punkte gehende Fläche σ giebt, derart, dass für dieselbe die mit Bezug auf s_1 und s_2 gebildete Oeffnungsfunction verschwindet. Dazu ist erforderlich, dass *sämmtliche* Elemente $d\sigma$ jener Fläche σ von s_1 und s_2 aus gleich gross erscheinen [vgl. (9), pag. 11], dass also ganz allgemein

(1) $(d\sigma)_{s_1} = (d\sigma)_{s_2}$ d. h. $\frac{\cos(\nu, E_1)}{E_1^2}\, d\sigma = \frac{\cos(\nu, E_2)}{E_2^2}\, d\sigma$ [vgl. (2) pag. 7]

ist, wo wieder ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Flächennormale bedeutet, und E_1^2 und E_2^2 die Quadrate der Entfernungen dieses Elementes $d\sigma\,(x, y, z)$ von s_1 und s_2 sind, sodass also:

(2) $E_1^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2, \qquad E_2^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2$

— dabei ist dann natürlich wieder ein rechtwinkliges Coordinatensystem x, y, z zu Grunde gelegt, dessen x-Axe durch die beiden Punkte s_1 und s_2 hindurchgeht, und dessen Anfangspunkt ihren Abstand $\overline{s_1 s_2} = 2a$ halbirt.

Nehmen wir nun an, in diesem Coordinatensysteme besitze die gesuchte Fläche σ die Gleichung

(3) $$F(x, y, z) = \text{const.},$$

so gelangen wir durch genau dieselben Schlüsse, die wir in § 7 anwandten, von der Gleichung (1) zu der folgenden Differenzialgleichung für die Function $F(x, y, z)$:

(4) $$\left(\frac{x-a}{E_1^3} - \frac{x+a}{E_2^3}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + y\left(\frac{1}{E_1^3} - \frac{1}{E_2^3}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + z\left(\frac{1}{E_1^3} - \frac{1}{E_2^3}\right)\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

wo E_1 und E_2 als Abkürzungen in den aus (2) ersichtlichen Bedeutungen stehn.

Die Integration dieser Gleichung (4), auf die ich nicht näher eingehn will, liefert uns nun das Resultat, dass die Fläche $F(x,y,z) = \text{const.}$, welche der Bedingung (1) genügt, sich zusammensetzen muss aus Theilen von Meridianebenen, d. h. von Ebenen, welche durch die Linie $s_1 s_2$ gehn, und von Flächen, deren Meridiancurven die Gleichung

$$\frac{a-x}{E_1} + \frac{a+x}{E_2} = \text{const.} = \omega + 1$$

oder

(5) $$\cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \omega + 1$$

[vgl. die Figur]

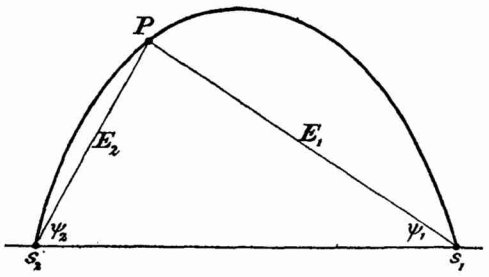

Fig. 5.

besitzen, wobei freilich der Werth dieses Parameters ω von Meridianhalbebene zu Meridianhalbebene andere und andere Werthe annehmen kann, sodass also ω als eine *willkürliche Function* $\omega(\varphi)$ *des Azimuthes* φ dieser Meridianhalbebene anzusehn ist.*)

Beschränken wir uns nun aber auf Flächen, die frei von Singularitäten, also frei von Ecken und Kanten sind, so müssen wir zunächst Theile von Meridianebenen als Bestandtheile unsrer Fläche ausschliessen und ferner verlangen, dass die in den Polen s_1 und s_2 an sämmtliche Meridiancurven gelegten Tangenten in einer Ebene liegen, damit die Fläche eben in s_1 und s_2 bestimmte Tangentialebnen erhalte**). Diese Forderung zwingt uns aber, wie eine leichte geometrische Ueberlegung lehrt, für die Function $\omega(\varphi)$ bei passender Wahl der Anfangsmeridianebene $\varphi = 0$, folgende Form anzunehmen:

$$\omega(\varphi) = \frac{\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1+\alpha^2\cos^2\varphi}},$$

wo α eine willkürliche Constante bedeutet. — Damit sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

*Die einzigen singularitätenfreien Flächen****), *deren Oeffnungsfunc-*

*) Uebrigens stellt, wie hier nur beiläufig erwähnt sei, die durch die Gleichung (5) repräsentirte Curvenschaar die bekannten *magnetischen Kraftlinien* eines idealen, d. h. lediglich durch seine beiden entgegengesetzten Pole s_1 und s_2 charakterisirten Magneten dar.

**) Man könnte dies bezeichnen als die Forderung stetiger *Biegung;* mit ihr ist in unserm Falle die Forderung stetiger *Krümmung* von selber erfüllt, denn in s_1 und s_2 wird die Krümmung sämmtlicher Meridiancurven zu 0, sämmtliche Krümmungsradien werden hier unendlich gross.

***) Die Einschränkung, welche wir mit dem Werthe „singularitätenfrei" machen, ist hier durchaus nothwendig. Sehn wir nämlich von der Forderung bestimmter Tan-

tion $D(s_1, s_2)$ in Bezug auf zwei nicht coïncidirende Punkte s_1 und s_2 verschwindet, sind dargestellt durch folgende Gleichung:

$$(6) \qquad \cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \frac{\alpha\cos\varphi}{\sqrt{1+\alpha^2\cos^2\varphi}} + 1,$$

in welcher α eine willkürliche Constante bedeutet. — Dabei verstehn wir unter φ, ψ_1 und ψ_2 die folgenden eigenthümlichen Bestimmungsstücke, Coordinaten, eines Punktes P der Fläche: φ ist das Azimuth seiner Meridianhalbebene, d. h. der Ebene durch P, s_1 und s_2, gegen eine passend gewählte Ebene $\varphi = 0$, und ψ_1 und ψ_2 sind die Winkel, unter welchen seine Verbindungslinien E_1 und E_2 mit s_1 bezw. s_2 gegen die Linie $s_1 s_2$ geneigt sind.

Wir sehen somit, dass es nur eine begrenzte Gattung von Flächen giebt, deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ zu 0 werden kann, ohne dass ihre Pole s_1 und s_2 zusammenfallen, und auch bei diesen Flächen tritt das Verschwinden von $D(s_1, s_2)$ nur ein, wenn wir die Pole s_1 und s_2 in zwei ganz speciell ausgezeichnete Punkte hineinrücken lassen. Bei allen anderen Lagen von s_1 und s_2 auf diesen Flächen wird $D(s_1, s_2)$ von 0 verschiedene (also positive) Werthe annehmen, und es wird daher der grösste aller Werthe, die Configurationsconstante c dieser Flächen, sicherlich nicht gleich 0 sein. *Es giebt somit überhaupt keine geschlossenen Flächen im Raume, deren Configurationsconstante c gleich 0 ist.*

§ 11.

Die Configurationsconstanten zweier ebner Curven, die durch Abbildung nach reciproken Radien aus einander hervorgehn.

Bei den Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen thun wir gut daran, an eine von unseren früheren Darstellungen der Oeffnungsfunction etwas abweichende Form derselben anzuknüpfen, und wollen wir daher diese zunächst ableiten.

Ursprünglich definirt war die Oeffnungsfunction einer geschlossenen Curve bezw. Fläche σ in Bezug auf die Pole s_1 und s_2 als der gemeinsame Werth zweier Integrale [vgl. (5), pag. 11]:

$$(1) \quad D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int_{\alpha}[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] \quad \text{oder} \quad = -\frac{1}{h\pi}\int_{\beta}[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}],$$

---

gentialebnen in s_1 und s_2 ab, so giebt es thatsächlich noch andere Flächen, deren Oeffnungsfunction $D(s_1, s_2)$ zu 0 wird, selbst wenn wir die in der Anmerkung pag. 31 erwähnte Modification in der Definition eintreten lassen; es sind dies alle Flächen $\cos\psi_1 + \cos\psi_2 = \omega(\varphi) + 1$, bei welcher $\omega(\varphi)$ eine sonst ganz *willkürliche* Function von φ darstellt, die nur der einen Bedingung unterworfen ist, dass $\int_0^{2\pi}\omega(\varphi)\,d\varphi = 0$ sein muss.

und hier wieder waren die Integrationsgebiete α bezw. β definirt als die Gesammtheit aller Curven- oder Flächenelemente $d\alpha$, die von s_1 aus grösser als von s_2, bezw. aller Elemente $d\beta$, die umgekehrt von s_2 aus grösser als von s_1 erscheinen, sodass demnach:

$$[(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] \textit{ positiv}, \text{ also } = \text{ abs } [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}]$$

und

$$[(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}] \textit{ negativ}, \text{ also } = - \text{ abs } [(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}];$$

demgemäss können wir unsere obigen Darstellungen (1) für $D(s_1, s_2)$ auch folgendermassen schreiben:

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int_\alpha \text{abs } [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}], \quad D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int_\beta \text{abs } [(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}],$$

und aus diesen Gleichungen folgt durch Addition:

$$2D(s_1, s_2) = \frac{1}{h\pi}\int_\alpha \text{abs } [(d\alpha)_{s_1} - (d\alpha)_{s_2}] + \frac{1}{h\pi}\int_\beta \text{abs } [(d\beta)_{s_1} - (d\beta)_{s_2}].$$

Diese Summe rechterhand kann man nun aber augenscheinlich als ein einziges über α und β, d. h. also *über die ganze Begrenzung* σ *hinerstrecktes Integral* schreiben, und es folgt daher schliesslich:

$$(2) \qquad D(s_1, s_2) = \frac{1}{2h\pi}\int_\sigma \text{abs } [(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}],$$

eine Darstellungsform für die Oeffnungsfunction, welche im Gegensatze zu unseren früheren [vgl. (1) und (2), pag. 24] unabhängig ist von der Eintheilung von σ in die beiden Theile α und β, und welche daher eine im Grunde genommene *einfachere Definition der Oeffnungsfunction* enthält — sich andrerseits zur wirklichen Berechnung im Allgemeinen schlechter, wie jene eignet.

Eins aber hat diese neue Darstellungsweise (2) der Oeffnungsfunction mit der ursprünglichen [vgl. (1)] gemeinsam — auch bei ihr spielt wieder eine hervorragende Rolle die Differenz

$$(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$$

der scheinbaren Grössen ein und desselben Elementes $d\sigma$ der Begrenzung von zwei verschiedenen Punkten s_1 und s_2 aus.

Bei Betrachtungen *in der Ebene*, auf die wir uns jetzt ausschliesslich beschränken wollen, lässt nun diese Differenz eine einfache geometrische Deutung zu, von der schon *Noble* in der citirten Arbeit Gebrauch macht, und deren auch wir uns jetzt mit Vortheil bedienen werden.

Wir fassen ein beliebiges Element $d\sigma$ einer ebnen geschlossenen Curve σ ins Auge — seine Endpunkte seien P und Q — und ferner

zwei Punkte s_1 und s_2 auf σ. Dann ist $(d\sigma)_{s_1}$, die scheinbare Grösse des Elementes $d\sigma$ von s_1 aus, der Winkel, welchen der Strahl $s_1 P$ beschreibt, wenn wir den Punkt P längs $d\sigma$ nach Q rücken lassen, und entsprechend $(d\sigma)_{s_2}$ der Winkel, den der Strahl $s_2 P$ bei dieser Bewegung beschreibt. Führen wir also die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 ein, welche diese Strahlen mit $s_1 s_2$ (specieller mit der Richtung $s_2 \rightarrow s_1$) bilden, so sind $(d\sigma)_{s_1}$ und $(d\sigma)_{s_2}$ deren Zuwächse $d\vartheta_1$ und $d\vartheta_2$ während der angegebenen Bewegung, also:

$$(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2} = d\vartheta_1 - d\vartheta_2.$$

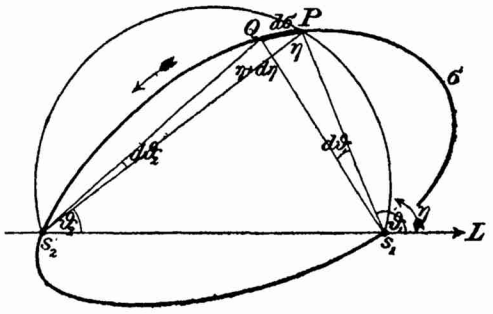

Fig. 6.

Nun ist aber $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \eta$, d. h. gleich dem Winkel, welchen die Strahlen $s_1 P$ und $s_2 P$ im Punkte P mit einander bilden, und wir können daher kurz schreiben:

$$(3) \qquad (d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2} = d\eta$$

d. h. *die Differenz* $(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$ *ist gleich dem Zuwachs* $d\eta$, *den der Winkel* η *erfährt, wenn wir seinen Scheitelpunkt* P *das Curvenelement* $d\sigma$ *durchlaufen lassen* [vgl. die Figur].

Doch dieses Resultat besitzt in dieser Form noch nicht den genügenden Grad von Allgemeinheit. So haben wir z. B. bisher noch gar nicht auf das Vorzeichen von $(d\sigma)_{s_1}$ und $(d\sigma)_{s_2}$, d. h. noch gar nicht darauf geachtet, auf welche Seite des Curvenelementes $d\sigma$ man denn von s_1 bezw. s_2 aus blickt, ob auf die innere oder die äussere Seite*); auch haben wir bisher nichts darüber festgesetzt, in welcher Richtung wir uns den Scheitelpunkt P des Winkels η das Element $d\sigma$ durchlaufen denken.

Um daher zunächst das in (3) erhaltene Resultat näher zu präcisiren, wollen wir zuvörderst bei der Curve σ zwischen einer *positiven und negativen Umlaufsrichtung* unterscheiden, und zwar wollen wir, wie das auch in der Functionentheorie üblich ist, speciell als *positiv* diejenige Richtung bezeichnen, in welcher man längs der Curve σ fortgehn muss, um das Innengebiet $\mathfrak{I}$ von σ stets *zu seiner Linken* zu behalten.

Sodann empfiehlt es sich weiter, unter η nicht immer gerade den kleinsten Winkel zwischen $s_1 P$ und $s_2 P$ zu verstehn, η nicht nur zwischen 0 und π zu rechnen, sondern fortlaufend von 0 bis 2π, und zwar gestatten dies die folgenden Ueberlegungen: Legt man durch die drei Punkte

*) Vgl. die Anmerkung pag. 10.

s_1, s_2 und P einen Kreisbogen, so bildet dieser, wie man leicht übersieht, mit der Verlängerung von $s_1 s_2$, z. B. über s_1 hinaus, d. h. mit der Richtung L, den Winkel η, und wir können daher η geradezu durch diesen Winkel definiren — und jetzt hindert uns nichts, diesen fortlaufend von 0 bis 2π zu zählen, und zwar wollen wir festsetzen, dass wir ihn von L aus *in positivem Sinne* rechnen, d. h. in dem Sinne, welcher der positiven Umlaufsrichtung von σ entspricht. — Läge also z. B. in unserer Figur 6 der Punkt P unterhalb der Linie $s_1 s_2$, so käme ihm nach dieser Definition ein Werth η zwischen π und 2π zu.

Genauere Definition der Grösse η. — *Unter der einem Punkte P zugehörigen Grösse η verstehn wir den Winkel, welchen der durch P gelegte Kreisbogen $s_1 s_2$ im Punkte s_1 mit der Verlängerung L der Linie $s_1 s_2$ bildet; und zwar denken wir uns diesen Winkel von L ab in positivem Sinne gezählt von 0 bis 2π.*

Bedienen wir uns jetzt dieser Definition, so lehrt eine leichte Ueberlegung, dass wir allen möglichen Fällen, welche hinsichtlich der Lage des Elementes $d\sigma$ zu den Punkten s_1 und s_2 eintreten können, Rechnung tragen, wenn wir unser obiges Resultat (3) jetzt präciser so aussprechen:

Erster Satz. — *Die Differenz $(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$ der scheinbaren Grössen eines Curvenelementes $d\sigma$ von zwei Punkten s_1 und s_2 aus ist gleich dem Zuwachs $d\eta$, welchen die Grösse η auf dem Elemente $d\sigma$ erfährt, wenn der Punkt P die Curve σ in positivem Sinne durchläuft, gleichgültig, ob das Element $d\sigma$ dem einen oder dem andern der beiden Theile σ_1 und σ_2 angehört, in welche s_1 und s_2 die Curve σ zerlegen**). —

Nunmehr bilden wir unsere Curve σ von einem beliebigen Centrum o aus nach reciproken Radien ab. Die so entstehende Bildcurve sei σ' und die den Punkten s_1 und s_2 von σ conjugirten Punkte von σ' seien s_1' und s_2'. — Dann wollen wir einmal die Oeffnungsfunctionen D und D' der Curven σ und σ' in Bezug auf die Punkte s_1, s_2 bezw. s_1', s_2' als Pole näher untersuchen, d. h. also nach (2) die Ausdrücke:

$$D(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \operatorname{abs}\left[(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}\right] \tag{4}$$

und

$$D'(s_1', s_2') = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'} \operatorname{abs}\left[(d\sigma')_{s_1'} - (d\sigma')_{s_2'}\right] \tag{4'}$$

---

*) Der Satz gilt nämlich nicht mehr für solche Curvenelemente, welche einen der Punkte s_1 oder s_2 *in ihrem Innern* enthalten, da sich an diesen Stellen η sprungweise — um den Werth π — ändert. Deshalb empfiehlt es sich auch weiterhin öfters diese Theile σ_1 und σ_2, auf deren jedem η stetig ist, gesondert zu betrachten.

— denn bei Betrachtungen in der Ebene ist ja $h = 1$ [vgl. pag. 7]. — Unserem obigen Satze zufolge können wir dafür nun auch schreiben:

$$(5)\quad D(s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma} \text{abs}\, d\eta, \qquad \text{bezw.} \qquad D'(s_1', s_2') = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'} \text{abs}\, d\eta',$$

wenn $d\eta$ und $d\eta'$ die Zuwächse bedeuten, welche die, zwei Punkten P und P' zugehörigen, Grössen η und η' erfahren, wenn wir diese Punkte die einzelnen Elemente von σ bezw. σ' durchlaufen lassen.

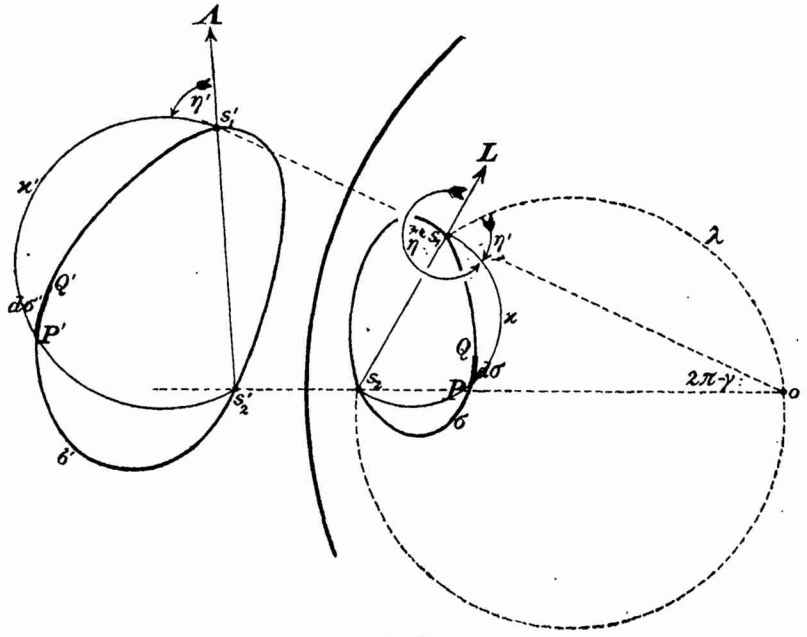

Fig. 7.

Fassen wir nun speciell zwei zu einander *conjugirte Elemente* $d\sigma$ und $d\sigma'$ ins Auge und verstehn ausserdem unter P und P' zwei *conjugirte Punkte*, so wird, wenn P das Element $d\sigma$ durchläuft, P' von selber das Element $d\sigma'$ durchlaufen, und können wir dann unter $d\eta$ und $d\eta'$ speciell diejenigen Zuwächse verstehn, welche η und η' bei dieser *cohärenten* Bewegung der Punkte P und P' erfahren, gleichgültig, ob sich bei ihr P und P' auf σ bezw. σ' in positivem oder negativem Sinne bewegen, denn den Formeln (5) zufolge kommt es nur auf die absoluten Werthe der Aenderungen von η und η' an.

Um nun die in solcher Weise genauer definirten Incremente $d\eta$ und $d\eta'$ für conjugirte Elemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ näher untersuchen zu können, werden wir also zunächst den Zusammenhang zwischen den zwei conjugirten

Punkten P und P' entsprechenden Grössen η und η' festzustellen haben. — Wir legen dieserhalb durch die drei Punkte s_1, s_2 und P einerseits und durch s_1', s_2' und P' andrerseits zwei Kreisbogen $\varkappa$ und $\varkappa'$. Dann sind η und η' die Winkel, welche diese Bogen in s_1 und s_1', mit den Richtungen L bezw. Λ bilden, diese Winkel von L und Λ aus in positivem Sinne gerechnet.

Nun sind $\varkappa$ und $\varkappa'$ als Kreisbogen durch drei Paar conjugirter Punkte selber conjugirt zu einander, Winkel zwischen paarweise conjugirten Elementen sind aber einander gleich — denselben Winkel η', den $\varkappa'$ bei s_1' mit Λ bildet, wird also bei s_1 auch $\varkappa$ mit dem zu Λ conjugirten Kreisbogen einschliessen, d. h. mit dem durch das Abbildungscentrum o hindurchgehenden Bogen $s_1 s_2$, oder, wie wir kurz sagen wollen, mit dem Bogen λ:

$$\text{Winkel}\,(\varkappa, \lambda) = \eta'.$$

Nun lehrt aber eine einfache Ueberlegung, dass die Abbildung nach reciproken Radien den Drehungssinn umkehrt; wenn wir also bei s_1', um von Λ zu $\varkappa'$ zu gelangen, den Winkel η' in *positivem* Sinne durchlaufen mussten, so werden wir jetzt bei s_1, um von λ zu $\varkappa$ zu gelangen, in *negativem* Sinne um diesen Winkel η' weitergehn müssen [vgl. Figur 7].

Man kann demgemäss bei einer Umkreisung des Punktes s_1 auf zweierlei Weise von L zum Bogen $\varkappa$ gelangen: *entweder* man rückt zunächst in positivem Sinne vor bis zum Bogen λ — der dabei durchlaufene Winkel heisse γ — und geht alsdann um den Winkel η' zurück (d. h. in negativem Sinne), geht also *im Ganzen* in positivem Sinne um den Winkel $\gamma - \eta'$ vor, *oder aber zweitens* kann man (laut Definition von η) auch zum Bogen $\varkappa$ gelangen, indem man von L aus direct in positivem Sinne um den Winkel η weitergeht. Es folgt somit, dass $\gamma - \eta' = \eta$, bezw. $= \eta - 2\pi$, also

$$\eta + \eta' = \gamma, \text{ bezw. } = \gamma + 2\pi \tag{6}$$

ist, und zwar kann der Uebergang von einem dieser Werthe zum anderen nur stattfinden, wenn P durch einen der Punkte s_1 oder s_2, und demgemäss der Punkt P' durch s_1' bezw. s_2' hindurchgeht, da nur dann sich die Grössen η und η' unstetig ändern. — Beachten wir nun noch, dass der Bogen λ und damit auch der Winkel γ nur abhängt von der Lage von s_1 und s_2, nicht aber von der speciellen Lage des Punktes P, so können wir das erhaltene Resultat auch so aussprechen:

Zweiter Satz. — *Entsprechen die Grössen η und η' zwei conjugirten Punkten P und P', so hat ihre Summe $\eta + \eta'$ je einen constanten Werth für beliebige Lagen des Punktes P auf dem einen und auf dem anderen der beiden Theile σ_1 und σ_2, in die s_1 und s_2 die Curve σ zerlegen.*

Lassen wir nun P irgend ein Element $d\sigma$ z. B. des Theiles σ_1 und demgemäss P' das conjugirte Element $d\sigma'$ des entsprechenden Curventheiles σ_1' von σ' durchlaufen, so wird die Summe $\eta + \eta'$ bei dieser Bewegung denselben Werth behalten, die Zuwächse, welche die Grössen η und η' erfahren, werden sich gegenseitig zerstören, es folgt $d\eta + d\eta' = 0$ und daher

$$\text{abs } d\eta = \text{abs } d\eta'.$$

Es sind somit die je zwei conjugirten *Elementen* von σ_1 und σ_1' entsprechenden Antheile der beiden Integrale (5), und daher auch die über die conjugirten *Curvenstücke* σ_1 und σ_1' hinerstreckten Integrale selber einander gleich. — Was nun aber von diesen Curvenstücken σ_1 und σ_1' gilt, das gilt analog auch von den anderen Theilen σ_2 und σ_2' der Curven σ und σ'. Es sind also die den beiden *Theilen* von σ (d. h. σ_1 und σ_2) bezw. von σ' (d. h. σ_1' und σ_2') entsprechenden Integralantheile paarweise einander gleich und daher auch die über die *ganzen* Curven σ und σ' hinerstreckten Integrale (5) selber einander gleich. Es folgt somit das überaus einfache Resultat:

$$D(s_1, s_2) = D'(s_1', s_2'). \tag{7}$$

Erstes allgemeines Theorem. — *Es seien σ und σ' zwei Curven, die einander nach dem Gesetz der reciproken Radien conjugirt sind, und ferner mögen s_1, s_2 und s_1', s_2' zwei Paare conjugirter Punkte dieser Curven sein. Alsdann sind die Oeffnungsfunctionen von σ und σ', gebildet mit Bezug auf diese beiden conjugirten Punktepaare als Pole einander gleich; es ist stets $D(s_1, s_2) = D'(s_1', s_2')$.*

Aus diesem Theorem geht nun hervor, dass alle Werthe, welche die Oeffnungsfunction der einen dieser Curven bei beliebiger Lage der Pole annimmt, auch von der Oeffnungsfunction der anderen Curve angenommen werden können; beide Functionen werden daher auch denselben grössten Werth besitzen, d. h. beide Curven σ und σ' besitzen dieselbe Configurationsconstante c.

Zweites allgemeines Theorem. — *Zwei Curven σ und σ', welche einander nach dem Gesetz der reciproken Radien conjugirt sind, besitzen dieselbe Configurationsconstante.*

Aus diesem bemerkenswerthen Satze, der das eigentliche Ziel der Untersuchungen dieses Paragraphen bildete, wollen wir nun noch eine speciellere Folgerung ziehn: Ist die eine der Curven σ und σ' *convex* (richtiger gesagt *nirgends concav*), so ist nach dem dritten Satze pag. 27 ihre Configurationsconstante c kleiner als 1; folglich ist nach dem soeben bewiesenen allgemeinen Theorem auch die der anderen Curve kleiner als 1 und dieses Resultat können wir so aussprechen:

Specialsatz. — *Die Configurationsconstante jedes ebnen Bereiches, der durch Abbildung nach reciproken Radien von irgend einem Centrum aus in ein nirgend concaves Gebiet übergeführt werden kann, ist kleiner als* 1 (*nicht nur* $\leqq 1$).

Es hat danach also z. B. auch noch das aus der Ellipse durch Abbildung entstehende, unter Umständen sehr stark concave Gebiet eine Configurationsconstante, deren Werth hinter der 1 zurückbleibt. —

Wie schon in der Einleitung angedeutet wurde ist nun jedes beliebige ebne Gebiet in solche übereinandergreifende Theilgebiete zerlegbar, welche, wenn nicht selber bereits convex, doch durch Abbildung nach reciproken Radien in convexe Gebiete übergeführt werden können*), und damit nach dem soeben ausgesprochenen Satze auch *in lauter Theilgebiete, deren Configurationsconstanten kleiner als 1 sind.*

Dies letztere ist aber gerade der Inhalt eines Hauptsatzes des Herrn *Noble,* der ihn freilich auf ganz anderem directerem, Wege bewiesen hat. — Aus unseren Betrachtungen geht nun aber erst deutlich hervor, dass *die Noble'sche Eintheilung in Gebiete mit echtgebrochenen Configurationsconstanten im Wesentlichen identisch ist mit derjenigen, deren man sich früher bediente,* um für die Theilgebiete Fundamentalfunctionen aus vorgeschriebenen Randwerthen herstellen zu können, nämlich eben mit der Eintheilung in Gebiete, die entweder selber convex sind, oder doch wenigstens durch Abbildung nach reciproken Radien in convexe Gebiete übergeführt werden können [vgl. die Einleitung, pag. 6]. —

Schliesslich sei noch Folgendes bemerkt: Die naheliegende Vermuthung dass unsere für *Curven in der Ebene* abgeleiteten beiden Theoreme auch noch bei *Flächen im Raume* gelten möchten, dass also insbesondere zwei einander conjugirte Flächen im Raume gleiche Configurationsconstanten besässen, ist *wahrscheinlich nicht richtig.* — Es ist mir bisher nicht gelungen diese Frage in dem einen oder dem anderen Sinne endgültig zu beantworten; diese Untersuchungen im Raume bieten nämlich weit grössere Schwierigkeiten dar, wie die oben in der Ebene angestellten [vgl. C. N. Abhandl. I, pag. 115], weil dort eine ähnlich einfache Darstellung der Differenz $(d\sigma)_{s_1} - (d\sigma)_{s_2}$, wie wir sie oben im Falle der Ebene in der Formel (3) kennen lernten, nicht existirt.

*) Vgl. *Pockels* „Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Leipzig bei Teubner 1891, pag. 262.