Werk

Titel: Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. I. (Mit 9 Figuren im ...

Autor: Schwarzschild, K.

Jahr: 1902

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0055|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt. I.

Von

K. Schwarzschild in München.

§ 1.

Einleitung.

1. Kirchhoff's Beugungstheorie. Die Theorie der Reflexion, Brechung und Beugung des Lichts, welche Kirchhoff in seiner Abhandlung „Zur Theorie der Lichtstrahlen"*) gegeben hat, gilt mit vollem Recht als klassisch. Sie zeichnet sich aus durch formale Eleganz, leichte Anwendbarkeit und Erfolg im Vorhersagen zahlreicher Erscheinungen. Trotzdem genügt sie keineswegs allen physikalischen und mathematischen Ansprüchen, und dessen ist sich Kirchhoff bewusst gewesen, denn er sagt selbst in den einleitenden Worten jener Abhandlung: „Eine vollkommen befriedigende Theorie dieser Gegenstände aus den Hypothesen der Undulationstheorie zu entwickeln scheint auch heute noch nicht möglich zu sein." Es sei kurz an den Gedankengang Kirchhoffs erinnert und der schwache Punkt seiner Ableitungen hervorgehoben.

Jede Componente φ einer Lichtschwingung genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]$$

wobei a die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Für homogenes Licht der Schwingungsperiode τ kann man setzen:

$$\varphi = \text{pars real.}\left(e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}u\right)$$

wobei u von der Zeit unabhängig ist, und erhält dann für u die Differentialgleichung:

$$0 = k^2u + \frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2u}{\partial z^2} \tag{1}$$

*) Ges. Abh. von G. Kirchhoff. Nachtrag. Leipzig 1891, pag. 22. S. auch Kirchhoff's Optik. Zweite Vorlesung.

worin $k = \frac{2\pi}{a\tau}$, oder, wenn man die Wellenlänge $\lambda = a \cdot \tau$ einführt,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

ist. Jede Lösung der Gleichung (1) wollen wir ein „Wellenpotential" nennen.

Bezeichnet v eine zweite Lösung der Differentialgleichung (1), ein zweites Wellenpotential, so gilt nach dem Green'schen Satz:

$$0 = \int d\omega \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right),$$

das Integral erstreckt über die Oberfläche ω eines Raumes R, in welchem u und v nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig sind, und unter n die in's Innere dieses Raumes gerichtete Normale auf der Oberfläche verstanden. Genügt v denselben Bedingungen überall in R mit Ausnahme eines Punktes 0, in welchem es unstetig wird in der Form:

$$v = \frac{1}{r} + \text{functio continua} \quad (r \text{ Abstand vom Punkte } 0), \tag{3}$$

so folgt ebenfalls aus dem Green'schen Satz:

$$4\pi u(0) = \int d\omega \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} v \right). \tag{4}$$

Benutzt man für v den Ausdruck: $v = \frac{e^{-ikr}}{r}$, welcher der Differentialgleichung (1) genügt und im Punkte 0 in der verlangten Weise unstetig wird, so ergiebt sich:

$$4\pi u(0) = \int d\omega \left\{ u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{-ikr}}{r} \right\}. \tag{5}$$

Dies ist im Wesentlichen Kirchhoff's Ausdruck des Huygens'schen Princips. Die Gleichung besagt, dass — nach Kirchhoff's Worten — „die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche ω umschlossenen Raume angesehn werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche ω, da ein jedes der beiden Glieder, aus denen der Integrand zusammengesetzt ist, sich bezeichnen lässt als einem leuchtenden Punkte entsprechend, der am Orte von $d\omega$ sich befindet."

Will man mit Hülfe der Gleichung (5) die Werthe von u im Innern des Raumes R ableiten, so müssen die auf seiner Oberfläche geltenden Werthe von u sowohl, als von $\frac{\partial u}{\partial n}$, bekannt sein. Es ist aber keineswegs erlaubt, beliebige Werthe für diese *beiden* Grössen auf der Oberfläche ω vorzuschreiben, vielmehr lehrt die Theorie der Diffgl. $\Delta^2 u + k^2 u = 0$, dass durch Angabe *entweder* von u *oder* von $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Oberfläche der Verlauf von u im ganzen Raume R bestimmt ist. Sind daher z. B. die

Werthe von u auf der Oberfläche vorgeschrieben, so gehören dazu, von gewissen Mehrdeutigkeiten abgesehn, ganz bestimmte Werthe $\frac{\partial u}{\partial n}$, welche allein mit ihnen verträglich sind und welche erst bekannt werden, wenn man die Fortsetzung der Function u durch den ganzen Raum R bereits gefunden hat. So setzt die Anwendbarkeit der Gleichung (5) im Grunde schon jedes Mal die Lösung des Problems voraus.

Aber in vielen Fällen der Praxis ist es möglich, genäherte Angaben über u und *zugleich* über $\frac{\partial u}{\partial n}$ auf der Oberfläche eines bestimmten Raumes R zu machen. Einer Lichtquelle L stehe ein vollkommen schwarzer unendlicher ebener Schirm S mit einer Oeffnung A gegenüber. Es werde die Lichtbewegung in einem Punkte 0 hinter dem Schirme gesucht. Man grenze einen Raum R ab durch die Fläche ω_1 des Schirms, durch eine Fläche ω_2, welche die Oeffnung schliesst, und durch die ganz im Unendlichen verlaufende Fläche ω_3. Es werde angenommen, dass letztere keinen Beitrag zum Integral (5) liefert; dann bleibt eine Integration über die Flächen ω_1 und ω_2 auszuführen. Nun macht Kirchhoff plausibel, dass wenigstens für verschwindend kleine Wellenlänge überall an dem vollkommen schwarzen Schirm S sowohl u als $\frac{\partial u}{\partial n}$ Null sei, und überall in der Oeffnung A u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ diejenigen Werthe haben, welche sie dort ohne Vorhandensein des Schirmes S bei freiem Leuchten der Lichtquelle L annehmen würden. Hiermit verschwindet auch das Integral über ω_1 und es bleibt allein das Integral über die Oeffnung, in welchem für u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ die leicht zu berechnenden bei ungehindertem Leuchten des Punktes L gültigen Werthe einzusetzen sind. Das Problem ist somit auf eine einfache Quadratur zurückgeführt. Dass man sich bei der Ausführung dieser Quadratur gewöhnlich auf Annäherungen beschränkt, welche nur für grosse Entfernung des Punktes 0 von der Oeffnung und Lage in der Nähe der geometrischen

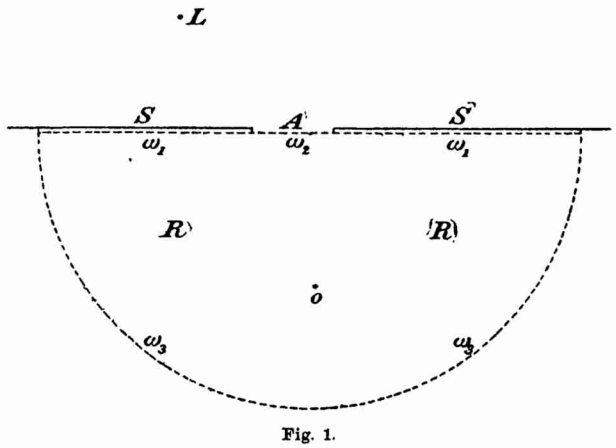

Fig. 1.

Schattengrenze zulässig sind, ist eine Verminderung des Gültigkeitsbereiches der Theorie, welche sich durch Rechenarbeit ohne principielle Schwierigkeiten beseitigen liesse. Die *einzige, aber sehr wesentliche Schwäche* der Theorie bilden die Annahmen über die Randwerthe von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$. Prüft man nämlich nach, welche Randwerthe die Function u_0 und ihre Derivirte $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ annimmt, wenn man in dem Integral (5) den Punkt 0, von dem aus die Entfernungen r gemessen werden, an den Schirm S oder in die Oeffnung A (auf die Fläche ω_2) rücken lässt, so findet man, dass diese Randwerthe keineswegs mit den angenommenen Ausgangswerthen übereinstimmen. Allerdings wird u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ auf dem Schirm in grösserer Entfernung von der Oeffnung Null, aber um die Oeffnung herum lässt sich auf dem Schirm ein Streifen von mehreren Wellenlängen Breite abgrenzen, in welchem sowohl u_0 als $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ beträchtliche Werthe annehmen. Ganz ähnlich verhält es sich im Innern der Oeffnung, auf ω_2. Auch hier stimmt nach der Mitte der Oeffnung zu (die Oeffnung als gross gegen die Wellenlänge vorausgesetzt) u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ mit den bei der Bildung des Integrals angenommenen Werthen überein, wie sie bei ungehinderter Ausbreitung des Lichts von L aus gelten würden, aber auch im Innern der Oeffnung hat man längs ihres Randes einen ähnlichen Streifen von mehreren Wellenlängen Breite abzugrenzen, in welchem starke Abweichungen von diesen Ausgangswerthen auftreten.

Es ist hiernach nicht unverständlich, dass die Kirchhoff'sche Beugungstheorie für Oeffnungen, die gross gegen die Wellenlänge sind, die Beobachtungsresultate gut wieder giebt. Denn man kann sich vorstellen, dass die Wirkung jener Streifen um den Rand der Oeffnung herum verschwindet, solange die Fläche der Streifen klein ist gegen die Fläche der ganzen Oeffnung. Aber zu beweisen, dass dies nothwendig zutreffe, ist eine schwierige Aufgabe, deren Behandlung bislang nicht versucht wurde.

Mathematisch aber ist die Kirchhoff'sche Beugungstheorie insbesondere deshalb so unbefriedigend, weil die Werthe, welche u_0 und $\frac{\partial u_0}{\partial n}$ in jenen Streifen annehmen, von der Gestalt der Oeffnungen abhängen und allgemein nicht zu charakterisiren sind, sodass der Kirchhoff'sche Ansatz überhaupt kein präcise definirtes mathematisches Problem löst.

2. Neuere Fortschritte. Sollte ein Fortschritt über Kirchhoff hinaus erzielt werden, so galt es zunächst, ein solches präcise definirtes mathematisches Problem aufzustellen, und dazu musste gerade die Benutzung „vollkommen schwarzer" Körper als Schirme, die in Kirchhoff's

Behandlung die einfachsten Resultate giebt, ausgeschlossen werden. Denn es lässt sich keine Randbedingung für das Wellenpotential u an der Oberfläche eines Körpers angeben, welche das Auftreten sowohl von reflectirten als von gebrochenen Wellen verhindern würde. Es liegt dies daran, dass, wie schon oben erwähnt, nicht gleichzeitig u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ an einer Fläche gleich Null gesetzt werden können. Herr Voigt*) hat allerdings eine mathematische Form gefunden, gestützt auf frühere Untersuchungen von Herrn Sommerfeld**), welche das physikalische Verhalten schwarzer Körper mindestens mit grosser Annäherung zum Ausdruck bringt. Er fasst nämlich die Oberfläche eines schwarzen Körpers als „Verzweigungsfläche" eines idealen Riemann'schen Raumes auf, durch welche der dem ersten Blatt einer Riemann'schen Fläche entsprechende wirkliche Raum mit anderen gedachten Räumen zusammenhängt, und stellt sich vor, dass die Lichtbewegung durch die Verzweigungsfläche in einen jener gedachten Räume übergeht und ebenso aus dem wirklichen Raum verschwindet, wie sie von schwarzen Körpern vernichtet wird. Dabei bleibt aber, wie Herr Voigt selbst angiebt, nicht ausgeschlossen, dass ein kleiner Theil der Lichtbewegung aus den gedachten Räumen wieder in den wirklichen zurückkommt, und zudem ist das Problem noch immer mit einer gewissen Unbestimmtheit behaftet, insofern die Art der Verzweigung des ganzen Riemann'schen Raums durch die Form der vorhandenen schwarzen Körper nicht eindeutig bestimmt ist.

Zu einer klar bestimmten Aufgabe kommt man erst dann, wenn man die Lichtbewegung nicht durch vollkommen schwarze, sondern durch vollkommen spiegelnde Schirme aufgehalten denkt. Ein vollkommen spiegelnder Körper ist nach der electromagnetischen Lichttheorie ein vollkommener Leiter der Electricität, auf dessen Oberfläche die electrischen Kraftlinien stets senkrecht stehn müssen. Soll daher die Beugung des Lichts durch vollkommen spiegelnde Schirme gefunden werden, so läuft dies auf die mathematische Aufgabe hinaus, eine Lösung des bekannten Maxwell'schen Systems partieller Differentialgleichungen zu finden von der Art, dass überall auf der Oberfläche der Schirme die tangential zur Oberfläche gerichteten Componenten der electrischen Kraft verschwinden.

Uebrigens entspricht die Voraussetzung vollkommen spiegelnder Schirme den Anordnungen bei vielen wirklichen Beugungsversuchen gewiss ebensosehr, wie die Voraussetzung ihrer vollkommenen Schwärze.

Das Beugungsproblem ist zuerst von Herrn Poincaré***) in dieser

*) Kompendium der theor. Physik Bd. II, S. 768 und Gött. Nachr. 1899. Heft 1.
**) Math. Annalen Bd. 47, S. 317.
***) Acta Mathematica Bd. XVI, pag. 297.

Weise präcisirt und für den speciellen Fall der Beugung an einem „graden Rand“ in Angriff genommen worden. Unter einem „geraden Rand“ ist hier und im folgenden die gerade Kante einer unendlichen und unendlich dünnen Halbebene zu verstehen, welche den beugenden Schirm bildet. Während aber Herr Poincaré sich auf eine näherungsweise Lösung für Punkte in grosser Entfernung von der Kante beschränkt hat, ist Herrn Sommerfeld*) späterhin die exacte und vollständige Lösung des ganzen Problems gelungen. Diesem ersten und bisher einzigen Beispiel der exacten Behandlung eines Beugungsproblems fügt die gegenwärtige Arbeit ein zweites hinzu, sie behandelt die Beugung des Lichts durch einen Spalt mit unendlich langen parallelen Kanten.

§ 2.

Inhaltsübersicht.

3. Vorbemerkungen. Es liegt nahe, das Problem der Beugung durch einen Spalt, durch zwei grade Ränder, in analoger Weise in Angriff zu nehmen, wie von Herrn Sommerfeld (l. c.) die Beugung an einem Rand behandelt worden ist. Die Rolle, welche für den graden Rand den Bessel'schen Cylinderfunctionen zufällt, spielen für den Spalt die Functionen des elliptischen Cylinders und wie jene als Grenzfall der Kugelfunctionen erscheinen, bilden diese einen Grenzfall der Lamé'schen Functionen. Indessen trifft man bei einem Versuche, von der Theorie der Lamé'schen Functionen auszugehen, auf Schwierigkeiten, die der verwickelten Natur der Lamé'schen Functionen entspringen und ein Vordringen von dieser Seite vorläufig zu vereiteln scheinen.

Ich habe zur Lösung des Problems ein Näherungsverfahren eingeschlagen, das nicht nach einer derartigen Analogie gebildet ist, sondern aus einer directen Verwendung der von Herrn Sommerfeld erhaltenen Resultate entspringt.

Eine Bemerkung ist vorauszuschicken. Es handelt sich in gegenwärtiger, wie in Herrn Sommerfeld's Arbeit stets nur um die „ebenen“ Probleme. Es wird die Lichtquelle als eine zu den Schirmkanten parallele leuchtende Linie oder als unendlich entfernt in einer zu den Schirmkanten senkrechten Ebene vorausgesetzt, sodass der ganze Bewegungszustand nur von zwei in dieser Ebene zu zählenden rechtwinklichen Coordinaten abhängig wird. Im folgenden habe ich mich, um das ohnehin verwickelte Problem ein wenig zu vereinfachen, noch weiter auf den wichtigsten Specialfall beschränkt, dass die Lichtquelle in einer auf der Schirmebene

*) Math. Annalen l. c.

senkrechten Richtung unendlich weit entfernt ist, dass das Licht normal auf den Spalt auftrifft.

4. Methode der Lösung. Das ebene Problem für den Spalt reducirt sich leicht auf folgende Aufgabe: eine Function u zu bestimmen, welche überall im Raume der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \tag{6}$$

genügt und welche selbst oder deren Normal-Derivirte auf dem Schirm S vorgeschriebene Randwerthe annimmt. Wir wollen hier der Einfachheit wegen nur den ersten Fall in's Auge fassen, dass die Randwerthe für u selbst vorgeschrieben sind.

Der Schirm besteht aus einer unendlichen ebenen, unendlich dünnen Platte, aus der ein Parallelstreifen, der Spalt, herausgeschnitten ist.

Die Schirmhälften zu beiden Seiten des Spaltes, aus welchen sich der ganze Schirm S zusammensetzt, unterscheide man als rechte Schirmhälfte R und linke Schirmhälfte L. Denkt man sich für einen Augenblick die linke Schirmhälfte fort und die Werthe u nur auf der rechten Schirmhälfte vorgeschrieben, so kann man die hieraus entspringende Randwerthaufgabe sofort lösen: Aus einer gewissen von Herrn Sommerfeld construirten, aber von ihm nicht weiter verwandten Function U lässt sich nämlich unmittelbar eine andere Function g herstellen, welche als Green'sche Function für diese Randwerthaufgabe betrachtet werden kann. Denn diese Function g hat die Eigenschaften, überall im Raume der Differentialgleichung (6) zu genügen mit Ausnahme eines Punktes 0, in welchem sie unstetig wird, wie der Logarithmus der reciproken Distanz von diesem Punkte, und überall auf der rechten Schirmhälfte Null zu sein. Sind u die für die gesuchte Lösung von (6) auf der rechten Schirmhälfte vorgeschriebenen Randwerthe, so bilde man:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega\, u \frac{\partial g}{\partial n} \tag{7}$$

das Integral über die Oberfläche ω der rechten Schirmhälfte erstreckt und unter n die äussere Normale auf dem Schirm verstanden. Dann lehrt der (hier auf die Ebene anzuwendende) Green'sche Satz, dass $u(0)$ als Function des Ortes des Punktes 0 die Differentialgleichung (6) löst und auf der rechten Schirmhälfte die Randwerthe u annimmt, also die Lösung der gestellten Randwerthaufgabe ist. Im Grunde ist dabei freilich vorausgesetzt, dass man der Existenz einer Function u von diesen Eigenschaften im Voraus gewiss sei. Da dies nicht der Fall ist — da ausreichende allgemeine Existenzbeweise für Lösungen der Differentialgleichung (6) mit vorgeschriebenen Randwerthen noch nicht vorliegen, ist der Existenzbeweis

eigens zu führen, was aber grade auf Grund der Darstellung (7) von u leicht wird.

Ganz ähnlich kann man sich die rechte Schirmhälfte entfernt denken und eine Lösung von (6), ein „Wellenpotential" suchen, welches auf der linken Schirmhälfte vorgeschriebene Randwerthe u annimmt. Die Lösung dieser zweiten Randwerthaufgabe erhält man mit Hülfe einer ebenso zu gewinnenden Green'schen Function g' in der Form:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, u \frac{\partial g'}{\partial n}. \tag{8}$$

Das Integral ist nun über die linke Schirmhälfte erstreckt. Hiermit sind also die Randwerthaufgaben für die beiden einzelnen Schirmhälften gelöst. Die Lösung der Aufgabe für den ganzen Schirm, für den Spalt, gelingt durch ein Annäherungsverfahren, welches aus einer fortwährenden abwechselnden Lösung dieser beiden auf die einzelnen Schirmhälften bezüglichen Randwerthaufgaben besteht.

Man gehe aus von den vorgeschriebenen Randwerthen u auf der rechten Schirmhälfte R und bilde nach (7) ein Wellenpotential, welches diese Randwerthe annimmt und welches mit u_1 bezeichnet werden möge. Auf der linken Schirmhälfte L wird dieses Wellenpotential gewisse von Null verschiedene Werthe annehmen. Man suche die Ergänzung dieser Werthe zu den auf L vorgeschriebenen Randwerthen und bilde mit Hülfe derselben nach (8) ein zweites Wellenpotential u_2. Die Addition der beiden Wellenpotentiale ergiebt eine Function $u_1 + u_2$, welche auf L die vorgeschriebenen Randwerthe annimmt und welche dasselbe auf R leisten würde, wenn nicht das zweite von L ausgehende Potential u_2 auf R von Null verschiedene Werthe erhielte. Um wieder auf R die vorgeschriebenen Randwerthe herzustellen, hat man in (7) für u diese Werthe, welche das von L ausgehende Wellenpotential u_2 auf R annimmt, mit negativem Vorzeichen einzusetzen und das entstehende Wellenpotential u_3 zu $u_1 + u_2$ zu addiren. Die Function $u_1 + u_2 + u_3$ ergiebt nun wieder auf R die vorgeschriebenen Randwerthe, hingegen lässt sie einen kleinen Rest auf L, weil u_3 auf L nicht Null ist. Man bilde mit Hülfe der negativ genommenen Restwerthe nach (8) ein viertes Wellenpotential u_4 und addire es zu den vorigen. Dann entsteht eine Function, die auf L die vorgeschriebenen Werthe annimmt, — und so fort gehend erhält man stets Functionen, die auf der einen Schirmhälfte die vorgeschriebenen Randwerthe liefern, während sie auf der andern einen Rest lassen. Wenn der Rest bei ständiger Fortsetzung derselben beiden Operationen schliesslich verschwindet, so muss man auf diese Weise eine Lösung des Beugungsproblems für den Spalt erhalten.

Das Verfahren ist kurz zu charakterisiren als „ein fortwährendes

Hinüber- und Herüberwerfen der Randwerthe von der einen Schirmhälfte auf die andre.“ Es ist ein besonders glücklicher Umstand, dass die im Allgemeinen recht complicirte Function g einen sehr einfachen Ausdruck annimmt, sobald der Punkt 0 in die Schirmebene rückt, sodass die Wirkung des Herüberwerfens verhältnissmässig leicht zu übersehen ist. So viel schien von vornherein höchst plausibel, dass das Verfahren convergent sein würde, wenn man den Spalt breit gegen die Wellenlänge voraussetzte. Infolge jenes Umstandes hat sich aber der Nachweis der *Convergenz des Verfahrens für jeden noch so engen Spalt* erbringen lassen.

Für den zweiten Fall, dass nicht die Randwerthe von u selbst, sondern seiner Normalderivirten vorgeschrieben sind, liessen sich auf ganz ähnlichem Wege entsprechende Resultate gewinnen.

5. Resultate. Hiermit ist eine Lösung des Problems erreicht, welche den Mathematiker etwa in dem Sinne befriedigen kann, wie die Lösung einer speciellen Aufgabe der Potentialtheorie durch Neumann's Methode des arithmetischen Mittels. Es ist jedenfalls der strenge Nachweis erbracht, dass eine Lösung der gestellten Randwerthaufgabe überhaupt möglich ist, was bekanntlich bisher nur nach dem „Rayleigh'schen Princip“ wahrscheinlich zu machen war, aber keineswegs mit Sicherheit fest stand.

Indessen reicht diese Form der Lösung auch aus, um eine Reihe von physikalischen Folgerungen abzuleiten. Wenn nämlich der Spalt sehr breit gegen die Wellenlänge ist, convergirt das Näherungsverfahren so rasch, dass man die höheren Glieder gegenüber den ersten Gliedern u_1+u_2 vernachlässigen kann — von solchen Fällen abgesehen, wo die ersten Glieder selbst sehr klein werden. Dadurch lässt sich erweisen, dass die bekannte aus der Kirchhoff'schen Theorie entspringende Formel für die Intensität des durch einen Spalt gebeugten Lichts:

$$(9) \qquad J = \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi\right)}{\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi} \right]^2$$

(d Spaltbreite, λ Wellenlänge, χ Beugungswinkel)

bei weitem Spalt und bei kleinen Beugungswinkeln eine gute Annäherung an die strenge Theorie darstellt. *Wir erhalten also eine strenge Bestätigung der auf mathematisch unzulässiger Grundlage abgeleiteten älteren Formel für die Fälle, in welchen für die ältere Theorie überhaupt Gültigkeit zu vermuthen war. Ferner findet sich eine neue exaktere Formel für die Intensitätsvertheilung:*

$$(10) \qquad J = \left[\frac{\sin\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi\right)}{2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\frac{\chi}{2}} \right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi\right)}{2\pi \frac{d}{\lambda} \cos\frac{\chi}{2}} \right]^2,$$

welche sich bei wachsender Spaltbreite auch für immer grössere und grössere Beugungswinkel der strengen Theorie anschliesst.

Weitere Folgerungen sind die, dass bei breitem Spalt abgesehn von den ganz grossen Beugungswinkeln in der Nähe eines Rechten *keine Polarisation* des gebeugten Lichtes eintritt, dass hingegen eine *Phasenverschiebung* zwischen den Schwingungscomponenten parallel zum Spalt und senkrecht zum Spalt besteht.

Schliesslich findet man hier auch die strenge Grundlage für die Theorie der Beugung von Impulsen durch einen Spalt, welche Herr Sommerfeld*) kürzlich in Rücksicht auf die Beugung der Röntgenstrahlen ausgeführt hat.

Was der Lösung durch das Näherungsverfahren fehlt, ist die Berechenbarkeit — wenigstens die practisch durchführbare — der höheren Glieder und damit des ganzen Intensitätsverlaufs für enge Spalten. Diese Lücke möglichst auszufüllen, ist ein zweiter später folgender Theil dieser Arbeit bestimmt.

Es sei noch angedeutet, dass die Lösung auch andrer Beugungsprobleme, z. B. der Beugung durch eine kreisförmige Oeffnung, mit Hülfe ganz ähnlicher Näherungsmethoden und daraus folgend eine begrenzte Bestätigung der Kirchhoff'schen Theorie auch für andere Fälle als möglich vorauszusehen ist.

§ 3.

Die Green'schen Functionen für den einfachen graden Rand.

6. Die beiden Randwerthaufgaben für den einfachen Rand. Wie im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, gründet sich die Lösung des Beugungsproblems für den Spalt auf die — im Wesentlichen — bereits aus Herrn Sommerfeld's Untersuchungen zu entnehmende Lösung gewisser Randwerthaufgaben für den einfachen graden Rand. Genau präcisirt sind es folgende Aufgaben für den graden Rand, die in Betracht kommen. Wir wählen als Nullpunkt einen Punkt der graden Kante selbst, den Schnitt des Schirms mit einer zu ihm senkrechten Ebene als positive y-Axe, senkrecht dazu die x-Axe, benutzen aber auch Polarcoordinaten r, φ, wobei auf der einen Schirmseite $S_a : \varphi = 0$, auf der andern $S_b : \varphi = 2\pi$ sein soll. Die *erste* Aufgabe ist nun die: Eine Function u zu suchen, die überall der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + k^2u = 0 \tag{11}$$

genügt, überall nebst ihren ersten Derivirten endlich und stetig ist und nur unstetig werden darf für $x = 0$, $y > 0$, beim Uebergang von einer

*) Zeischrift für Mathematik und Physik. Bd. 46. 1901.

Schirmseite auf die andere. Die Function muss, wenn man sich für $y > 0$ dem Werth $x = 0$ nähert, vorgeschriebene und eventuell für beide Schirmseiten verschiedene Werthe annehmen. Ferner muss sie im Unendlichen von der Form auslaufender Wellen sein — ein Ausdruck, der

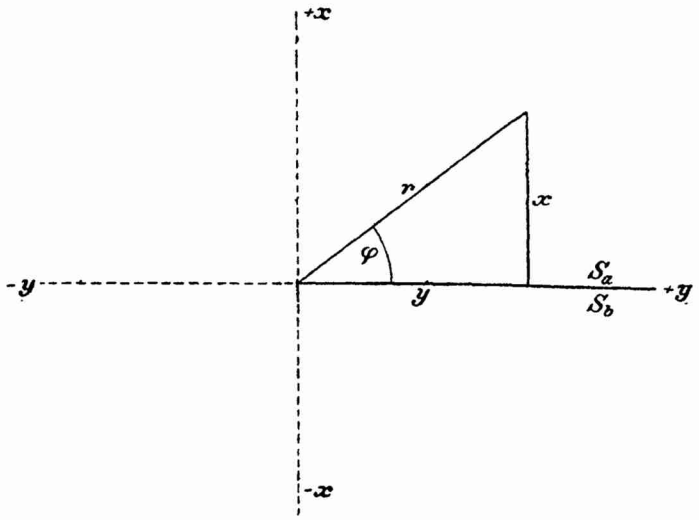

Fig. 2.

unten seine nähere Erläuterung finden wird. Bei der *zweiten* Aufgabe ist nur so viel geändert, dass an Stelle von u der Differentialquotient $\frac{du}{dx}$ auf beiden Seiten des Schirmes S_a und S_b vorgeschriebene Werthe annehmen muss; vorläufig wollen wir uns durchaus auf die erste Aufgabe beschränken.

7. Die Green'sche Function für die 1. Aufgabe. Die Rolle der Green'schen Function für die erste der beiden Randwerthaufgaben spielt der folgende Ausdruck:

$$g(r_0, \varphi_0, r, \varphi) = U(r_0, \varphi_0, r, \varphi) - U(r_0, \varphi_0, r, -\varphi), \tag{12}$$

worin U die in Herrn Sommerfeld's Arbeit (Math. Annalen Bd. 47, pag. 351) auftretende Function bedeutet:

$$U(r_0, \varphi_0, r, \varphi) = \frac{1}{4i\pi}\int U_0\left(k\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\alpha}\right) \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}}.$$

U und g hängen ab von der Lage eines „Argumentpunktes" r, φ und eines „Parameterpunktes" r_0, φ_0. Unter U_0 ist die Bessel'sche Function zweiter Art verstanden:

$$U_0(z) = \int_0^\infty du e^{-iz\cos iu}, \tag{13}$$

welche mit Heine's Cylinderfunctionen erster Art $J(z)$ und zweiter Art $K(z)$ durch die Relation:

$$U_0(z) = K(z) - \frac{i\pi}{2} J(z)$$

zusammenhängt. Die Integrationsvariable α ist complex und in der α-Ebene über einen Weg A zu führen, der an folgende Bedingungen gebunden ist. Man trage in der α-Ebene die Punkte ein, für welche

$$r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\alpha = 0$$

ist; das sind zwei conjugirte Punkte $P_1 P_2$ auf der imaginären Axe, und eine Reihe von Punkten P_1', P_2' u. s. w., deren Abscissen um Vielfache von 2π gegen die Abscissen von P_1 und P_2 vermehrt oder vermindert sind. Der Weg (A) beginnt nun im Positiv-imaginär-Unendlichen zwischen oder auf den Geraden pars real. $\alpha = -\pi$ und pars real. $\alpha = 0$, bleibt stets oberhalb der reellen Axe, läuft aber zwischen P_1 und der reellen Axe hindurch und kehrt zwischen oder auf den Graden pars real. $\alpha = \pi$ und pars real. $\alpha = 2\pi$ in's Positiv-imaginär-Unendliche zurück. Die Wurzel $\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\alpha}$ machen wir eindeutig, indem wir von den Punkten P_1, P_1' u. s. w. parallel zur imaginären Axe Sperrlinien S_1, S_1' in's Unendliche ziehn, und schreiben ihr auf der reellen Axe den positiven Werth vor. Es wird später zu betrachten sein, wie weit der Weg A in jedem Falle deformirt werden darf.

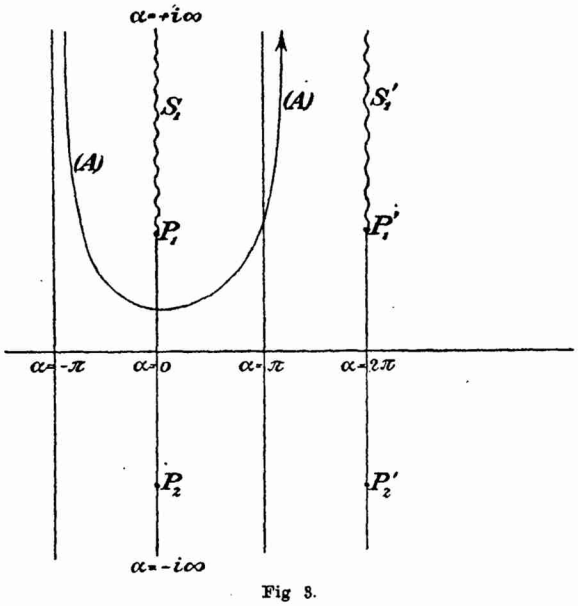

Fig 8.

Man sieht der Function g an, dass sie für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, wenn also der Argumentpunkt von der einen oder andern Seite auf den Schirm rückt, verschwindet. Aus Herrn Sommerfeld's Herstellungsweise der Function U geht hervor, dass sie selbst und damit auch g der Differentialgleichung (11) genügt. Ferner lässt sich zeigen, dass g nur im Parameterpunkte d. h. für $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$ unstetig wird und zwar wie der Logarithmus der reciproken Distanz von diesem Punkte. Diese Eigenschaften qualificiren die Function g zur Green'schen Function für die

eingangs gestellte Randwerthaufgabe. Wenn wir wüssten, dass es eine ausserhalb des Schirms überall endliche und stetige Lösung der Differentialgleichung gäbe, welche auf dem Schirm vorgeschriebene Werthe u annähme, so würde dieselbe durch das über beide Seiten des Schirmes zu erstreckende Integral:

$$2\pi u(0) = \int ds \frac{\partial g}{\partial n} u. \tag{14}$$

geliefert werden, unter der weiteren Voraussetzung, dass ein ähnliches über einen unendlich grossen Kreis zu führendes Zusatzintegral verschwände. Da aber die Theorie der Differentialgleichung (11) noch nicht bis zu einem allgemeinen Existenzbeweis für Lösungen in grösseren Gebieten durchgebildet ist, so müssen wir den Existenzbeweis im speciellen nachliefern, also zeigen, dass diese Integraldarstellung wirklich die vorgeschriebenen Randwerthe liefert, dass sie der Differentialgleichung (11) genügt und sich im Unendlichen verhält, wie es der physikalischen Natur unsrer Aufgabe entspricht.

Eine Specialisirung können wir schon hier vornehmen. Wir werden es stets nur mit auf beiden Schirmseiten gleichen Randwerthen u zu thun haben und können daher statt des obigen Integrals schreiben:

$$2\pi u(0) = \int_0^\infty dr\, u \left\{ \frac{\partial g}{\partial n_a} + \frac{\partial g}{\partial n_b} \right\}.$$

Da für $\varphi = 0$: $\frac{\partial g}{\partial n_a} = \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$ und für $\varphi = 2\pi$: $\frac{\partial g}{\partial n_b} = -\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \varphi}$ ist, so gilt:

$$\frac{\partial g}{\partial n_a} + \frac{\partial g}{\partial n_b} = \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} - \left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=2\pi} \right\}$$

und daraus ergiebt sich leicht mit Hülfe von (12), wenn wir noch die Abkürzung G einführen:

$$2\pi u(0) = \int_0^\infty dr\, u\, G, \tag{15}$$

$$G = G(r_0, \varphi_0, r) = \frac{1}{4i\pi r} \sin\frac{\varphi_0}{2} \int U_0\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\alpha}\right) \sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha \cdot \left\{ \frac{1}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \right\}. \tag{16}$$

8. Verschiedene Formen von G. Um die zu dem Existenzbeweis von $u(0)$ nöthigen Eigenschaften des Ausdrucks G leichter erkennen zu können, nehmen wir einige Umformungen mit ihm vor.

In Bezug auf die Bessel'sche Function $U_0(z)$ sei vorausbemerkt, dass sie zu singulären Punkten nur den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt hat. Im Nullpunkt wird sie unstetig in der Form:

$$U_0(z) = \log \frac{1}{z} + \text{funct. cont.} \tag{17}$$

Im Unendlichen hat sie den Grenzwerth:

$$U_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-i\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{18}$$

Für die Derivirte:

$$U_1(z) = \frac{d\,U_0(z)}{dz}$$

ergiebt sich daraus die Unstetigkeit im Nullpunkt:

$$U_1(z) = -\frac{1}{z} + \text{funct. cont.} \tag{19}$$

und der Grenzwerth im Unendlichen:

$$U_1(z) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-i\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{20}$$

Der Verlauf des obigen Integrationswegs (A) aus und nach dem Unendlichen ist so gewählt, dass der Ausdruck $-iz = -ik\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\alpha}$ im Unendlichen keinen reellen positiven Theil bekommt, sodass der ganze Integrand von G auf den entfernten Theilen des Integrationswegs hinreichend klein wird, um trotz der unendlichen Weglänge nur einen endlichen Beitrag zum Integral zu liefern.

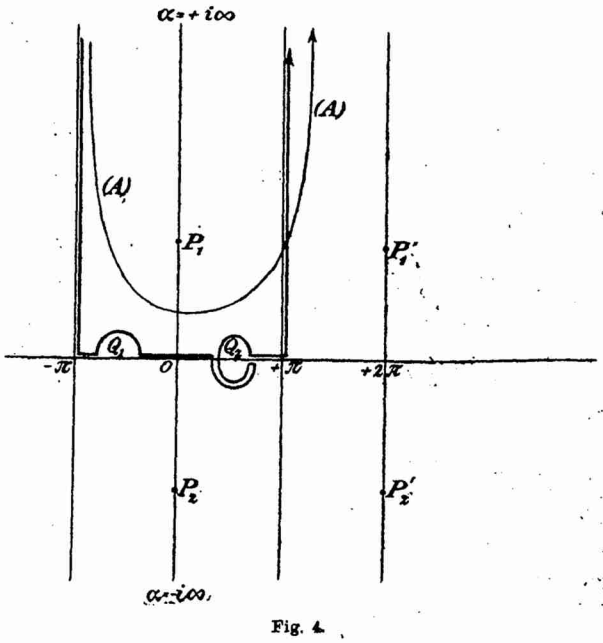

Fig. 4.

Im Endlichen hat man als Unstetigkeitspunkte zunächst die schon oben in die Figur eingezeichneten Punkte P_1, P_2 u. s. w., in welchen das Argument von U_0, die Wurzel $\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\alpha}$ verschwindet, ausserdem aber die Punkte:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm\varphi_0 + 4n\pi$$

und n ganzzahlig.

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\cos\frac{\varphi_0}{2} \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm(2\pi - \varphi_0) + 4n\pi.$$

In dem Intervall $-\pi$ bis $+\pi$ befinden sich immer zwei von diesen Punkten,

nämlich im Falle $\varphi_0 < \pi$	im Falle $\varphi_0 > \pi$
der Punkt Q_1: $\alpha = -\varphi_0$	der Punkt Q_1: $\alpha = -(2\pi - \varphi_0)$
und der Punkt Q_2: $\alpha = +\varphi_0$	und der Punkt Q_2: $\alpha = +(2\pi - \varphi_0)$.

Die Punkte Q_1 und Q_2 liegen in beiden Fällen symmetrisch zum Nullpunkt.

Man kann nun den Weg (A) in folgender Weise deformiren, ohne einen Unstetigkeitspunkt zu überschreiten. Man gehe vom Unendlichen her längs der Graden pars real. $\alpha = -\pi$ bis zur reellen Axe, dann weiter längs der reellen Axe, dabei den Punkt Q_1 durch einen kleinen Bogen nach oben umgehend, bis man in die Nähe des Punktes Q_2 kommt. Hier mache man einen kleinen Bogen nach unten, der zu dem Bogen über Q_1 völlig symmetrisch ist, kehre aber an der reellen Axe wieder um und umkreise den Punkt Q_2 einmal vollständig im Sinne des Uhrzeigers, bis man von neuem auf die reelle Axe trifft. Dieser gehe man dann entlang bis zum Punkt $\alpha = +\pi$ und kehre längs der Geraden pars real. $\alpha = +\pi$ in's Unendliche zurück.

Der Integrand von G wechselt mit α sein Vorzeichen. Es wird daher das Integral über den Weg von $\alpha = -\pi$ bis $\alpha = +\pi$, wenn man die eine vollständige Umkreisung von Q_2 ausnimmt, Null und es kann demnach der Integrationsweg in die folgenden drei Stücke aufgelöst werden: 1) Vom Unendlichen längs der Graden pars real. $\alpha = -\pi$ bis $\alpha = -\pi$. 2) Umkreisung von Q_2. 3) Von $\alpha = +\pi$ längs der Graden pars real $\alpha = +\pi$ ins Unendliche. Die Integrale über diese Strecken wollen wir mit G_1, G_2, G_3 bezeichnen. Man setze zunächst in G_2:

$$z = \cos\frac{\alpha}{2}, \qquad z_0 = \cos\frac{\varphi_0}{2}.$$

Dann geht G_2 über in:

$$G_2 = -\frac{1}{2i\pi r}\sin\frac{\varphi_0}{2}\int U_0\left(k\sqrt{(r+r_0)^2 - 4rr_0z^2}\right)dz\left\{\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(z-z_0)^2}\right\}$$

$$= +\frac{1}{2i\pi r}\sin\frac{\varphi_0}{2}\frac{d}{dz_0}\left\{\int U_0\left(k\sqrt{(r+r_0)^2 - 4rr_0z^2}\right)dz\left[\frac{1}{z_0 - z} + \frac{1}{z_0 + z}\right]\right\}.$$

Das Integral ist um den Punkt Q_2 herum zu nehmen. Es ist aber in Q_2 im Falle $\varphi_0 < \pi$: $\alpha = +\varphi_0$, demnach $z = z_0$. Hingegen im

Falle $\varphi_0 > \pi$ ist in Q_2: $\alpha = 2\pi - \varphi_0$ und demnach $z = -z_0$. In Bezug auf z ist also im ersten Falle um den Punkt $z = z_0$, im zweiten um den Punkt $z = -z_0$ zu integriren. Im ersten Fall liefert der Theil $\frac{1}{z_0 + z}$ der Klammer im Integranden keinen Beitrag zum Integral, weil er in dem vom Integrationsweg umschlossenen Gebiet stetig bleibt, im zweiten Fall aus demselben Grunde der Theil $\frac{1}{z_0 - z}$. Was in jedem Fall übrig bleibt, ist von der Form des Cauchy'schen Integrals der Functionentheorie, lässt sich nach dem Cauchy'schen Satze ausführen und ergiebt:

$$G_2 = \pm \frac{1}{r} \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{d}{dz_0} U_0\left(k\sqrt{(r+r_0)^2 - 4rr_0z_0^2}\right)$$

oder:

$$G_2 = \mp \frac{2}{r} \frac{d}{d\varphi_0} U_0\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\varphi_0}\right),$$

wobei — *ein Gebrauch der von jetzt an beibehalten werden soll* — das obere Zeichen für $\varphi_0 < \pi$, das untere für $\varphi_0 > \pi$ gilt.

Es ist weiter G_1 und G_3 zu behandeln. Man ersetze in G_1 α durch $-\pi + iv$, dann hat man von $v = +\infty$ bis $v = 0$ zu integriren. Ebenso ersetze man in G_3 α durch $\pi + iv$, wo dann von $v = 0$ bis $v = +\infty$ zu integriren ist. Man erhält leicht:

$$G_1 = G_3 = \frac{1}{4\pi r} \sin \frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty U_0\left(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos iv}\right) \cos \frac{iv}{2} \cdot dv \left\{ \left(\frac{1}{\sin \frac{iv}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sin \frac{iv}{2} + \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right)^2 \right\}.$$

Nunmehr wird der vollständige Ausdruck von G, wenn man noch in G_2 die Differentiation nach φ_0 ausführt:

$$(21) \qquad G(r_0, \varphi_0, r) = G_1 + G_2 + G_3 = \mp 2r_0 \sin\varphi_0 k \frac{U_1(kD)}{D} + \frac{1}{2\pi r} \sin \frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty U_0(kD') \cos \frac{iv}{2} dv \left\{ \frac{1}{\left(\sin \frac{iv}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin \frac{iv}{2} + \cos \frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \right\},$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$D = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\varphi_0}, \qquad D' = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos iv}.$$

Beachtet man, dass der hier auftretende Integrand, wenn man den Factor U_0 abscheidet, ohne weiteres integrabel ist und führt in Rücksicht

auf diesen Umstand eine partielle Integration aus, so findet man als zweiten Ausdruck für G:

$$G(r_0, \varphi_0, r) = \mp 2 r_0 \sin \varphi_0 k \frac{U_1(kD)}{D} \tag{22}$$

$$- \frac{k}{\pi} r_0 \sin \frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{U_1(kD')}{D'} dv \left\{ \frac{\sin iv}{\sin \frac{iv}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{\sin iv}{\sin \frac{iv}{2} + \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Aus den beiden Ausdrücken (21) und (22) von G lassen sich unmittelbar seine wichtigsten Eigenschaften erkennen. Man bemerkt nämlich sofort, dass das in (22) auftretende Integral stets endlich und stetig ist, von dem einzigen Fall abgesehn, dass $r = r_0 = 0$ ist. Das Glied vor dem Integral wird unstetig nur in dem Fall, dass $D = 0$ wird, worunter auch der Fall $r = r_0 = 0$ fällt. *Demnach wird überhaupt G nur unstetig im Falle $D = 0$, wenn also der Parameterpunkt r_0, φ_0 von der einen oder andern Seite auf den Schirm rückt oder analytisch ausgedrückt, wenn*

$$r_0 = r, \quad \varphi_0 = 0 \text{ oder } 2\pi$$

ist. Sehen wir von dem Falle $r_0 = r = 0$ ab, so wird die Unstetigkeit durch das erste Glied allein bestimmt und erhält nach (19) die Form:

$$G = \pm 2 r_0 \sin \varphi_0 \frac{F}{D^2} = \pm \frac{2 r_0 \sin \varphi_0}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos \varphi_0} \cdot F, \tag{23}$$

wobei F stetig und für $D = 0$:

$$\lim F = 1 \tag{24}$$

wird.

Das Verhalten von G für grosses r erkennt man am bequemsten aus dem Ausdruck (21). Das erste Glied wird für grosses r, und damit grosses D, nach (20) klein wie $\frac{1}{D^{\frac{3}{2}}}$. Unter dem Integral ist das Argument von U_0 stets grösser als $k(r + r_0)$. Man schliesst daraus leicht mit Hülfe von (18), dass das ganze Integral für grosses r klein wird wie $\frac{1}{\sqrt{k(r+r_0)}}$. Sein Beitrag zu G wird also klein, wie $\frac{1}{r\sqrt{r+r_0}}$. Daraus folgt alles in allem, *dass für wachsendes r der Ausdruck G klein wird von der Ordnung $\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}$.*

9. Existenzbeweis der Lösung der 1. Aufgabe. $u(0)$ hat die vorgeschriebenen Randwerthe u. Mit Hülfe der abgeleiteten Eigenschaften von G wollen wir nun die Eigenschaften des Ausdrucks:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, u\, G(r_0, \varphi_0, r) \tag{25}$$

studiren, wobei wir *die vorgeschriebenen Randwerthe u und ihre erste Derivirte nach r* überall auf dem Schirm — für alle Werthe von r — als *endlich und stetig* voraussetzen.

Zunächst lässt sich zeigen, dass $u(0)$ in u übergeht, wenn man den Abstand $x_0 = r_0 \sin \varphi_0$ des Parameterpunktes vom Schirm verschwindend klein werden lässt. Setzt man nämlich $G = r_0 \sin \varphi_0 H$, also:

$$u(0) = r_0 \sin \varphi_0 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, u H,$$

so sieht man, dass alle endlichen Theile des Integrals für verschwindendes $r_0 \sin \varphi_0$ zu $u(0)$ nichts beitragen können. Auch muss nach dem eben für G abgeleiteten Resultat bei wachsendem r die Grösse H klein werden wie $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$, sodass auch die unendliche Länge des Integrationswegs nur einen endlichen Beitrag zum Integral liefern kann, der mit dem verschwindenden Factor $r_0 \sin \varphi_0$ multiplicirt, selbst verschwindet. Es sind daher nur solche Stücke des Integrationsintervalles zu berücksichtigen, in welchen H unstetig wird. Das geschieht aber nur in dem Punkt des Schirms, an welchen der Parameterpunkt heranrückt, allein für $r = r_0$. Ist also ε eine beliebig kleine Grösse, so kann man setzen:

$$\text{Für } \lim r_0 \sin \varphi_0 = 0: \quad u(0) = r_0 \sin \varphi_0 \frac{1}{2\pi} \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} dr\, u H.$$

In der Nähe des Parameterpunktes hat aber H nach (23) den Ausdruck:

$$H = \pm \frac{2F}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos \varphi_0}. \tag{26}$$

Daher wird in Rücksicht auf die Stetigkeit von u, die Kleinheit von ε und die Gleichung (24):

$$u(0) = \pm \frac{1}{2\pi} r_0 \sin \varphi_0\, u(r_0) \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \frac{2\,dr}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos \varphi_0}.$$

Die Ausführung des Integrals giebt:

$$u(0) = \pm \frac{1}{\pi} u(r_0) \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{r_0(1-\cos\varphi_0)+\varepsilon}{r_0 \sin \varphi_0} - \operatorname{arc\,tg} \frac{r_0(1-\cos\varphi_0)-\varepsilon}{r_0 \sin \varphi_0} \right]$$

und daraus folgt für $\lim \varphi_0 = 0$ oder $\lim \varphi_0 = 2\pi$:

$$u(0) = u(r_0).$$

Hiermit ist das gewünschte Resultat bewiesen, dass $u(0)$ auf beiden Seiten des Schirmes die Randwerthe u annimmt.

10. Nachtrag für Punkte in der Schirmkante. Indessen sind im vorigen noch die Punkte in unmittelbarer Nähe der Schirmkante, die sehr kleinen Werthe von r_0, auszunehmen, da für diese r_0 und r gleichzeitig sehr klein und daher die Ausdrücke (23) und (26) ungültig werden. Um den Beweis für diese Punkte nachzutragen, bezeichne man den vorgeschriebenen Randwerth von u für $r = 0$, an der Schirmkante, mit u_k und setze:

$$u = u_k + r \cdot w.$$

Dabei wird w eine stets endliche Grösse sein, weil wir die Endlichkeit von $\frac{\partial u}{\partial r}$ vorausgesetzt haben. Der Ausdruck (25) von $u(0)$ zerfällt damit in zwei Theile:

$$u'(0) = u_k \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r)$$

und

$$u''(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, r\, w\, G(r_0, \varphi_0, r).$$

Von $u'(0)$ wird sich später zeigen, dass es überall auf dem Schirm, auch in der Schirmkante, den Werth u_k hat. Es kommt also hier nur darauf an, zu zeigen, dass $u''(0)$ in der Schirmkante, für verschwindendes r_0, verschwindet. Setzt man in $u''(0)$ wieder $G = r_0 \sin \varphi_0 H$, so folgt wie oben, dass es genügt, diejenigen Theile des Integrationsintervalls in Betracht zu ziehen, wo H unstetig wird, das ist die Nachbarschaft von $r = r_0$ oder, wenn r_0 sehr klein ist, die sehr kleinen Werthe von r. Es gilt also:

(27) für $\lim r_0 \sin \varphi_0 = 0$: $\quad u''(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\varepsilon dr\, r\, w\, G(r_0, \varphi_0, r)$,

wobei ε eine sehr kleine Grösse ist.

Nun ist die Unstetigkeit von G für sehr kleines r_0 und r zu untersuchen. Geht man aus von dem Ausdruck (22) und bezeichnet das in demselben auftretende Integral mit J, so wird:

$$J = \int_0^\infty \frac{U_1(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos iv})}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos iv}} \sin iv\, dv \left\{ \frac{1}{\sin \frac{iv}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{iv}{2} + \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Setzt man $\sin \frac{iv}{2} = i\zeta$, so schreibt sich J:

$$J = 4 \int_0^\infty \frac{U_1(k\sqrt{(r + r_0)^2 + 4 r r_0 \zeta^2})}{\sqrt{(r + r_0)^2 + 4 r r_0 \zeta^2}} \zeta\, d\zeta \left(\frac{1}{\zeta + i \cos \frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\zeta - i \cos \frac{\varphi_0}{2}} \right),$$

oder durch leichte Umstellungen:

$$J = \frac{8}{(4rr_0)^{\frac{3}{4}}} \int_0^\infty U_1\left(k\sqrt{(r+r_0)^2+4rr_0\xi^2}\right) \sqrt[4]{4rr_0\xi^2}\, \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\frac{(r+r_0)^2}{4rr_0}}} \cdot \frac{\xi^2}{\xi^2+\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}$$

und daraus folgt:

$$\operatorname{Mod} J < \frac{1}{(rr_0)^{\frac{3}{4}}} M \cdot \frac{8}{4^{\frac{1}{4}}} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\frac{(r+r_0)^2}{4rr_0}}} \frac{\xi^2}{\xi^2+\cos^2\frac{\varphi_0}{2}},$$

wobei:

M das Maximum des Moduls von $\sqrt[4]{4rr_0\xi^2}\; U_1\left(k\sqrt{(r+r_0)^2+4rr_0\xi^2}\right)$ im Integrationsintervall bedeutet.

Setzt man: $\eta^2 = 4rr_0\xi^2$, so ist M das Maximum des Moduls von

$$V = \sqrt{\eta}\; U_1\left(k\sqrt{(r+r_0)^2+\eta^2}\right).$$

Für alle grösseren endlichen und nach (20) auch für alle unendlichen Werthe nimmt V mässige endliche Werthe an. Für kleine Werthe von η ist nach (19) nahe:

$$V = -\frac{1}{k} \frac{\sqrt{\eta}}{\sqrt{(r+r_0)^2+\eta^2}}.$$

Das Maximum des Moduls dieses Ausdrucks tritt ein für $\eta = r + r_0$ und ist gleich $\frac{1}{k\sqrt{2(r+r_0)}}$; dieses für kleine Werthe von η eintretende Maximum wächst mit abnehmendem $r + r_0$ in's Unendliche, während die für grössere Werthe von η eventuell eintretenden Maxima stets endlich bleiben. Für hinreichend kleines $r + r_0$ ist daher dieses Maximum das grösste, es folgt also:

$$M = \frac{1}{k\sqrt{2(r+r_0)}}.$$

Setzt man jetzt:

$$J = \frac{A}{(rr_0)^{\frac{3}{4}}\sqrt{(r+r_0)}} \tag{28}$$

so folgt:

$$\operatorname{Mod} A < \frac{2}{k} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\frac{(r+r_0)^2}{4rr_0}}} \frac{\xi^2}{\xi^2+\cos^2\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Dieses Integral ist offenbar stets eine endliche Grösse, sodass A endlich sein muss.

Führt man nun den Ausdruck (28) für das Integral in (22) ein und ersetzt zugleich das erste Glied in (22) durch seinen Ausdruck (23), so folgt:

$$G = \pm \frac{2r_0 \sin\varphi_0}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0} \cdot F + \frac{A' \cdot \pi}{k} r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \frac{1}{(rr_0)^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{\sqrt{r+r_0}}$$

wo F und A' endliche Grössen sind. Führt man dies weiter in (27) ein und berücksichtigt, dass man wegen der Kleinheit von ε w durch einen Mittelwerth $\bar{w}$ und F nach (24) durch 1 ersetzen darf, so folgt:

$$u''(0) = \pm \frac{1}{\pi} r_0 \sin \varphi_0 \, \bar{w} \int_0^{\infty} \frac{r\,dr}{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos \varphi_0} + r_0^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi_0}{2} \, \bar{w} \int_0^{\infty} \frac{dr\, r^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{r + r_0}} A'.$$

Von dem zweiten Integral sieht man sofort, dass es stets endlich ist, weil der Integrand nicht einmal für $r_0 = 0$ zur -1. Ordnung unstetig wird. Demnach verschwindet sein Product mit $r_0^{\frac{1}{2}}$, wenn $r_0 = 0$ wird. Das erste Integral giebt ausgeführt:

$$u''(0) = \pm \frac{1}{\pi} r_0 \sin \varphi_0 \, \bar{w} \log \frac{\sqrt{r_0^2 + \varepsilon^2 - 2 \varepsilon r_0 \cos \varphi_0}}{r_0}$$
$$\pm r_0 \cos \varphi_0 \, \bar{w} \left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\varepsilon - r_0 \cos \varphi_0}{r_0 \sin \varphi_0} + \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right].$$

Dieser Ausdruck verschwindet ebenfalls für $r_0 = 0$.

Damit ist aber nachgewiesen, *dass auch für* $r_0 = 0$ *die Function* $u(0)$ *in den vorgeschriebenen Randwerth* $u'(0) = u_k$ *übergeht*, und zwar gilt dies, da wir keinen speciellen Werth von φ_0 vorausgesetzt haben, *in welcher Richtung man sich auch der Schirmkante nähern mag.*

11. Schluss des Existenzbeweises. Sehr leicht lässt sich zeigen, dass $u(0)$ der Differentialgleichung (11) genügt. Da $G(r_0, \varphi_0, r)$ für jeden Werth von r als Function von r_0, φ_0 betrachtet eine Lösung der Differentialgleichung ist, so muss auch die Superposition unendlich vieler solcher Lösungen, aus der nach (25) $u(0)$ entsteht, eine Lösung der Differentialgleichung darstellen, wofern die Summe nur nebst ihren ersten und zweiten Derivirten endlich bleibt. Das ist aber der Fall deshalb, weil $G(r_0, \varphi_0, r)$ nebst allen Derivirten überall ausserhalb des Schirmes endlich ist und weil es selbst — und wie sich leicht zeigen lässt, ebenso seine Derivirten — mit wachsendem r in solcher Weise klein wird, dass die unendliche Länge des Integrationsweges für r nicht zu einer Unstetigkeit der Integrale führt.

Somit ist bewiesen, dass *der Ausdruck* (25) *für* $u(0)$ *thatsächlich die Lösung der gestellten Randwerthaufgabe für den einfachen Rand liefert* — von einem Punkte abgesehn: Wir haben das Verhalten von $u(0)$ im Unendlichen noch nicht nachgeprüft. Dies wird sich indessen bequemer an einer späteren Stelle erledigen lassen.

12. Der Werth von G für $\varphi_0 = \pi$. Von ganz besonderer Bedeutung für das Folgende ist *der Werth, den* G *in der Ebene des Schirms*, aber in ihrem vom Schirm freien Theil, *für* $\varphi_0 = \pi$ *annimmt.* Wir

wollen diesen Werth kurz durch $G(r_0, r)$ bezeichnen. Man findet aus (22) für $\varphi_0 = \pi$:

$$G(r_0, r) = -\frac{4k}{\pi} r_0 \int_0^\infty dv \cos\frac{iv}{2} \frac{U_1(k\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos iv})}{\sqrt{r^2 + r_0^6 + 2rr_0\cos iv}}.$$

Führt man eine neue Variable w ein durch:

$$\sin iw = \sin\frac{iv}{2}\frac{2\sqrt{rr_0}}{r+r_0}, \qquad \cos iw = \frac{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos iv}}{r+r_0}$$

so folgt:

$$(29) \qquad G(r_0, r) = -\frac{4k}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \int_0^\infty dw\, U_1\{k(r+r_0)\cos iw\}.$$

Jetzt erinnere man sich an die Integraldarstellung der Bessel'schen Function (13):

$$U_0(z) = \int_0^\infty du\, e^{-iz\cos iu}.$$

Es sei R eine sehr grosse Zahl und man setze:

$$U_0'(z) = \int_0^R du\, e^{-iz\cos iu}, \quad U_0''(z) = \int_R^\infty du\, e^{-iz\cos iu}, \quad U_0(z) = U_0'(z) + U_0''(z).$$

In $U_0'(z)$ darf man unter dem Integralzeichen differenziren und findet daher:

$$U_1(z) = \frac{dU_0(z)}{dz} = -i\int_0^R du \cos iu\, e^{-iz\cos iu} + U_1''(z), \quad U_1''(z) = \frac{d}{dz}U_0''(z).$$

Dies wollen wir in (29) einführen, dann folgt:

$$(30) \qquad G(r_0, r) = \frac{4ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \int_0^\infty dw \int_0^R du \cos iu\, e^{-ik(r+r_0)\cos iw\cos iu}$$

$$-\frac{4k}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}} \int_0^\infty dw\, U_1''\{k(r+r_0)\cos iw\}.$$

Wir wollen zunächst nachweisen, dass das zweite Integral dieses Ausdrucks für wachsendes R verschwindet.

Aus:

$$U_0''(z) = \int_R^\infty du\, e^{-iz\cos iu}$$

folgt durch partielle Integration:

$$U_0''(z) = \left[-\frac{e^{-iz\cos iu}}{z \sin iu} - \frac{i}{z}\int \frac{du \cos iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu} \right]_R^\infty$$

$$= \frac{e^{-iz\cos iR}}{z \sin iR} - \frac{i}{z}\int_R^\infty \frac{du \cos iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}.$$

Hier darf man offenbar unter dem Integralzeichen differenziren und findet:

$$U_1''(z) = \frac{d}{dz} U_0''(z) = -\frac{i}{z}\frac{\cos iR}{\sin iR} e^{-iz\cos iR} + \frac{i}{z^2}\int_R^\infty \frac{du \cos iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}$$

$$-\frac{1}{z}\int_R^\infty \frac{du \cos^2 iu}{\sin^2 iu} e^{-iz\cos iu}.$$

Für wachsendes R wird $\operatorname{tg} iR = 1$ und die beiden Integrale verschwinden wegen des immer rascher oscillirenden Factors $e^{-iz\cos iu}$. Daher wird für sehr grosses R:

$$U_1''(z) = -\frac{i}{z} e^{-iz\cos iR}.$$

Damit folgt:

$$\int dw\, U_1''\{k(r+r_0)\cos iw\} = -\frac{i}{k(r+r_0)}\int_0^\infty \frac{dw}{\cos iw} e^{-ik(r+r_0)\cos iw \cos iR}.$$

Auch hier oscillirt der Exponentialfactor immer rascher, je mehr R wächst. Das Integral verschwindet also für wachsendes R und es bleibt somit in (30) nur das erste Integral übrig:

$$G(r_0, r) = \frac{4ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^\infty dw \int_0^R du \cos iu\, e^{-ik(r+r_0)\cos iw \cos iu}.$$

Um die Integrationsordnung unbedenklich beliebig vertauschen zu können, wollen wir setzen:

$$G(r_0, r) = \frac{4ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int_0^R dw \int_0^R du \cos iu\, e^{-ik(r+r_0)\cos iw \cos iu}$$

und erst nach der Integration R in's Unendliche wachsen lassen.

Wir führen neue Variabeln ein durch die Gleichungen:

$$\sin i\left(\frac{u+w}{2}\right) = i\varrho\cos\psi, \quad \sin i\left(\frac{u-w}{2}\right) = i\varrho\sin\psi.$$

Es folgt durch leichte Rechnungen:

$$\cos iw \cos iu = \varrho^2 + 1, \quad \cos iu = \sqrt{1 + \varrho^2 + \varrho^4 \sin^2\psi \cos^2\psi} + \varrho^2 \sin\psi\cos\psi,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \varrho} & \frac{\partial u}{\partial \psi} \\ \frac{\partial w}{\partial \varrho} & \frac{\partial w}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \frac{2\varrho}{\sqrt{1 + \varrho^2 + \varrho^4 \sin^2\psi \cos^2\psi}}$$

und damit:

$$G(r_0, r) = \frac{8ki}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\int\int \varrho\, d\varrho\, d\psi\, e^{-ik(r+r_0)(\varrho^2+1)}\left(1+\frac{\varrho^2\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1+\varrho^2+\varrho^4\sin^2\psi\cos^2\psi}}\right). \tag{31}$$

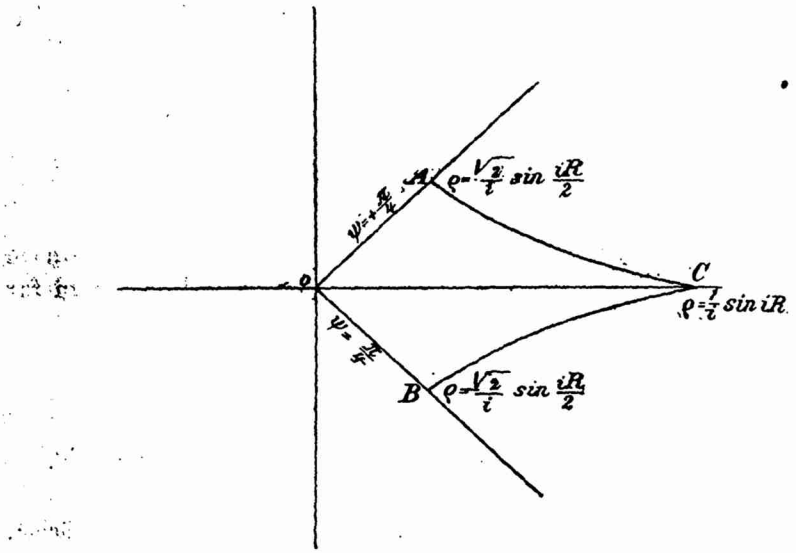

Fig. 5.

Zwischen welchen Grenzen ist dieses Integral zu nehmen? In der u, w-Ebene ist das Gebiet durch die Geraden $u=0$, $w=0$, $u=R$, $w=R$ begrenzt.

Die Abbildung in die ϱ-ψ-Ebene ergiebt:

a) für $u=0$: $\sin\frac{iw}{2} = i\varrho\cos\psi = -i\varrho\sin\psi$ d. h. $\psi = -\frac{\pi}{4}$.

b) „ $w=0$: $\sin\frac{iu}{2} = i\varrho\cos\psi = +i\varrho\sin\psi$ d. h. $\psi = +\frac{\pi}{4}$,

c) „ $u=R$: $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin i\frac{R-w}{2}}{\sin i\frac{R+w}{2}}$; $\varrho^2 = -1+\cos iR\cos iw$.

Wenn also w von 0 bis R geht, so läuft $\operatorname{tg}\psi$ von 1 nach 0, ψ von $+\frac{\pi}{4}$ nach 0, zugleich ϱ von $\frac{\sqrt{2}}{i}\sin\frac{iR}{\lambda}$ bis $\frac{1}{i}\sin iR$.

d) für $w=R$: $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\sin i\frac{u-R}{2}}{\sin i\frac{u+R}{2}}$, $\varrho^2 = -1+\cos iR\cos iu$.

Wenn u von 0 bis R geht, so geht ψ von $-\frac{\pi}{4}$ bis 1, ϱ von $\frac{\sqrt{2}}{i}\sin\frac{iR}{2}$ bis $\frac{1}{i}\sin iR$.

Das Integrationsgebiet für r, ψ wird demnach ein zur Axe $\psi = 0$ symmetrisches Viereck mit den beiden geraden Seiten OA, OB und den beiden krummlinigen AC, BC. Aus der Symmetrie des Gebietes zur ψ-Axe folgt, dass der zweite Theil der Klammer in (31), welcher den Factor $\sin\psi$ enthält, keinen Beitrag zum Integral liefert. Im ersten Theil lässt sich die Integration nach ϱ ausführen:

$$(32) \qquad G(r_0, r) = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\psi\,[1 - e^{-ik(r+r_0)\varrho^2}]$$

wobei nun noch für ϱ die auf den Curven AC, BC gültigen Werthe einzusetzen sind.

Auf AC, für $u = R$ hat man:

$$i\varrho\cos\psi = \sin i\,\frac{R+w}{2}, \qquad i\varrho\sin\psi = \sin i\,\frac{R-w}{2}.$$

Durch Elimination von w aus diesen Gleichungen findet man leicht:

$$\varrho^2 = \frac{i^2\sin^2 iR}{1+\sin 2\psi\cos iR}$$

und ganz ähnlich findet man auf CB, für $w = R$

$$\varrho^2 = \frac{i^2\sin^2 iR}{1-\sin 2\psi\cos iR}$$

damit wird:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} d\psi\, e^{-ik(r+r_0)\varrho^2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi\, e^{\frac{ik(r+r_0)\sin^2 iR}{1+\sin 2\psi\cos iR}}.$$

Man sieht diesem Integral an, dass es in Folge der Oscillation des Exponentialfactors bei wachsendem R verschwindet, und es bleibt somit als *einfacher Ausdruck von* $G(r_0, r)$ der erste Theil von (32) übrig:

$$(33) \qquad G(r_0, r) = 2\sqrt{\frac{r_0}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}.$$

13. Analoges für die 2. Randwerthaufgabe. Die bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen haben sich durchaus auf die erste der beiden eingangs erwähnten Randwerthaufgaben für den graden Rand beschränkt, bei welcher die Oberflächenwerthe von u selbst gegeben waren.

Es sind jetzt noch analoge Ueberlegungen anzustellen für die zweite Randwerthaufgabe, bei welcher die Normalderivirte $\frac{\partial u}{\partial x}$ auf dem Schirm vorgeschriebene Werthe annehmen soll.

Als Green'sche Function für diese zweite Aufgabe tritt wieder ein aus Herrn Sommerfeld's U-Function sofort herzustellender Ausdruck ein, nämlich:

$$g'(r_0, \varphi_0, r, \varphi) = U(r_0, \varphi_0, r, \varphi) + U(r_0, \varphi_0, r, -\varphi). \tag{34}$$

Es genügt g' ebenso der Differentialgleichung (11) und wird ebenso im Parameterpunkte r_0, φ_0 unstetig wie g. Nur wird g' auf dem Schirm nicht Null, dafür sieht man aber sofort, dass auf beiden Seiten des Schirms (für $\varphi = 0$ und 2π) die Normalderivirte $\frac{\partial g'}{\partial n}\left(= \pm \frac{1}{r}\frac{\partial g'}{\partial \varphi}\right)$ verschwindet. Für die gesuchte Function u liefert daher der Green'sche Satz:

$$2\pi u(0) = -\int dw\, g' \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Trennt man die beiden Schirmseiten $S_a(\varphi = 0)$ und $S_b(\varphi = 2\pi)$ von einander, so wird:

$$2\pi u(0) = -\int_0^\infty dr \left\{ g'_{\varphi=0} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a + g'_{\varphi=2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_b \right\}.$$

Späterhin kommt allein der Fall in Betracht, dass:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_a = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_b = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist. Dann wird:

$$2\pi u(0) = \int_0^\infty dr \frac{\partial u}{\partial x} \cdot G', \tag{35}$$

wobei nach (12) und (34):

$$G' = -g'_{(\varphi=0)} + g'_{(\varphi=2\pi)} \tag{36}$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int U_0(k\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\alpha}) \sin\frac{\alpha}{2}\, d\alpha \left[\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right]$$

ist, das Integral über den oben beschriebenen Weg A genommen.

Es wäre nun im Grunde dieselbe Untersuchung der Eigenschaften von G' und daran anschliessend der Existenzbeweis für die Lösung $u(0)$ der zweiten Randwerthaufgabe zu führen, wie sie oben für G und die erste Randwerthaufgabe durchgeführt worden sind. Es mögen uns diese Betrachtungen, deren Ergebniss ja vorauszusehen ist, wegen ihrer nahen Analogie zu den früheren Ableitungen erspart bleiben und es seien nur zwei Resultate für G' hervorgehoben:

Eine Deformation des Integrationswegs A, wie in Nr. 8, ergiebt für G' die Form:

$$(37) \qquad G' = \pm 2\,U_0(k\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\varphi_0})$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty U_0(k\sqrt{r^2+r_0^2+2rr_0\cos iv})\cos\frac{iv}{2}\,dv\left[\frac{1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}-\sin\frac{iv}{2}}+\frac{1}{\cos\frac{\varphi_0}{2}+\sin\frac{iv}{2}}\right].$$

Ferner findet man sofort aus (16) und (36):

$$G = \frac{1}{r}\frac{\partial G'}{\partial\varphi_0}$$

und daraus folgt für $\varphi_0 = \pi$ nach (33) der späterhin wichtige einfache Ausdruck:

$$(38) \qquad \text{Für } \varphi_0 = \pi\text{:} \quad \frac{1}{r_0}\frac{\partial G'}{\partial\varphi_0} = 2\sqrt{\frac{r}{r_0}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0)}}{r+r_0}.$$

§ 4.

Das Näherungsverfahren für die Beugung durch einen Spalt.

14. Präcisirung der Aufgabe.*) Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an unsre eigentliche Aufgabe, die Behandlung der Beugung des

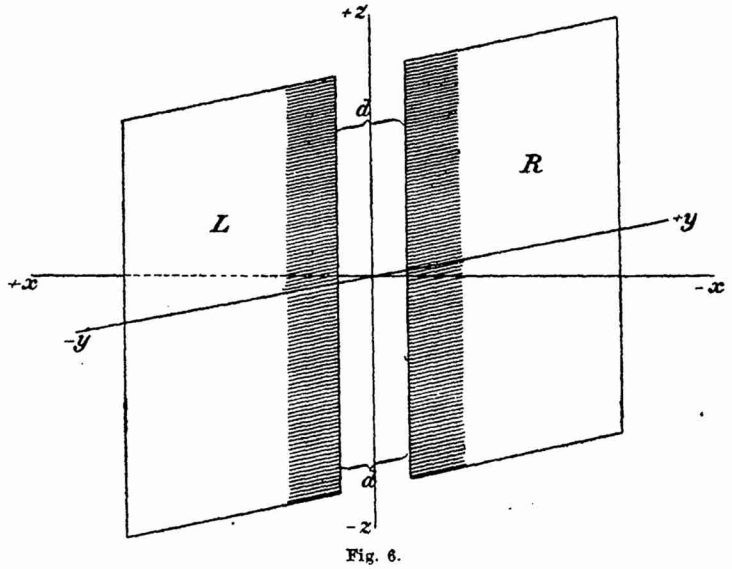

Fig. 6.

Lichts durch einen Spalt. Wir beschränken uns, wie erwähnt, von vornherein auf den Fall, dass eine plane Welle aus dem Unendlichen senk-

*) Vgl. Poincaré, Acta mathematica Bd. XVI, pag. 302 ff.

recht zur Spaltebene einfällt. Eine Normale der Wellenebene, welche durch die Mitte des Spalts geht, nehmen wir zur x-Axe; wir wollen dieselbe zur Fixirung der Vorstellungen horizontal denken, und es schreite die Welle von positivem zu negativem x fort. Der ganze (vertikal zu denkende) Schirm S zerfällt in eine rechte Hälfte $R(y>0)$ und eine linke $L(y<0)$. Als z-Axe nehmen wir die Mittellinie des Spaltes. Die Spaltbreite sei d.

Die Componenten der electrischen Schwingung X, Y, Z genügen nach Maxwell den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 X, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 Y, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2 \Delta^2 Z$$

verbunden mit der Bedingung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

und genau denselben Gleichungen genügen die Componenten des magnetischen Vectors L, M, N. Solange es sich um rein periodische Vorgänge der Periode τ handelt, kann man setzen:

$$(39) \qquad X = \text{pars real.} \left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} \cdot \xi\right), \quad Y = \text{pars real.} \left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} \cdot \eta\right),$$

$$Z = \text{pars real.} \left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} \cdot \zeta\right),$$

wo τ die Schwingungsperiode ist und ξ, η, ζ kurz als die Componenten der *complexen Amplitude* der electrischen Schwingung bezeichnet werden sollen, und erhält dann unter Einführung der Wellenlänge $\lambda = a\tau$ und der Hülfsgrösse

$$(40) \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

die Gleichungen:

$$(41) \qquad \Delta^2 \xi + k^2 \xi = 0, \quad \Delta^2 \eta + k^2 \eta = 0, \quad \Delta^2 \zeta + k^2 \zeta = 0,$$

$$(42) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Ein identisches System findet sich für die Componenten λ, μ, ν der complexen Amplitude der magnetischen Schwingung.

Die „Intensität" der electrischen Schwingung in jedem Punkte wird gegeben durch $(\text{Mod. } \xi)^2 + (\text{Mod. } \eta)^2 + (\text{Mod. } \zeta)^2$, die der magnetischen durch $(\text{Mod. } \lambda)^2 + (\text{Mod. } \mu)^2 + (\text{Mod. } \nu)^2$.

Nun sind verschiedene Fälle zu unterscheiden je nach der Art der Polarisation der einfallenden Welle. Sei dieselbe erstens horizontal polarisirt. Dann findet bekanntlich die electrische Schwingung vertikal statt. Es ist also $\xi = \eta = 0$. Da ferner eine Abhängigkeit der Schwingung

von der z-Coordinate nicht bestehen kann, so folgt $\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$, sodass die Gleichung (42) von selbst erfüllt wird. Es bleibt allein die letzte Gleichung (41)

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + k^2 \zeta = 0.$$

Die Randbedingung am Schirm besteht, wie schon oben erwähnt, darin, dass die electrische Schwingung senkrecht auf dem Schirm stehen muss. Die in der Schirmebene liegenden Componenten η, ζ müssen also verschwinden. Da dies für η von selbst geschieht, so bleibt als Randbedingung auf dem Schirm:

$$\text{(B)} \qquad \zeta = 0.$$

Sei zweitens die einfallende Welle vertikal polarisirt. Dann schwingt der electrische Vector horizontal und der magnetische Vector steht vertikal. Es wird also $\lambda = \mu = 0$ und es bleibt wieder allein:

$$\text{(A')} \qquad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + k^2 \nu = 0.$$

Was die Randbedingungen in diesem Falle angeht, so hängen bekanntlich nach den Maxwell'schen Gleichungen die zeitlichen Aenderungen der electrischen Componenten von den räumlichen Derivirten der magnetischen Componenten ab und als Bedingung, dass die in die Schirmebene fallenden electrischen Componenten dauernd verschwinden, ergiebt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen:

$$\text{(B')} \qquad \frac{\partial \nu}{\partial x} = 0.$$

Die Lichtintensität in jedem Punkte des Raumes wird gegeben für horizontal polarisirtes Licht durch:

$$\text{(43)} \qquad J = (\text{Mod. } \zeta)^2,$$

und für vertikal polarisirtes durch:

$$\text{(44)} \qquad J = (\text{Mod. } \nu)^2.$$

Es sind jetzt noch die Bedingungen im Unendlichen hinzuzufügen. Hat etwa ζ in grosser Entfernung vom Schirm, für grosses x die Form:

$$\zeta = (\alpha + i\beta) e^{ikx} \qquad \alpha, \beta \text{ Constante},$$

so folgt aus (39):

$$Z = \text{pars real.} \left(\zeta e^{\frac{2\pi i t}{\tau}}\right) = \alpha \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right) - \beta \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right).$$

Das ist die allgemeine Form einer ebenen von positivem nach negativem x laufenden Welle. Wäre hingegen: $\zeta = (\alpha + i\beta) e^{-ikx}$, so würde man für Z eine in umgekehrter Richtung laufende Welle erhalten.

Die physikalische Aufgabe verlangt, dass nur eine einzige aus dem Unendlichen einfallende Welle existirt, welche von positivem x herkommt, während im übrigen nur in's Unendliche auslaufende Wellen auftreten dürfen, die vom Schirm durch Reflexion oder Beugung ihren Ursprung nehmen. Als Grenzbedingung im Unendlichen ergiebt sich daher:

$$\zeta = (\alpha + \beta i) e^{ikx} + \text{auslaufende Wellen.} \tag{45}$$

Nun wäre im Grunde eine Untersuchung einzuschalten, woran man *analytisch* auslaufende Wellen im Gegensatz zu einlaufenden erkennt. Doch dürfen wir uns dies hier ersparen, weil bei den Formen, die uns später begegnen, die Entscheidung ohne weiteres zu fällen sein wird.

Durch geeignete Wahl des Anfangspunktes der Zeitrechnung kann man $\beta = 0$ machen. Setzt man ausserdem die Intensität der einfallenden Welle gleich 1, so wird:

(C) Im Unendlichen: $\zeta = e^{ikx} +$ auslaufende Wellen.

Genau ebenso hat man im Falle vertikal polarisirten Lichtes zu verlangen:

(C') Im Unendlichen: $\nu = e^{ikx} +$ auslaufende Wellen.

Schliesslich wollen wir noch den Fall in Betracht ziehn, dass die einfallende Welle aus gewöhnlichem unpolarisirtem Licht besteht. Dann lässt sich die Welle in eine horizontal und eine vertikal polarisirte Componente ζ und ν zerlegen, deren jede nach den eben aufgestellten Gleichungen zu verfolgen ist. Die Lichtintensität in jedem Punkte wird gegeben durch:

$$J = (\text{Mod. } \zeta)^2 + (\text{Mod. } \nu)^2. \tag{46}$$

Der Polarisationszustand des gebeugten Lichts hängt ab von dem Verhältniss:

$$\frac{\text{Mod. } \zeta}{\text{Mod. } \nu}. \tag{47}$$

Ist dasselbe gleich 1, so ist das Licht unpolarisirt. Ist es grösser als 1, so ist das Licht horizontal, ist es kleiner als 1, so ist das Licht vertikal polarisirt.

15. Das Näherungsverfahren für den Fall der horizontal polarisirten einfallenden Welle. Wir betrachten vorläufig nur den Fall einer horizontal polarisirten einfallenden Welle, suchen also eine Lösung der Gleichungen (A), (B), (C). Man setze:

$$\zeta = e^{ikx} - u. \tag{48}$$

Dann erhält man für u wiederum die Differentialgleichung (A)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Die Randbedingung (B) auf dem Schirm geht über in:

(49) $$\text{Für } x = 0,\ |y| > \frac{d}{2}: \quad u = 1$$

und die Bedingung (C) verwandelt sich in die einfachere, dass u im Unendlichen nur aus auslaufenden Wellen bestehen soll. Man bemerkt die Verwandtschaft dieser Randwerthaufgabe mit der im vorigen Paragraphen für den einfachen Rand gelösten ersten Aufgabe.

Um das gegenwärtige Problem auf Grund jenes früheren zu lösen, schlagen wir folgendes Näherungsverfahren ein, dessen Darstellung hier ein klein wenig gegen die Uebersicht in § 2 aus formalen Gründen abgeändert erscheint.

Beistehende Figur stelle einen Horizontalschnitt durch den Schirm dar. Wir führen in der x-y Ebene für denselben Punkt 0 zwei Systeme von

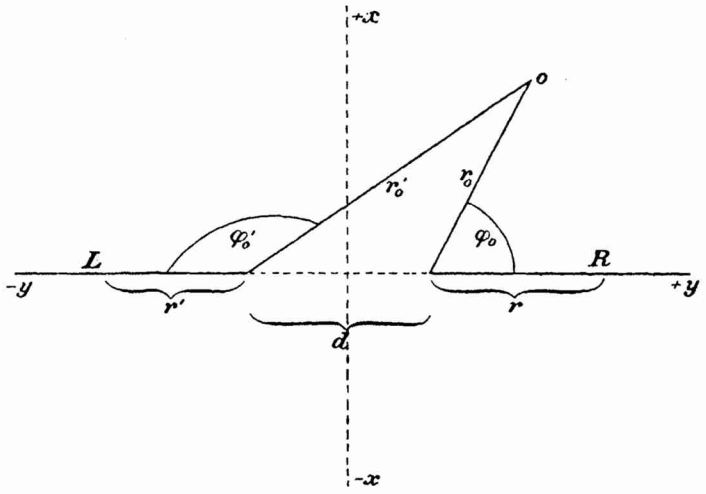

Fig. 7.

Polarcoordinaten r_0, φ_0 und r_0', φ_0' ein, welche von den beiden Kanten K_R und K_L des Spaltes aus in der durch die Figur erläuterten Weise zu zählen sind. Die Punkte auf den beiden Schirmhälften legen wir fest durch ihre Distanzen r (auf R) und r' (auf L) von den respectiven Schirmkanten.

Nun lässt sich zunächst eine Function u_1 bestimmen, welche als Function des Ortes des Punktes 0 betrachtet der Wellengleichung (A) genügt und welche auf der einen Schirmhälfte R den gewünschten Werth 1

hat. Dieselbe wird nämlich nach Nr. 9 ff. geliefert durch den Ausdruck (25):

$$u_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r).$$

Ganz ebenso wird eine Function v_1, welche auf der Schirmhälfte L den Werth 1 annimmt, geliefert durch:

$$v_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr'\, G(r_0', \varphi_0', r').$$

Die Summe $u_1 + v_1$ würde die Lösung des Problems darstellen, wenn u_1 auf der linken und v_1 auf der rechten Schirmhälfte verschwände. Es ist physikalisch ziemlich evident, dass u_1 und v_1 Lichtbewegungen darstellen, die sich wesentlich senkrecht zur Schirmfläche von ihrer respectiven Schirmhälfte aus fortpflanzen und nur wenig in seitlicher Richtung nach der andern Schirmhälfte hinüberstrahlen. In der That ergiebt sich später der Ausdruck $u_1 + v_1$ als eine gute Näherung für den Fall, dass die Spaltbreite d gross ist im Vergleich zur Wellenlänge. Geht man aber auf eine strenge Lösung aus, so muss man dies Hinüberstrahlen auf die andern Schirmhälften berücksichtigen und kann folgendermassen fortfahren.

Auf der linken Schirmhälfte nimmt u_1 den Werth an:

$$u_1(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \pi, r).$$

Wir wollen diesen „hinübergeworfenen" Werth durch einen Querstrich kennzeichnen, für $G(r_0, \pi, r)$ den Ausdruck (33) einführen und r_0 durch den Werth, den es nach der Figur für $\varphi_0 = \pi$ annimmt, nämlich $r' + d$ ersetzen. Dann folgt für den auf die linke Schirmhälfte hinübergeworfenen Werth von u:

$$\bar{u}_1(r') = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr \sqrt{\frac{r'+d}{r}}\, \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}$$

und ebenso folgt für den auf die rechte Schirmhälfte hinübergeworfenen Werth von v_1:

$$\bar{v}_1(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\, \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}.$$

Die Randwerthe von $u_1 + v_1$ sind also auf den beiden Schirmhälften, statt 1 zu werden, gleich $1 + \bar{v}_1$ resp. $1 + \bar{u}_1$. Man suche nun die Randwerthe 1 selbst herzustellen, indem man die neuen Functionen bildet:

$$u_2(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r)\,\bar{v}_1(r),$$

$$v_2(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr'\, G(r_0', \varphi_0', r')\,\bar{u}_1(r').$$

Die erste Function hat auf R die Werthe $-\bar{v}_1$, die zweite auf L die Werthe $-\bar{u}_1$. Die Summe $u_1+v_1+u_2+v_2$ hätte also auf beiden Schirmen den Randwerth 1, wenn u_2 auf L und v_2 auf R verschwände. In Wirklichkeit geht u_2 auf L über in:

$$\bar{u}_2(r') = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\, \sqrt{\frac{r'+d}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{v}_1(r)$$

und v_2 geht auf R über in:

$$\bar{v}_2(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr'\, \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{u}_1(r').$$

Diese Reste kann man in ähnlicher Weise zu beseitigen suchen, (es wird dies nicht weiter zu verfolgen nöthig sein), und durch ständige Wiederholung derselben Operationen des Herüberwerfens und der Lösung der Randwerthaufgaben für die einzelnen Schirmhälften kommt man zu der folgenden — zunächst hypothetischen — Lösung unseres Problems:

$$u(0) = \sum_{n=1}^{\infty}[u_n(0) + v_n(0)], \tag{51}$$

wobei die u_n und v_n aus den Recurrenzen gefunden werden:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r)\,\bar{v}_n(r), \\ v_{n+1}(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr'\, G(r_0', \varphi_0', r')\,\bar{u}_n(r'), \end{aligned} \tag{52}$$

welche für $\varphi_0 = \pi$, resp. $\varphi_0' = \pi$ übergehn in:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{n+1}(r') &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\, \sqrt{\frac{r'+d}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{v}_n(r), \\ \bar{v}_{n+1}(r) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr'\, \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{u}_n(r'). \end{aligned} \tag{53}$$

Man kann die Darstellung etwas vereinfachen, indem man die Integrale (52) in (51) einsetzt und beachtet, dass für $r = r'$, wie schon aus der Symmetrie der beiden Schirmhälften folgt, $\bar{u}_n(r') = \bar{v}_n(r)$ wird. Es findet sich dann unter leichter Abänderung der Bezeichnung:

$$u(0) = + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, [G(r_0, \varphi_0, r) + G(r_0', \varphi_0', r)]\, \bar{u}(r), \tag{54}$$

wobei:

$$\bar{u}(r) = \sum_1^\infty \bar{u}_n(r), \tag{55}$$

$$\bar{u}_{n+1}(r) = - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\, \frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\, \bar{u}_n(r'), \tag{56}$$

$$\bar{u}_1(r) = + 1. \tag{57}$$

Man kann hier $\bar{u}(r)$ als eine Art *Oberflächenbelegung* des Schirms auffassen, aus der nach (54) das Wellenpotential $u(0)$ im Raume abzuleiten ist. Das Annäherungsverfahren beschränkt sich auf die Herstellung der Oberflächenbelegung. Dem entsprechend lässt sich die Aufgabe, die uns noch bevorsteht, in zwei Theile zerlegen. Wir weisen zunächst nach, dass man von dem Anfangswerth (57) ausgehend durch die Recurrenzen (56) eine convergente Reihe (55) für die Oberflächenbelegung erhält, und zeigen später, dass das aus dieser Oberflächenbelegung hervorgehende räumliche Wellenpotential $u(0)$ allen unsern Forderungen Genüge leistet.

16. Hülfssatz zum Convergenzbeweis. Die Grundlage für den Convergenzbeweis des gegenwärtigen und eines ähnlichen später anzuwendenden Näherungsverfahrens bildet der folgende Satz. Seien:

$$y_0 = 1,\ y_1 = y_1(x_1, x_2),\ y_2 = y_2(x_2, x_3) \cdots y_n = y_n(x_n, x_{n+1}) \cdots \tag{58}$$

eine Reihe verschiedener Functionen je zweier Variabeln. Jede dieser Functionen (abgesehen von y_0) habe die Eigenschaft, für positive Argumente stets positiv zu sein und mit dem Wachsen eines Argumentes in's Unendliche ständig bis auf Null abzunehmen, und dieselbe Eigenschaft komme auch der negativ genommenen Derivirten jeder Function nach dem zweiten Argument $\left(-\frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}}\right)$ zu. Ein Beispiel für derartige Functionen wäre $y_n = \frac{1}{x_n + x_{n+1}}$. Man bilde der Reihe nach die über alle positiven ganzzahligen Werthe der Argumente zu nehmenden Summen:

$$\chi_1(x_1) = 1,$$

$$\chi_2(x_2) = \sum_{x_1=0}^{\infty} (-1)^{x_1} y_1(x_1, x_2)\, \chi_1(x_1),$$

(59)
$$\chi_3(x_3) = \sum_{x_2=0}^{\infty} (-1)^{x_2} y_2(x_2, x_3)\, \chi_2(x_2),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\chi_{n+1}(x_{n+1}) = \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_n} y_n(x_n, x_{n+1})\, \chi_n(x_n).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzt man:

(60) $$y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = \varphi_{n+1}(x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}),$$

so kann man auch schreiben:

(61) $$\chi_{n+1}(x_{n+1}) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_n} \varphi_{n+1}(x_1, x_2, \cdots x_n, x_{n+1}).$$

Für diese n-fache Summe χ_{n+1} gelten die Ungleichheiten:

(62) $$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < \varphi_{n+1}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1}),$$

(63) $$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_{n+1}}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1})$$

oder in Worten: *„Die Summe ist positiv und kleiner als ihr Anfangsglied. Ihr Differentialquotient nach x_{n+1} (der einzigen Variabeln, von der sie abhängt) ist negativ und dem absoluten Betrage nach kleiner, als der Differentialquotient ihres Anfangsgliedes nach x_{n+1}."*

Es ist übrigens hier und im Folgenden stets der Fall der Gleichheit in dem der Ungleichheit als möglich mit einbegriffen zu denken. Auch soll durch die Forderung, dass eine Function ständig abnehme, ihre streckenweise Constanz nicht ausgeschlossen werden.

Beweis: Für $n = 0$ hat man $\chi_1 = 1$, $\varphi_1 = y_0 = 1$, sodass die Ungleichungen (62) und (63) für $n = 0$ (z. T. als Gleichheiten) erfüllt sind. Wir wollen annehmen, dass sie für irgend eine Zahl $n - 1$ gelten, dass also die Ungleichungen:

(64) $$0 < \chi_n(x_n) < \varphi_n(0, 0, \cdots 0, x_n),$$

(65) $$0 < -\frac{\partial \chi_n(x_n)}{\partial x_n} < -\frac{\partial \varphi_n(0, 0, \cdots 0, x_n)}{\partial x_n}$$

bewiesen seien und durch den Schluss von $n - 1$ auf n ihre Gültigkeit für jedes n nachweisen.

Die ersten Hälften der beiden Ungleichungen (64) und (65) besagen, dass χ_n eine stets positive und mit wachsendem x_n ständig abnehmende Function ist. Dieselbe Eigenschaft haben wir für $y_n(x_n, x_{n+1})$ eingangs vorausgesetzt, daher hat auch das Product $\chi_n(x_n)\, y_n(x_n, x_{n+1})$ diese Eigenschaft. Zudem muss es für unendliches x_n verschwinden, weil dies für y_n vorausgesetzt ist. Die Summe:

$$\chi_{n+1}(x_{n+1}) = \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_n} y_n(x_n, x_{n+1})\, \chi_n(x_n)$$

ist demnach aus lauter Gliedern von abwechselndem Vorzeichen und allmählich bis auf Null abnehmendem absoluten Betrage zusammengesetzt, das Anfangsglied ist positiv, und von einer solchen Summe ist klar, dass sie stets positiv und kleiner, als ihr erstes Glied ist, also:

$$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < y_n(0, x_{n+1})\, \chi_n(0)$$

oder in Rücksicht auf (64):

$$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < y_n(0, x_{n+1})\, \varphi_n(0, 0, \cdots 0)$$

oder nach der Definitionsgleichung (60) der φ_n:

$$0 < \chi_{n+1}(x_{n+1}) < \varphi_{n+1}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1}),$$

das ist die Ungleichung (62).

Man findet ferner durch Differentiation der letzten Gleichung (59) nach x_{n+1}:

$$-\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} = \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_n} \left[-\chi_n(x_n) \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}}(x_n, x_{n+1}) \right].$$

Dem hier in eckige Klammern eingefassten Ausdruck kommen nach (64), (65) und den obigen Voraussetzungen über den Differentialquotienten von y_n nach x_{n+1}, dieselben Eigenschaften zu, wie vorhin dem Product $\chi_n \cdot y_n$ und es folgt daher, wie oben:

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\chi_n(0) \frac{\partial \chi_n}{\partial x_{n+1}}(0, x_{n+1})$$

und nach (64):

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\varphi_n(0, 0, \cdots 0) \frac{\partial y_n}{\partial x_{n+1}}(0, x_{n+1})$$

oder in Rücksicht auf (60):

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}(x_{n+1})}{\partial x_{n+1}} < -\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x_{n+1}}(0, 0, \cdots 0, x_{n+1}).$$

Das ist aber die Ungleichung (63) und damit ist der Hülfssatz bewiesen.

Es ist leicht zu sehen, dass für das Bestehn der Ungleichheiten (62) und (63) bei einer Summe der Form (61) die Productform (60) von φ nicht wesentlich ist, sondern dass der Satz auch noch für sehr viel allgemeinere Functionen φ von beliebig vielen Argumenten bestehn bleibt, die sich mit dem Wachsen der Argumente nur in gewisser Weise asymptotisch der Null nähern müssen. Indessen passt sich der hier behandelte Specialfall am besten den folgenden Anwendungen an.

17. Convergenzbeweis. Wir kehren zu dem durch die Gleichungen (54)—(57) dargestellten Näherungsverfahren zurück und wollen gestützt auf den eben abgeleiteten Hülfssatz seine Convergenz beweisen.

Einige Glieder der Entwicklung von $\bar{u}(r)$ lauten explicit hingeschrieben, wenn man zum Auseinanderhalten der verschiedenen aufeinanderfolgenden Integrationen die Variabeln r und r', soweit es nöthig, mit geeigneten Indices versieht:

$$\bar{u}_1(r) = 1,$$

$$\bar{u}_2(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr_1 \sqrt{\frac{r+d}{r_1}}\,\frac{e^{-ik(r+r_1+d)}}{r+r_1+d},$$

$$\bar{u}_3(r) = +\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty dr_2\,dr_1 \sqrt{\frac{r+d}{r_2}}\sqrt{\frac{r_2+d}{r_1}}\,\frac{e^{-ik(r+r_2+d+r_2+r_1+d)}}{(r+r_2+d)\,(r_2+r_1+d)},$$

. . . . . .

$$\bar{u}_{n+1}(r) = \left(-\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n e^{-ikr}\cdot\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dr_n\,dr_{n-1}\cdots$$

$$\cdots dr_1 \sqrt{\frac{r+d}{r_n}\cdot\frac{r_n+d}{r_{n-1}}\cdots\frac{r_2+d}{r_1}}\,\frac{e^{-ik[2r_n+2r_{n-1}+\cdots+2r_2+r_1]}}{(r+r_n+d)\,(r_n+r_{n-1}+d)\cdots(r_2+r_1+d)}.$$

Setzt man:

$$y_1(r_1, r_2) = \frac{1}{\sqrt{r_1}}\,\frac{1}{r_2+r_1+d} \tag{66}$$

und für $i \geqq 2$:

$$y_i(r_i, r_{i+1}) = \sqrt{\frac{r_i+d}{r_i}}\,\frac{1}{r_i+r_{i+1}+d}, \tag{67}$$

und ferner:

$$\varphi_{n+1}(r_1, r_2, \cdots r_n, r) = y_1(r_1, r_2)\,y_2(r_2, r_3)\cdots y_n(r_n, r) \tag{68}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{r_1}}\sqrt{\frac{r_2+d}{r_2}\cdots\frac{r_n+d}{r_n}}\,\frac{1}{r_1+r_2+d}\cdot\frac{1}{r_2+r_3+d}\cdots\frac{1}{r_n+r+d},$$

so wird:

$$(69)\quad \bar{u}_{n+1}(r) = \left(-\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n e^{-ikr}\cdot\sqrt{r+d}\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty dr_n\, dr_{n-1}\cdots$$
$$\cdots dr_1\, e^{-ik[2r_n+2r_{n-1}+\cdots+2r_2+r_1]}\cdot\varphi_{n+1}(r_1, r_2, \cdots r_n, r).$$

In diesem n-fachen Integral lässt sich der Integrationsweg jeder Variabeln derartig in Intervalle zerlegen, dass der Exponentialfactor im Integranden von Intervall zu Intervall seine Vorzeichen wechselt. Die Zerlegung lässt sich folgendermassen zum Ausdruck bringen. Man setze:

$$r_1 = p_1 + \frac{\pi}{k}x_1,\ r_2 = p_2 + \frac{\pi}{2k}x_2, \cdots r_n = p_n + \frac{\pi}{2k}x_n,$$

oder in Rücksicht auf die Relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$(70)\qquad r_1 = p_1 + \frac{\lambda}{2}x_1,\ r_2 = p_2 + \frac{\lambda}{4}x_2, \cdots r_n = p_n + \frac{\lambda}{4}x_n.$$

Man erhält dann die einzelnen Intervalle, indem man p_1 zwischen 0 und $\frac{\lambda}{2}$, die übrigen p zwischen 0 und $\frac{\lambda}{4}$ variiren lässt und jedes x der Reihe nach auf allen möglichen positiven ganzzahligen Werthen festhält. Führt man diese Zerlegung des Integrals (69) aus und setzt dabei für die Variabeln in den einzelnen Intervallen die Werthe (70) ein, so folgt:

$$(71)\quad \bar{u}_{n+1}(r) = \left(-\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n e^{-ikr}\sqrt{r+d}\cdot\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int_0^{\frac{\lambda}{2}} dp_n\, dp_{n-1}\cdots$$
$$\cdots dp_1\, e^{-ik[2p_n+2p_{n-1}+\cdots+2p_2+p_1]}\chi_{n+1},$$

wobei:

$$(72)\quad \chi_{n+1} = \chi_{n+1}(p_1, p_2, \cdots p_n, r) = \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{x_n=0}^{\infty}(-1)^{x_1+x_2+\cdots x_n}$$
$$\cdot\varphi_{n+1}\left(p_1+\frac{\lambda}{2}x_1,\ p_2+\frac{\lambda}{4}x_2, \cdots p_n+\frac{\lambda}{4}x_n, r\right)$$

ist, die Summationen über alle ganzzahligen Werthe der x erstreckt.

Aus (71) ergiebt sich nach dem Satz, dass die Summe der Moduln complexer Grössen grösser ist, als der Modul der Summe:

$$(73)\quad \text{Mod. } \bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n\sqrt{r+d}\cdot\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int_0^{\frac{\lambda}{2}} dp_n\, dp_{n-1}\cdots dp_1\ \text{Mod. } \chi_{n+1}.$$

Für Mod. χ_{n+1} lässt sich aber leicht eine Grenze finden. Führt man die Werthe (70) in die Ausdrücke (66) und (67) ein, so wird y_i eine Function

von x_i und x_{i+1} (für r hat man x_{n+1} zu setzen), welche stets positiv ist und mit dem Wachsen eines Argumentes in's Unendliche auf Null abnimmt, und dasselbe gilt für $-\frac{\partial y_i}{\partial x_{i+1}}$. Das sind aber die Eigenschaften, welche wir für die y_i der vorigen Nummer vorausgesetzt hatten. Die Grössen φ und χ gegenwärtiger Nummer setzen sich aus den y_i in gleicher Weise zusammen, wie die ebenso bezeichneten der vorigen Nummer. Demnach gilt für die Summe (72) der obige Satz, dass sie positiv und kleiner ist als ihr erstes Glied:

$$0 < \chi_{n+1} < \varphi_{n+1}(p_1, p_2, \cdots p_n, r) \tag{74}$$

und zugleich folgt für ihren Differentialquotienten:

$$0 < -\frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial r} < -\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial r}(p_1, p_2, \cdots p_n, r). \tag{75}$$

Da χ_{n+1} eine reelle und hiernach auch eine positive Grösse ist, so wird Mod. $\chi_{n+1} = \chi_{n+1}$. Führt man den Werth von φ aus (68) in (74) und die entstehende Grenze für Mod. χ in (73) ein, so erhält man:

$$\text{Mod. } \bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \sqrt{r+d} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int_0^{\frac{\lambda}{2}} dp_n\, dp_{n-1} \cdots dp_1 \cdot \sqrt{\frac{p_n+d}{p_n} \cdots \frac{p_2+d}{p_2}} \cdot \frac{1}{p_1} \frac{1}{r+p_n+d} \cdots \frac{1}{p_2+p_1+d}. \tag{76}$$

Mit einer Abschätzung dieses Integrals ist der Convergenzbeweis vollendet. Man kann zunächst nach p_1 integriren:

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{dp_1}{\sqrt{p_1}} \frac{1}{p_2+p_1+d} = \left[\frac{2}{\sqrt{p_2+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{p_1}{p_2+d}}\right]_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{2}{\sqrt{p_2+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2(p_2+d)}}$$

und daraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} \frac{dp_1}{\sqrt{p_1}} \frac{1}{p_2+p_1+d} < \frac{2}{\sqrt{p_2+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2d}}.$$

Die Einsetzung dieser Grenze in (76) ergiebt:

$$\text{Mod. } \bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2d}}\right) \frac{\sqrt{r+d}}{\pi^{n-1}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n \cdots dp_2 \cdot \sqrt{\frac{p_n+d}{p_n} \cdots \frac{p_3+d}{p_3}} \cdot \frac{1}{p_2} \frac{1}{r+p_n+d} \cdots \frac{1}{p_3+p_2+d}. \tag{77}$$

Nun lässt sich nach p_2 integriren:

$$\int_0^{\frac{\lambda}{4}} \frac{dp_2}{\sqrt{p_2}} \frac{1}{p_3+p_2+d} = \frac{2}{\sqrt{p_3+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4(p_3+d)}} < \frac{2}{\sqrt{p_3+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4d}}.$$

Setzt man diese Grenze in (77) ein, so kann man nach p_3 integriren und wenn man so fortfährt und nur bei der letzten Integration nach p_n den genauen Werth des Integrals belässt, statt eine Grenze einzuführen, so erhält man:

$$(78)\quad \text{Mod.}\,\bar{u}_{n+1}(r) < \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2d}}\right)\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4(d+r)}}\right).$$

Aus dieser Ungleichung ist sofort das *wichtige Resultat* abzulesen: *„Die Reihe der $\bar{u}_n$ convergirt mindestens so rasch, wie eine nach Potenzen von $\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)$ fortschreitende geometrische Reihe,* und da diese Grösse für jeden von Null verschiedenen Werth der Spaltbreite d kleiner als 1 ist, so folgt, *dass die Reihe für jede beliebige endliche Spaltbreite convergirt.“*

Uebrigens gilt die Ungleichung (78) nur für $n \geqq 2$, während für $n = 1$ leicht die einfachere erhalten wird:

$$(79)\qquad \text{Mod.}\,[\bar{u}_2(r)] < \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2(d+r)}}.$$

Man sieht aus (78) und (79), dass für wachsendes r sämmtliche $\bar{u}_n$ für $n \geqq 2$ klein werden wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$, sodass *sich in grosser Entfernung vom Spalt die Oberflächenbelegung dem constanten Werth $\bar{u}_1 = 1$ annähert.*

Es sei hier noch eine Grenze für den Differentialquotienten von $\bar{u}_{n+1}$ nach r eingeschaltet, die sich im Folgenden nützlich erweist und die man durch Differentiation von (71) in Rücksicht auf (75) genau nach dem eben angewandten Verfahren erhält:

$$(80)\quad \text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u_{n+1}(r)\,e^{ikr}}{\sqrt{r+d}}\right) < \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2d}}\right)\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)^{n-2} \cdot \frac{d}{dr}\left[-\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{4(r+d)}}\right] \quad \text{für } n \geqq 2,$$

und speciell für $n = 1$:

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{u_2(r)\,e^{ikr}}{\sqrt{r+d}}\right) < \frac{d}{dr}\left[-\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r+d}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\lambda}{2(r+d)}}\right].$$

Die durch die Ungleichungen (78) und (79) gelehrte Convergenz unseres Verfahrens ist eine sehr rasche, sobald der Spalt breit gegen die Wellenlänge ist. Man erhält z. B. numerisch bei einer Spaltbreite von 50 Wellenlängen für $r = 0$:

$$\text{Mod.}\,|\bar{u}_n| < 0{\cdot}064 \cdot [0{\cdot}045]^{n-2} \qquad n \geqq 2.$$

Ist die Spaltbreite gleich der Wellenlänge, so folgt:

$$\text{Mod. } |\bar{u}_n| < 0{\cdot}392[0{\cdot}295]^{n-2},$$

also immer noch eine ziemlich gute Convergenz.

Für $d = 0$ aber wird nicht etwa nur der Convergenzbeweis unzureichend, vielmehr hört hier in der That die Convergenz auf, da, wie leichte Rechnungen lehren, in diesem Grenzfalle sämmtliche $\bar{u}_n$ abwechselnd gleich ± 1 werden.

18. Das räumliche Wellenpotential. Wir gehen jetzt zum zweiten Theil unsrer Aufgabe über, zu zeigen, dass die durch die Summe der $\bar{u}_n$ dargestellte Oberflächenbelegung $\bar{u}$ des Schirms ein räumliches Wellenpotential $u(0)$ ergiebt, welches unsre Randwerthaufgabe löst. Es ist nach (54):

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\; G(r_0, \varphi_0, r)\,\bar{u}(r) + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\; G(r_0', \varphi_0', r)\,\bar{u}(r).$$

Da $\bar{u}(r)$, wie oben nachgewiesen, für alle Werthe von r endlich und wegen (80) auch stetig ist, so können wir auf jedes dieser Integrale die Resultate von Nr. 9—11 anwenden. *Es folgt zunächst*, dass jedes der Integrale und demnach auch ihre Summe $u(0)$ *die Differentialgleichung* (A) *löst.* Wenn ferner der Punkt 0 auf die rechte Schirmhälfte R rückt, so wird $\varphi_0 = 0$ oder 2π, hingegen $\varphi_0' = \pi$. Das erste Integral geht also nach Nr. 9 und 10 in $\bar{u}(r_0)$ über, das zweite nimmt den Werth an:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr\,\sqrt{\frac{r_0+d}{r}}\,\frac{e^{-ik(r+r_0+d)}}{r+r_0+d}\,\bar{u}(r).$$

Ersetzt man hier $\bar{u}(r)$ durch die Summe $\sum_1^\infty \bar{u}_n(r)$ und integrirt gliedweise, was bei der absoluten Convergenz der Summe erlaubt ist, so erhält man nach (56) als Werth des Integrals:

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n(r_0).$$

Demnach wird der Werth von $u(0)$ auf der rechten Schirmhälfte:

$$u(0) = \bar{u}(r_0) - \sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n(r_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(r_0) - \sum_{n=2}^{\infty} \bar{u}_n(r_0) = \bar{u}_1(r_0) = 1.$$

Dasselbe Resultat lässt sich für die linke Schirmhälfte ebenso beweisen. *Es hat demnach $u(0)$ auf dem Schirm die vorgeschriebenen Randwerthe.*

Schliesslich ist noch das Verhalten von $u(0)$ im Unendlichen zu prüfen. Die Forderung ist, dass dort $u(0)$ nur aus auslaufenden Wellen bestehn soll.

Da $u(0)$ aus der Superposition unendlich vieler Functionen G entsteht, so ist diese Forderung erfüllt, wenn die Functionen G im Unendlichen stets nur auslaufende Wellen liefern. Wir haben also zu bilden:

$$P = \text{pars real.}\left[G(r_0, \varphi_0, r)\, e^{2\pi i \frac{t}{\tau}}\right]$$

und zu prüfen, ob dieser Ausdruck für sehr grossen Abstand vom Schirm den Charakter auslaufender Wellen hat. Wir wählen für G die Form (21) und dürfen hierin, da nur grosse Abstände vom Schirm in Betracht kommen, für die Bessel'schen Functionen ihre asymptotischen Werthe (18) und (20) einsetzen. Dann wird:

$$G(r_0, \varphi_0, r) = \pm i r_0 \sin\varphi_0 \sqrt{2\pi k}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-ikD}}{\sqrt{D^3}}$$

$$+ \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2r\sqrt{2\pi k}} \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-ikD'}}{\sqrt{D'}} \cos\frac{iv}{2}\, dv \left\{ \frac{1}{\left(\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}\right)^2} \right\}$$

wobei:

$$D = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\varphi_0}, \quad D' = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0\cos iv}$$

ist. Hiernach erscheint G als eine Superposition von Ausdrücken der Form

$$\frac{e^{-ikD}}{\sqrt{D^3}} \cdot A \quad \text{resp.} \quad \frac{e^{-ikD'}}{\sqrt{D'}} \cdot A',$$

wobei A und A' von r_0 unabhängige Grössen sind. Setzt man noch:

$$A = \alpha e^{i\psi}, \quad A' = \alpha' e^{i\psi'},$$

wo α und α' reell sein sollen, so folgt:

$$\text{pars real.}\left(\frac{e^{-ikD}}{\sqrt{D^3}} A\, e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{\alpha}{\sqrt{D^3}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda} + \psi\right),$$

$$\text{pars real.}\left(\frac{e^{-ikD'}}{\sqrt{D'}} A' e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{\alpha'}{\sqrt{D'}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \frac{D'}{\lambda} + \psi'\right).$$

Die Bedingung constanter Phase für die durch diese Ausdrücke dargestellten Wellenbewegungen ist:

$$\frac{t}{\tau} - \frac{D}{\lambda} + \psi = \text{const.} \quad \text{resp.} \quad \frac{t}{\tau} - \frac{D'}{\lambda} + \psi' = \text{const.}$$

Da ψ und ψ' in Bezug auf r_0 Constanten sind, so folgt daraus:

$$D = \frac{\lambda}{\tau} \cdot t + \text{const.}, \qquad D' = \frac{\lambda}{\tau} t + \text{const.}$$

Die Wellen schreiten also zu grösseren Werthen von D und D' und daher, weil bei an und für sich grossem r_0 sowohl D als D' mit wachsendem r_0 wächst, zu grösseren Werthen von r_0 fort, sie laufen in's Unendliche hinaus.

Demnach ist zunächst G und hiermit dann auch $u(0)$ *nur aus in's Unendliche hinauslaufenden Wellen zusammengesetzt.*

So ergiebt sich das Resultat, dass in den Gleichungen (54)—(57) *thatsächlich eine Lösung der gestellten Randwerthaufgabe vorliegt.*

19. Näherungsverfahren für den Fall einer vertikal polarisirten einfallenden Welle. Ist die einfallende Welle vertikal polarisirt, so hat man nach Nr. 14 eine Lösung v der Differentialgleichung (A′):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0 \tag{A′}$$

zu suchen, welche auf dem Schirm der Bedingung (B′): $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ genügt und im Unendlichen von der Form (C′):

$$v = e^{ikx} + \text{auslaufende Wellen}$$

ist.

Setzt man:

$$v = e^{ikx} - iku, \tag{81}$$

so muss u gleichfalls der Differentialgleichung (A′) genügen, auf dem Schirm muss gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

und im Unendlichen muss u nur aus auslaufenden Wellen zusammengesetzt sein. Zur Herstellung der Function u kann man nun ein ganz analoges Näherungsverfahren einschlagen, wie im Falle der horizontal polarisirten Welle. Nach Nr. 13 Formel (35) findet man ein Wellenpotential u, welches auf der rechten Schirmhälfte vorgeschriebene Werthe von $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}$ annimmt, durch:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, \frac{\partial u}{\partial x}\, G'(r_0, \varphi_0, r).$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x_0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{\partial G'}{\partial x_0}(r_0, \varphi_0, r).$$

Für $\varphi_0 = \pi$ auf der linken Schirmhälfte gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = -\frac{1}{r_0}\frac{\partial}{\partial \varphi_0},$$

der „hinübergeworfene“ Werth von $\frac{\partial u}{\partial x}$ wird daher:

$$\frac{\partial u(0)}{\partial x_0} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\, \frac{\partial u}{\partial x}\, \frac{1}{r_0}\left[\frac{\partial G'}{\partial \varphi_0}(r_0, \varphi_0, r)\right]_{\varphi_0 = \pi}.$$

Setzt man hier für $\frac{1}{r_0}\frac{\partial G'}{\partial \varphi_0}$ den Ausdruck (38) ein, berücksichtigt, dass für $\varphi_0 = \pi$ nach Fig. 7 $r_0 = r' + d$ wird und kennzeichnet den hinübergeworfenen Werth, wie oben, durch einen Querstrich, so erhält man:

$$\overline{\frac{\partial u(r')}{\partial x}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr \sqrt{\frac{r}{r'+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\frac{\partial u(r)}{\partial x}.$$

Mit Hülfe dieser Formel kann man, ausgehend von $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ auf beiden Schirmhälften, die Randwerthe von $\frac{\partial u}{\partial x}$ fortwährend hinüber- und herüberwerfen und erhält dann ganz analog wie oben die folgende hypothetische Lösung des Problems für die vertikal polarisirte Welle (zur Bequemlichkeit ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ überall durch v ersetzt):

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\,[G'(r_0, \varphi_0, r) + G'(r_0', \varphi_0', r)]\,v(r), \tag{82}$$

wobei:

$$v(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(r), \tag{83}$$

$$v_{n+1}(r) = \frac{1}{\pi}\int_r^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,v_n(r'), \tag{84}$$

$$v_1(r) = 1. \tag{85}$$

Der Unterschied gegen den Fall der horizontal polarisirten Welle besteht darin, dass erstens das räumliche Wellenpotential $u(0)$ aus der Oberflächenbelegung v hier mit Hülfe der Green'schen Function G', statt mit G, abgeleitet wird und dass zweitens in der Recurrenz (84) unter dem Integral statt des Factors $\sqrt{\frac{r+d}{r'}}$, wie in der früheren Recurrenz (56), sein reciproker Werth $\sqrt{\frac{r'}{r+d}}$ auftritt. Letzteres bedingt, wie sich gleich zeigen wird, eine kleine Erschwerung des Convergenzbeweises.

Es ist möglich und für das Folgende vortheilhaft, die Functionenreihe $v_n(r)$ durch eine andere Functionenreihe $w_n(r)$ zu ersetzen, die ebenfalls nach der Recurrenz (84) gebildet wird, aber von einem andern Anfangsglied ausgeht. Addirt man alle Gleichungen (84) von $n = 1$ bis $n = \infty$, so folgt unter der Voraussetzung, dass die Reihe (83) convergirt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} v_n(r) = v(r) - 1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,v(r'). \tag{86}$$

In Nr. 15 hatten wir eine Functionenreihe $u_n(r)$ gebildet durch die Recurrenz (56)

$$\bar{u}_{n+1}(r) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{u}_n(r').$$

Durch Addition aller dieser Recurrenzen ergiebt sich für die Summe $\bar{u}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{u}_n(r)$ in Rücksicht darauf, dass $\bar{u}_1(r) = 1$ war:

$$\bar{u}(r) - 1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r+d}{r'}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,\bar{u}(r')$$

Subtrahirt man diese Gleichung von (86), so folgt durch eine einfache Umstellung:

$$v(r) - \bar{u}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,[v(r') - \bar{u}(r')]$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr'\,e^{-ik(r+r'+d)}}{\sqrt{r'(r+d)}}\,\bar{u}(r').$$

Setzt man jetzt:

$$v(r) - \bar{u}(r) = w(r)\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'}}\,e^{-ikr'}\,\bar{u}(r'), \tag{87}$$

so folgt:

$$w(r) = \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,w(r'). \tag{88}$$

Man erhält eine dieser Functionalgleichung genügende Function $w(r)$ wie man aus der Analogie mit (86) unmittelbar erkennt, indem man setzt:

$$w(r) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(r) \tag{89}$$

und die $w_n(r)$ nach der mit (84) übereinstimmenden Recurrenz:

$$w_{n+1}(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dr' \sqrt{\frac{r'}{r+d}}\,\frac{e^{-ik(r+r'+d)}}{r+r'+d}\,w_n(r') \tag{90}$$

bildet, dabei aber von dem Anfangsglied:

$$w_1(r) = \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} \tag{91}$$

ausgeht — unter der Voraussetzung, dass die Summe (89) convergirt. Ist erst deren Convergenz nachgewiesen, so ergiebt sich die Endlichkeit von $v(r)$ leicht aus (87) mit Hülfe der oben für $\bar{u}(r')$ nachgewiesenen Eigenschaften.

20. Convergenzbeweis für die Reihe der $w_n(r)$. Wir beginnen den Convergenzbeweis ganz analog wie oben in Nr. 17. Durch wiederholte Anwendung der Recurrenz (90) in Rücksicht auf das Anfangsglied (91) und Einführung verschiedener Indices für die Integrationsvariabeln ergiebt sich:

$$w_{n+1}(r) = \left(\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} \cdot \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty dr_n\, dr_{n-1} \cdots dr_1$$
$$\cdot \sqrt{\frac{r_n}{r_n+d} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+d} \cdots \frac{r_1}{r_1+d}} \; \frac{e^{-2ik(r_n+r_{n-1}+\cdots+r_1)}}{(r+r_n+d)(r_n+r_{n-1}+d)\cdots(r_2+r_1+d)}.$$

Die Integrationswege zerlege man ähnlich, wie in den Gleichungen (70)—(72), derartig in Intervalle, dass der Exponentialfactor von Intervall zu Intervall seine Zeichen wechselt. Man hat zu diesem Zweck zu setzen:

$$r_i = p_i + \frac{\lambda}{4} x_i \qquad i = 1, 2, \cdots n,$$

für x_i der Reihe nach alle ganzen positiven Zahlen anzunehmen und p_i jedesmal von 0 bis $\frac{\lambda}{4}$ variiren zu lassen. Die Zerlegung ergiebt:

(92)
$$w_{n+1}(r)$$
$$= \left(\frac{e^{-ikd}}{\pi}\right)^n \frac{e^{-ik(r+d)}}{\sqrt{r+d}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\, dp_{n-1} \cdots dp_1\, e^{-2ik(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_1)}\, \chi_{n+1},$$

wobei:

(93)
$$\chi_{n+1} = \chi_{n+1}(p_1, p_2, \cdots p_n, r)$$
$$= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{x_n=0}^{\infty} (-1)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}\, \varphi_{n+1}\left(p_1+\frac{\lambda}{4}x_1, p_2+\frac{\lambda}{4}x_2, \cdots p_n+\frac{\lambda}{4}x_n, r\right)$$

und

(94)
$$\varphi_{n+1}(r_1, r_2, \cdots r_n, r)$$
$$= \frac{1}{(r+r_n+d)(r_n+r_{n-1}+d)\cdots(r_2+r_1+d)} \sqrt{\frac{r_n}{r_n+d} \cdot \frac{r_{n-1}}{r_{n-1}+d} \cdots \frac{r_1}{r_1+d}}$$

ist.

Aus (92) folgt die Grenze für $w_{n+1}(r)$

(95) $$\text{Mod. } w_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \frac{1}{\sqrt{r+d}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}} \cdots \int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\, dp_{n-1} \cdots dp_1 \text{ Mod. } \chi_{n+1}.$$

Es handelt sich noch darum, eine Grenze für Mod. χ_{n+1} aufzufinden. Unser Hülfssatz aus Nr. 16 scheint zunächst zu versagen. Denn die hier auf-

tretende Function φ_{n+1} (94) lässt sich in Folge der erwähnten Ersetzung der Wurzeln durch ihre reciproken Werthe in keiner Weise so in Factoren zerlegen, dass jeder Factor nur von zwei Variabeln abhängt, mit deren Wachsen er beständig bis auf Null abnimmt. Indessen führt ein einfacher Kunstgriff auf diesen Fall zurück. Man setze:

$$z_i = \sqrt{\frac{r_i}{r_i + d}} \; \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d} \qquad (r_{n+1} = r),$$

sodass:

$$\varphi_{n+1} = z_1 \cdot z_2 \cdots z_i \cdots z_n$$

wird. Jeder von diesen Factoren z_i lässt sich nun in der Weise in eine Differenz $y_i - y_i'$ zerlegen, dass die Functionen y_i und y_i' einzeln die Eigenschaften haben, welche bei der Ableitung des Hülfssatzes von den dort mit dem Buchstaben y bezeichneten Functionen vorausgesetzt wurden. Setzt man nämlich:

$$(96) \qquad y_i - y_i' = z_i, \qquad y_i + y_i' = \sqrt{\frac{r_i + d}{r_i}} \; \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d},$$

so wird:

$$y_i = \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_i + d}{r_i}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_i}{r_i + d}} \right),$$

$$y_i' = \frac{1}{r_{i+1} + r_i + d} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_i + d}{r_i}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_i}{r_i + d}} \right),$$

und man erkennt leicht, dass y_i und y_i' mit wachsendem r_i oder r_{i+1} von positiven Werthen ständig bis auf Null abnehmen und dass dasselbe für $-\frac{dy_i}{dr_{i+1}}$ und $-\frac{dy_i'}{dr_{i+1}}$ gilt. Durch Einführung der y geht φ_{n+1} über in:

$$(97) \qquad \varphi_{n+1} = (y_1 - y_1')(y_2 - y_2') \cdots (y_n - y_n').$$

Denkt man sich die Klammern ausmultiplicirt, so setzt sich φ_{n+1} aus einer Reihe theils positiver, theils negativer Producte und χ_{n+1} nach (93) aus den n-fachen Summen über diese einzelnen Producte zusammen. Jedes Product besteht aus n Factoren, welche die für die Anwendbarkeit des Hülfssatzes erforderlichen Bedingungen erfüllen. Die Summe über jedes Product ist daher kleiner als das betreffende Anfangsglied und χ_{n+1} muss dem absoluten Werthe nach kleiner sein, als die Summe der absoluten Werthe aller Anfangsglieder. Letztere Summe erhält man aber aus (97), indem man allen Producten das positive Vorzeichen giebt, sie wird gleich $(y_1 + y_1')(y_2 + y_2') \cdots (y_n + y_n')$. Es folgt also:

$$\text{Mod. } \chi_{n+1} < (y_1 + y_1')(y_2 + y_2') \cdots (y_n + y_n'),$$

wobei übrigens noch in den Ausdrücken der y für alle r_i ihre Werthe in den Anfangsgliedern p_i einzusetzen sind.

Dann ergiebt sich nach (96):

$$\text{Mod. } \chi_{n+1} < \sqrt{\frac{p_1+d}{p_1}\,\frac{p_2+d}{p_2}\cdots\frac{p_n+d}{p_n}}\cdot\frac{1}{(p_1+p_2+d)\,(p_2+p_3+d)\cdots(p_n+r+d)}$$

und hiermit nach (95):

$$\text{Mod. } w_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \frac{1}{\sqrt{r+d}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}}\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\,dp_{n-1}\cdots dp_1$$
$$\cdot\sqrt{\frac{p_1+d}{p_1}\,\frac{p_2+d}{p_2}\cdots\frac{p_n+d}{p_n}}\,\frac{1}{(p_1+p_2+d)\,(p_2+p_3+d)\cdots(p_n+r+d)}.$$

Setzt man noch für $\sqrt{p_1+d}$ seinen grössten Werth im Integrationsintervall $\sqrt{d+\frac{\lambda}{4}}$ ein, so folgt:

$$\text{Mod. } w_{n+1}(r) < \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \sqrt{\frac{\frac{\lambda}{4}+d}{r+d}} \int_0^{\frac{\lambda}{4}}\int_0^{\frac{\lambda}{4}}\cdots\int_0^{\frac{\lambda}{4}} dp_n\,dp_{n-1}\cdots dp_1$$
$$\cdot\sqrt{\frac{1}{p_1}\,\frac{p_2+d}{p_2}\cdots\frac{p_n+d}{p_n}}\,\frac{1}{(p_1+p_2+d)(p_2+p_3+d)\cdots(p_n+r+d)}.$$

Das hier auftretende Integral stimmt aber mit dem Integral (76) überein bis auf den kleinen Unterschied, dass über p_1 nicht von 0 bis $\frac{\lambda}{2}$, sondern nur bis $\frac{\lambda}{4}$ zu integriren ist. Es gestattet dieselbe Behandlung, wie das Integral (76), und liefert:

$$\text{(98)}\quad \text{Mod. } w_{n+1}(r) < \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4d}}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{4}+d}}{r+d}\cdot\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\lambda}{4(d+r)}}.$$

Mit dieser Ungleichung ist die Convergenz der Reihe der w_n, die Endlichkeit ihrer Summe $w(r)$, für beliebige endliche Spaltbreite d dargethan.

21. Oberflächenbelegung $v(r)$ und Wellenpotential $u(0)$. Da $\bar{u}(r)$ und $w(r)$ endlich sind, so bedarf es zum Nachweis, dass die Oberflächenbelegung:

$$\text{(99)}\qquad v(r) = \bar{u}(r) + w(r)\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'}}\,e^{-ikr'}\,\bar{u}(r')$$

endlich ist, nichts weiter, als die Endlichkeit des Integrals:

$$\text{(100)}\qquad J = \int_0^\infty \frac{dr'}{\sqrt{r'}}\,e^{-ikr'}\,\bar{u}(r')$$

zu erweisen. Man setze:

$$u(r) = 1 + h(r)\, e^{-ikr}, \tag{101}$$

sodass also:

$$h(r) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n(r)\, e^{ikr}$$

ist. Wir prüfen das Verhalten von $h(r)$ für grosses r. Die rechten Seiten der Ungleichungen (78) und (79) werden für grosses r, wie man leicht sieht, klein wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Addirt man diese sämmtlichen Ungleichungen, so folgt daher für grosses r:

$$\text{Mod. } h(r) < \frac{A}{\sqrt{r}} \tag{102}$$

wo A eine endliche Grösse ist. Aehnlich erhält man aus den Ungleichungen (80)

$$\text{Mod. } \frac{d}{dr}\left(\frac{h(r)}{\sqrt{r+d}}\right) < \frac{B}{r^2},$$

wo B eine endliche Grösse ist. Letztere Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{r+d}} \text{ Mod. } \left[\frac{dh(r)}{dr} - \frac{1}{2}\,\frac{h(r)}{r+d}\right] < \frac{B}{r^2}$$

und daraus folgt:

$$\text{Mod. } \frac{dh(r)}{dr} < B\,\frac{\sqrt{r+d}}{r^2} + \frac{1}{2} \text{ Mod. } \frac{h(r)}{r+d}$$

und in Rücksicht auf (102):

$$\text{Mod. } \frac{dh(r)}{dr} < B\,\frac{\sqrt{r+d}}{r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{A}{(r+d)\sqrt{r}}$$

oder:

$$\text{Mod. } \frac{dh(r)}{dr} < \frac{C}{r^{\frac{3}{2}}}, \tag{103}$$

wo C eine neue endliche Grösse ist.

Das zu untersuchende Integral J schreibt sich in Rücksicht auf (101), wenn man den Accent von r fortlässt:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r}}\, e^{-ikr} + \int_0^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{r}}\, e^{-2ikr} h(r).$$

Das erste dieser Integrale ist bekanntlich endlich gleich $\sqrt{\frac{\pi}{ki}}$. Das zweite könnte, weil $h(r)$ stets endlich ist, höchstens durch die Länge des Integrationswegs unendlich werden. Es genügt also nachzuweisen, dass:

$$J' = \int_R^\infty \frac{dr}{\sqrt{r}} e^{-2ikr} h(r)$$

endlich ist, wenn R eine beliebige sehr grosse Zahl bedeutet. Führt man die stets endliche Function von r

$$K(r) = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{r}} e^{-2ikr}$$

ein, so wird:

$$J' = \int_R^\infty dr\, h(r) \frac{dK(r)}{dr}$$

und durch partielle Integration in Rücksicht darauf, dass für unendliches r $h(r)$ verschwindet:

$$J' = -h(R) K(R) - \int_R^\infty dr\, K(r) \frac{dh(r)}{dr}.$$

Da $K(r)$ stets endlich ist, $\frac{dh(r)}{dr}$ aber nach (103) mit wachsendem r klein wird, wie $\frac{1}{r^{\frac{3}{2}}}$, so folgt, dass J', dass J und damit, dass $v(r)$ endlich ist.

Wir sind hiermit soweit gelangt, wie für den Fall horizontal polarisirten Lichts in Nr. 17. Wir haben gezeigt, *dass aus dem Näherungsverfahren*, welches durch die Gleichungen (89)—(91) gekennzeichnet wird, mit Hülfe von (99) *eine bestimmte endliche Oberflächenbelegung $v(r)$ erhalten wird.* Analoge Ueberlegungen, wie in Nr. 18, deren Ausführung wir uns hier ersparen wollen, führen zu dem Resultat, *dass das aus dieser Oberflächenbelegung* nach (82) *hervorgehende räumliche Wellenpotential* $u(0)$:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr [G'(r_0, \varphi_0, r) + G'(r_0', \varphi_0', r)] v(r)$$

thatsächlich allen Bedingungen des Problems Genüge leistet.

Ich wiederhole den Satz aus der Inhaltsübersicht (§ 2): *„Es ist damit der strenge Nachweis erbracht, dass eine Lösung der gestellten Randwerthaufgaben überhaupt möglich ist, was bisher keineswegs mit Sicherheit feststand, sondern nur nach dem „Rayleigh'schen Princip" wahrscheinlich zu machen war.*

§ 5.

Discussion der durch das Näherungsverfahren gelieferten Lösung.

22. Vorbemerkung. So befriedigend die vorstehenden Resultate vom mathematischen Gesichtspunkt aus erscheinen können, physikalisch sind sie deshalb unzureichend, weil die aufeinander folgenden Glieder der Entwicklung der Oberflächenbelegungen durch fortgesetzte Integrationen gewonnen werden, die allgemein nicht ausführbar sind. Indessen lassen sich da auch speciellere Folgerungen ableiten, wo die Convergenz des Näherungsverfahrens rasch genug ist, um eine Beschränkung auf die allerersten Glieder zu gestatten. Es wird daher die Discussion der gewonnenen Lösungen in der Weise zu führen sein, dass wir zunächst einmal die ersten Glieder der Entwicklungen für sich betrachten und dann den Einfluss der höheren Glieder abschätzen. Wo sich der Einfluss der höheren Glieder als hinreichend klein erweist, kann die Betrachtung der ersten Glieder zu physikalischen Einzelfolgerungen verwandt werden.

23. Die ersten Glieder der Entwicklung für horizontal polarisirtes Licht. Für horizontal polarisirtes Licht war die Oberflächenbelegung $u(r)$ in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(r)$ dargestellt worden, wobei $u_1(r) = 1$ war. Beschränkt man sich auf das erste Glied, setzt also $u(r) = 1$, so erhält man für das Wellenpotential $u(0)$ im Raume nach (54):

$$u(0) = w(r_0, \varphi_0) + w(r_0', \varphi_0') \tag{104}$$

wobei:

$$w(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dr\, G(r_0, \varphi_0, r) \tag{105}$$

ist. Diese Function $w(r_0, \varphi_0)$ ist näher zu untersuchen — eine Arbeit, welche wesentlich erleichtert wird durch Beachtung eines engen Zusammenhangs, der zwischen $w(r_0, \varphi_0)$ und einem bereits von Herrn Sommerfeld discutirten Ausdruck besteht.

$w(r_0, \varphi_0)$ hat nach Nr. 18 und Nr. 9 die Eigenschaften, im Unendlichen nur aus auslaufenden Wellen zu bestehn und auf der rechten Schirmhälfte den Werth 1 anzunehmen. Bildet man daher:

$$Z(r_0, \varphi_0) = e^{ikx_0} - w(r_0, \varphi_0) = e^{ikr_0 \sin\varphi_0} - w(r_0, \varphi_0), \tag{106}$$

so wird auf der rechten Schirmhälfte (für $x_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$ oder 2π) $Z = 0$ und im Unendlichen besitzt Z eine von positivem x her einfallende, senkrecht zur Kante polarisirte Welle. Das sind aber die Bedingungen des Beugungsproblems für eine aus dem Unendlichen einfallende ebene Welle,

welche senkrecht auf den durch die rechte Schirmhälfte gebildeten einfachen Rand auffällt, die Bedingungen also für einen Fall eben des Problems, das von Herrn Sommerfeld behandelt worden ist. Herr Sommerfeld giebt seiner Lösung die Form (ich vereinige Herrn Sommerfeld's Formeln l. c. pag. 359 (5) und pag. 367 (3a), specialisire auf den Fall der senkrecht einfallenden Welle, indem ich dort $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ setze, versehe ferner r und φ mit dem Index 0):

$$Z(r_0, \varphi_0) = e^{ikr_0 \sin\varphi_0} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau - e^{-ikr_0 \sin\varphi_0} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_2} e^{-i\tau^2} d\tau,$$

(107)

$$T_1 = \sqrt{2kr_0} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad T_2 = \sqrt{2kr_0} \cos\left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{kr_0(1+\sin\varphi_0)}, \qquad = \sqrt{kr_0(1-\sin\varphi_0)}.$$

Da die eindeutige Bestimmtheit des Problems physikalisch evident ist, müssen beide Ausdrücke für Z (106) und (107) übereinstimmen und auf Grund dieser physikalischen Evidenz möge die etwas umständliche rechnerische Transformation des einen Ausdrucks in den andern hier erspart bleiben*).

Mit Hülfe von Z drückt sich $u(0)$ folgendermassen aus:

$$u(0) = 2e^{ikx_0} - Z(r_0, \varphi_0) - Z(r_0', \varphi_0'),$$

und nach (48) wird die uns eigentlich interessirende Grösse, die complexe electrische Schwingungsamplitude ξ:

$$\xi(0) = e^{ikx_0} - u(0) = Z(r_0, \varphi_0) + Z(r_0', \varphi_0') - e^{ikx_0}.$$

Da wir es fortan nur noch mit vom Punkte 0 abhängigen Grössen zu thun haben, dürfen wir überall den Index 0 fortlassen. Setzen wir zudem in ξ den Ausdruck (107) von Z ein, so erhalten wir:

$$\xi = e^{ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2} d\tau - 1\right\} - e^{-ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_2} e^{-i\tau^2} d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T_2'} e^{-i\tau^2} d\tau\right\},$$

(108)

$$T_1 = \sqrt{2kr} \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad T_2 = \sqrt{2kr'} \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$T_1' = \sqrt{2kr'} \cos\left(\frac{\varphi'}{2} - \frac{\pi}{2}\right), \qquad T_2' = \sqrt{2kr'} \cos\left(\frac{\varphi'}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

*) Eine Eigenschaft des Ausdrucks:

$$w(r_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr\, G(r_0, \varphi_0, r),$$

die eigentlich erst aus der Transformation hervorgeht, ist bei diesen Schlüssen schon

Es sei daran erinnert, dass r, φ und r', φ' Polarcoordinaten des Punktes 0 in Bezug auf die beiden Spaltkanten bedeuten. Neben diesen beiden Systemen wollen wir jetzt noch ein drittes ϱ, χ einführen, welches die Spaltmitte zum Pol hat und bei dem der Winkel χ von der negativen

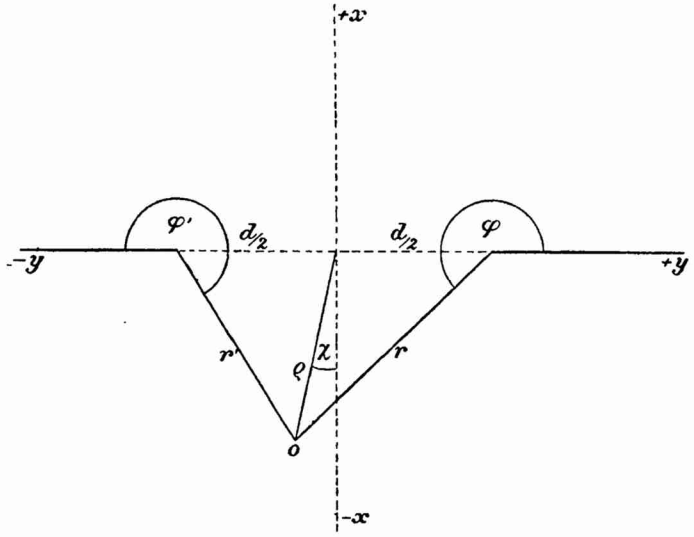

Fig. 8.

x-Axe aus positiv nach der negativen y-Axe hin gezählt wird. Der Winkel χ ist dann das, was man gewöhnlich als „Beugungswinkel" bezeichnet. Zwischen den rechtwinklichen Coordinaten x, y und diesen drei Systemen von Polarcoordinaten ergiebt die Figur die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= -\varrho\cos\chi = r\sin\varphi = r'\sin\varphi', \\ y &= -\varrho\sin\chi = r\cos\varphi + \frac{d}{2} = r'\cos\varphi' - \frac{d}{2}. \end{aligned} \tag{109}$$

Ferner sei eine Bemerkung über die in ζ auftretenden Integrale vorausgenommen. Dieselben gestatten eine sehr einfache angenäherte Darstellung, sobald die betr. Grenze T numerisch gross ist. Man hat nämlich für positives T die semiconvergente Entwicklung (Sommerfeld l. c. p. 359):

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_T^\infty e^{-i\tau^2}\,d\tau = \frac{e^{-iT^2}}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{2i}\,\frac{1}{T} - \frac{1}{(2i)^2}\,\frac{1}{T^3} + \frac{1\cdot 3}{(2i)^3}\,\frac{1}{T^5}\cdots\right\}$$

anticipirt. Es folgt nämlich aus Nr. 9 zwar, dass $w(r_0, \varphi_0) = 1$ ist auf allen Punkten des Schirmes, aber ausgenommen die Schirmkante. Für Punkte in der Schirmkante haben wir nicht gezeigt, dass $w(r_0, \varphi_0) = 1$ ist, vielmehr haben wir oben (in Nr. 11) gerade diese Eigenschaft vorausgesetzt und auf einen späteren Beweis verwiesen. Der Beweis würde in der Transformation liegen. Denn in der Schirmkante, für $r_0 = 0$, wird unabhängig von φ_0 nach (107) $Z = 0$ und daher nach (106): $w = 1$.

und daraus folgt unter Beschränkung auf das erste Glied dieser Entwicklung und in Rücksicht auf die bekannte Gleichung:

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2}\,d\tau = 1, \tag{110}$$

für grosses positives T:

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2}\,d\tau = 1 - \frac{e^{-iT^2+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2iT},$$

für grosses negatives T:

$$\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2}\,d\tau = -\frac{e^{-iT^2+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2iT}. \tag{111}$$

Bei der jetzt folgenden Discussion des Ausdrucks ξ *wollen wir uns auf den* optisch wichtigsten *Fall beschränken, dass der Punkt* 0 *hinter dem Spalt* $\left(\varphi \text{ und } \varphi' > \pi,\ -\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}\right)$ *und in grosser Entfernung vom Spalt liegt.* Dabei soll nicht nur das Verhältniss der Entfernung zur Spaltbreite $\frac{\varrho}{d}$, sondern auch das combinirte Verhältniss $\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\lambda}{d}$ sehr gross sein, d. h. im Falle der Spalt in einem gewissen Verhältniss breit gegen die Wellenlänge ist, soll die Entfernung vom Spalt in einem *höheren* Verhältniss gross gegen die Spaltbreite sein. Wir wollen direct setzen:

$$\frac{\varrho}{d}\cdot\frac{\lambda}{d} = c^3 \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{d^2}{\lambda}\,c^3, \tag{112}$$

wo c eine *grosse Zahl* ist.

Die Grössen T drücken sich durch ϱ und χ folgendermassen aus:

$$\begin{aligned}
(T_1)^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 + d\varrho\sin\chi + \tfrac{d^2}{4}} - \varrho\cos\chi\right),\\
(T_1')^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 - d\varrho\sin\chi + \tfrac{d^2}{4}} - \varrho\cos\chi\right),\\
(T_2)^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 + d\varrho\sin\chi + \tfrac{d^2}{4}} + \varrho\cos\chi\right),\\
(T_2')^2 &= k\left(\sqrt{\varrho^2 - d\varrho\sin\chi + \tfrac{d^2}{4}} + \varrho\cos\chi\right)
\end{aligned} \tag{113}$$

oder für sehr grosses ϱ durch binomische Entwicklung der Wurzeln nahe:

$$(114)\quad \begin{aligned} (T_1)^2&=k\Big(\varrho[1-\cos\chi]+\frac{d}{2}\sin\chi\Big),\quad (T_2)^2=k\Big(\varrho[1+\cos\chi]+\frac{d}{2}\sin\chi\Big),\\ (T_1')^2&=k\Big(\varrho[1-\cos\chi]-\frac{d}{2}\sin\chi\Big),\quad (T_2')^2=k\Big(\varrho[1+\cos\chi]-\frac{d}{2}\sin\chi\Big). \end{aligned}$$

Das Vorzeichen ist hier jedes Mal in Uebereinstimmung mit (108) zu wählen. Aus (108) folgt aber, dass hinter dem Spalt (φ und $\varphi' > \pi$) T_2 und T_2' stets negativ sind. Ferner folgt aus (114), dass für grosses $\frac{\varrho}{\lambda}$ oder $k\varrho$ hinter dem Spalt $\left((\chi) < \frac{\pi}{2}\right)$ T_2 und T_2' numerisch stets gross sind. Zerlegt man daher den Ausdruck (108) von ζ in zwei Theile, indem man setzt:

$$(115)\quad \zeta = \alpha - \beta.$$

$$(116)\quad \alpha = e^{ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2}d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2}d\tau - 1\right\},$$

$$\beta = e^{-ikx}\left\{\frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_2} e^{-i\tau^2}d\tau + \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T_2'} e^{-i\tau^2}d\tau\right\},$$

so darf man in β die Näherungsformeln (111) anwenden und erhält:

$$\beta = \frac{e^{\frac{\pi i}{4} - ik(x+\varrho[1+\cos\chi])}}{2i\sqrt{\pi k}}\cdot\left\{\frac{e^{-\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1+\cos\chi)+\frac{d}{2}\sin\chi}} + \frac{e^{\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1+\cos\chi)-\frac{d}{2}\sin\chi}}\right\},$$

wobei die Wurzeln mit positivem Zeichen zu nehmen sind. Hier kann man noch in den Nennern das Glied $\frac{d}{2}\sin\chi$ gegen $\varrho(1+\cos\chi)$ vernachlässigen und findet in Rücksicht auf (109):

$$(117)\quad \beta = \frac{e^{-ik\varrho-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi k\varrho}}\,\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\cos\frac{\chi}{2}}.$$

Etwas schwieriger ist die Behandlung des ersten Theils von ζ, von α. Was zunächst die Vorzeichen von T_1 und T_1' angeht, so sind drei Gebiete (I), (I') und (II) zu unterscheiden, welche durch die Schirmhälften und die Geraden $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ und $\varphi' = \frac{3\pi}{2}$ begrenzt werden. In den Gebieten (I) und

„geometrischen Schattens“ (I) und (I') haben T_1 und T_1' entgegengesetztes Vorzeichen, in dem Gebiete des „geometrischen Lichts“ II sind

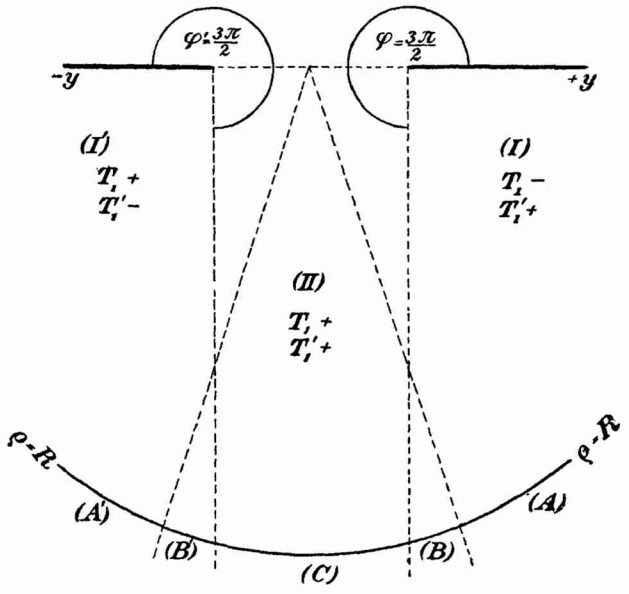

Fig. 9.

sie beide positiv. Es ist, wie erwähnt, nur unsere Absicht, das Verhalten von ξ auf der Peripherie eines sehr grossen Kreises:

$$\varrho = \frac{d^2}{\lambda} \cdot c^3 = R$$

zu untersuchen. Wir theilen diese Peripherie in folgender Weise ein. Man ziehe die Linien:

$$\frac{d}{\lambda} \sin \chi = \frac{1}{c} \quad \text{und} \quad \frac{d}{\lambda} \sin \chi = -\frac{1}{c}.$$

Es sind dies zwei von der Spaltmitte unter sehr kleinem Winkel χ ausgehende Gerade. Dieselben treffen die Grenzen zwischen den Gebieten I, I' und II in der Distanz:

$$\varrho = \frac{d}{2 \sin \chi} = \frac{d^2}{\lambda} \cdot \frac{c}{2},$$

welche kleiner ist als der Radius unsres Kreises $R = \frac{d^2}{\lambda} \cdot c^3$. Die Peripherie des Kreises R zerfällt demnach in fünf Theile. In zwei Theile (A) und (A'), in welchen:

$$\left| \frac{d}{\lambda} \sin \chi \right| > \frac{1}{c} \tag{118}$$

ist, und in drei Theile (B), (B'), (C'), in welchen:

$$\left|\frac{d}{\lambda}\sin\chi\right| < \frac{1}{c} \tag{119}$$

ist und welche sich noch durch das Vorzeichen von T_1 und T_1' von einander unterscheiden.

Wir beginnen mit den Gebieten (A) und (A'). Beachtet man die Ungleichung:

$$1-\cos\chi = 2\sin^2\frac{\chi}{2} > \frac{1}{2}\sin^2\chi,$$

so folgt in Rücksicht auf (118):

$$k\varrho(1-\cos\chi) = \frac{kd^2}{\lambda}c^3(1-\cos\chi) > \frac{kd^2}{2\lambda}c^3\sin^2\chi > \frac{k\lambda c}{2}$$

oder, da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist

$$k\varrho(1-\cos\chi) > \pi c. \tag{120}$$

Ferner wird:

$$\left|\frac{\varrho(1-\cos\chi)}{\frac{d}{2}\sin\chi}\right| > \frac{\varrho}{d}\sin\chi > \frac{d}{\lambda}c^3\cdot\frac{\lambda}{dc}$$

oder:

$$\left|\frac{\varrho(1-\cos\chi)}{\frac{d}{2}\sin\chi}\right| > c^2. \tag{121}$$

Die Ungleichheiten (120) und (121) lehren, dass in den Ausdrücken (114) von T_1 und T_1' der erste Theil $k\varrho(1-\cos\chi)$ numerisch gross und ausserdem gross im Verhältniss zum zweiten Theil $\frac{kd}{2}\sin\chi$ ist. Demnach ist in (A) und (A') T_1 und T_1' gross. Man darf daher die Näherungsformeln (110) resp. (111) verwenden und erhält in Rücksicht auf das entgegengesetzte Vorzeichen von T_1 und T_1':

In (A) und (A'):

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}+ik(x-\varrho[1-\cos\chi])}}{2i\sqrt{\pi k}}\left\{\frac{e^{\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1-\cos\chi)-\frac{d}{2}\sin\chi}} - \frac{e^{-\frac{ikd}{2}\sin\chi}}{\sqrt{\varrho(1-\cos\chi)+\frac{d}{2}\sin\chi}}\right\}$$

oder, wenn man in den Wurzeln die zweiten Theile gegen die ersten vernachlässigt:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}}\,\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}}. \tag{122}$$

Für die übrigen drei Gebiete (B), (B') und (C') empfiehlt sich eine kleine Umsetzung des Ausdrucks (116) von α. Es ist:

$$\int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{-T_1'}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{-T_1'}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau + \int_{T_1}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau + \int_{-\infty}^{T_1'} e^{-i\tau^2} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\tau^2} d\tau + \int_{-T_1'}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau,$$

und damit wird in Rücksicht auf (110):

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-T_1'}^{T_1} e^{-i\tau^2} d\tau. \tag{123}$$

Nehmen wir hier zunächst das Gebiet (B') in Angriff, so ist in demselben T_1 positiv, T_1' negativ und durch Einführung der absoluten Werthe der T folgt:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} \int_{|T_1'|}^{|T_1|} e^{-i\tau^2} d\tau. \tag{123a}$$

Nun gilt in (B') die Ungleichung (119), aus der folgt:

$$kd \sin\chi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\chi < \frac{2\pi}{c}.$$

Demnach ist der Unterschied zwischen $(T_1)^2$ und $(T_1')^2$ nach (114) eine sehr kleine Grösse und es kann daher innerhalb des Integrationsintervalls $e^{-i\tau^2}$ constant gleich seinem Mittelwerth $e^{-ik\varrho(1-\cos\chi)}$ gesetzt werden. Damit wird aber:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} e^{-ik\varrho(1-\cos\chi)} (|T_1| - |T_1'|). \tag{124}$$

Um $|T_1| - |T_1'|$ mit einer solchen Genauigkeit zu finden, dass der Fehler klein wird gegen den Betrag der Grösse selbst, sind die Ausdrücke (113) für T_1 und T_1' etwas genauer zu entwickeln. Berücksichtigt man bei der Entwicklung der Wurzeln ein Glied mehr als in (114), so folgt:

$$T_1^2 = k\varrho(1-\cos\chi) + \frac{kd}{2}\sin\chi + \frac{kd^2}{8\varrho}\cos^2\chi,$$

$$T_1'^2 = k\varrho(1-\cos\chi) - \frac{kd}{2}\sin\chi + \frac{kd^2}{8\varrho}\cos^2\chi$$

oder durch eine einfache Umstellung:

$$(125)\quad \begin{aligned} T_1^2 &= 2k\varrho\left(\sin\tfrac{\chi}{2}+\tfrac{d}{4\varrho}\cos\tfrac{\chi}{2}\right)^2-\tfrac{kd^2}{8\varrho}\sin^2\tfrac{\chi}{2}\,(2\cos\chi+1),\\ T_1'^2 &= 2k\varrho\left(\sin\tfrac{\chi}{2}-\tfrac{d}{4\varrho}\cos\tfrac{\chi}{2}\right)^2-\tfrac{kd^2}{2}\sin^2\tfrac{\chi}{2}\,(2\cos\chi+1).\end{aligned}$$

Vernachlässigt man die zweiten Glieder, so erhält man:

$$(126)\quad T_1=\sqrt{2k\varrho}\left(\sin\tfrac{\chi}{2}+\tfrac{d}{4\varrho}\cos\tfrac{\chi}{2}\right),\quad T_1'=\sqrt{2k\varrho}\left(-\sin\tfrac{\chi}{2}+\tfrac{d}{4\varrho}\cos\tfrac{\chi}{2}\right).$$

Die Vorzeichen sind hier schon so bestimmt, dass sie mit den aus (108) folgenden Vorzeichen übereinstimmen. Beachtet man noch, dass in dem Gebiete (B') nach der Figur:

$$2\varrho\,\mathrm{tg}\,\tfrac{\chi}{2}>\varrho\sin\chi>\tfrac{d}{2}$$

ist und bildet in Rücksicht hierauf die absoluten Werthe von T und T', so folgt:

$$|T_1|-|T'|=\sqrt{\tfrac{kd^2}{2\varrho}}\cdot\cos\tfrac{\chi}{2}.$$

Die Wurzel aus den vernachlässigten Gliedern ist von der Ordnung $\sqrt{\frac{kd^2}{2\varrho}}\sin\frac{\chi}{2}$, also bei den hier in Frage kommenden kleinen Werthen des Winkels χ in der That gegen $|T_1|-|T'|$ zu vernachlässigen.

Setzen wir wegen der Kleinheit von χ noch $\cos\frac{\chi}{2}=1$, so folgt: für das Gebiet (B'):

$$(127)\qquad \alpha=e^{\frac{i\pi}{4}-ik\varrho}\cdot\sqrt{\tfrac{kd^2}{2\pi\varrho}}.$$

Eine ganz ähnliche Rechnung führt zu dem Resultat, dass für das Gebiet (B) derselbe Werth von α gilt.

Es bleibt das Gebiet (C). In (C) hat man nach der Figur:

$$|\varrho\sin\chi|<\tfrac{d}{2}$$

und dazu die Ungleichung (119):

$$\left|\tfrac{d}{\lambda}\sin\chi\right|<\tfrac{1}{c}.$$

Daraus folgt:

$$T_1^2=k\varrho\cdot 2\sin^2\tfrac{\chi}{2}+\tfrac{dk}{2}\sin\chi<\tfrac{kd}{2}\,\mathrm{tg}\,\tfrac{\chi}{2}+\tfrac{kd}{2}\sin\chi<\tfrac{\pi}{c}\left(1+\frac{1}{2\cos^2\frac{\chi}{2}}\right)$$

und ebenso:

$$T_1'^2=k\varrho\cdot 2\sin^2\tfrac{\chi}{2}-\tfrac{dk}{2}\sin\chi<\tfrac{\pi}{c}\left(1+\frac{1}{2\cos^2\frac{\chi}{2}}\right).$$

Im ganzen Gebiet (C) sind also T_1 und T_1' sehr kleine Grössen. In dem Integral:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} \int_{-T_1}^{T_1'} e^{-i\tau^2}\, d\tau,$$

darf man daher wegen der Kleinheit der Grenzen $e^{-i\tau^2} = 1$ setzen und findet somit:

$$\alpha = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}+ikx}}{\sqrt{\pi}} (T_1 + T_1').$$

Setzt man hier für T_1 und T_1' die Werthe (126) ein und beachtet, dass für kleines χ nahe $x = -\varrho$ ist, so folgt:

$$\alpha = e^{\frac{i\pi}{4}-ik\varrho} \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}, \tag{128}$$

also eine mit (127) identische Formel.

Unser Resultat für α ist sonach zusammengefasst dieses: In den Gebieten (A) und (A') gilt nach (118) und (122):

$$\left|\frac{kd}{2}\sin\chi\right| > \frac{\pi}{c}, \qquad \alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}}.$$

In den Gebieten (B), (B') und (C) gilt nach (119), (127) und (128):

$$\left|\frac{kd}{2}\sin\chi\right| < \frac{\pi}{c}, \qquad \alpha = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \cdot kd.$$

Nun sieht man aber, dass für ein χ, welches der letzteren Ungleichung genügt (c ist sehr gross), die erste Formel in die zweite übergeht. *Demnach kommt der ersten Formel allgemeine Gültigkeit für alle Werthe von χ zu.*

Setzen wir jetzt die gefundenen Ausdrücke für α und β in (115) ein, so erhalten wir als *Darstellung der elektrischen Schwingungscomponente für alle Punkte in grosser Entfernung vom Spalt hinter dem Schirm:*

$$\xi = \frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}} - e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\cos\frac{\chi}{2}} \right\}. \tag{129}$$

Das ist das Ergebniss der Discussion des ersten Gliedes des Näherungsverfahrens.

24. Einfluss der höheren Glieder. Es ist in zweiter Linie zu untersuchen, welchen Betrag der Einfluss der höheren Glieder des Näherungsverfahrens erreicht.

In Rücksicht auf die Ungleichung: arc tg $x < x$ kann man die früher abgeleiteten Grenzen (78), (79), (80) für die Glieder der Entwicklung der Oberflächenbelegung durch die etwas weiteren ersetzen:

$$\text{Mod.}\,[\bar{u}_{n+1}(x)] < \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}\right)^{n-1}\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\lambda}{d+r}},$$

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{u_{n+1}(r)\,e^{ikr}}{\sqrt{r+d}}\right] < \left(\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}\right)^{n-1}\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{2\lambda}}{(d+r)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man, wie oben:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r) = h(r)\,e^{-ikr}$$

und führt die Abkürzung:

$$\vartheta = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}}$$

ein, so folgt:

$$\text{(130)}\qquad \text{Mod.}\,h(r) < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{\frac{2d}{d+r}},$$

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{h(r)}{\sqrt{r+d}}\right] < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\sqrt{2d}}{(d+r)^2}$$

und aus letzterer Ungleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{r+d}}\,\text{Mod.}\,\frac{dh(r)}{dr} < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\sqrt{2d}}{(d+r)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(r+d)^{\frac{3}{2}}}\,\text{Mod.}\,h(r)$$

und daraus:

$$\text{(131)}\qquad \text{Mod.}\,\frac{dh(r)}{dr} < \frac{3}{2}\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\sqrt{2d}}{(d+r)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man jetzt:

$$V(r_0,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dr\,G(r_0,\varphi_0,r)\sum_{n=2}^{\infty}\bar{u}_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dr\,e^{-ikr}\,G(r_0,\varphi_0,r)\,h(r),$$

so stellt nach (54) die Summe

$$V(r_0,\varphi_0) + V(r_0',\varphi_0')$$

das durch die Einwirkung der höheren Glieder zu ζ hinzukommende Zusatzpotential dar.

Es ist eine Grenze für $V(r_0,\varphi_0)$ zu suchen. Der Ausdruck (22) von $G(r_0,\varphi_0,r)$ lautete:

$$G(r_0, \varphi_0, r) = \mp 2 r_0 \sin\varphi_0 k \frac{U_1(kD)}{D}$$

$$-\frac{k}{\pi} r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty \frac{U_1(kD')}{D'} dv \sin iv \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\},$$

$$D = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 r r_0 \cos\varphi_0}, \quad D' = \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2 r r_0 \cos iv}.$$

Wir wollen uns nun bei der weiteren Grenzbestimmung auf Punkte r_0, φ_0 beschränken, die erstens in grosser Entfernung vom Spalt liegen und zweitens nicht zu grossen Beugungswinkeln angehören in der Art, dass die Entfernung D von den Punkten des Schirms und erst recht die Grösse D' im Verhältniss zur Wellenlänge für alle zu betrachtenden Punkte stets gross ist. Man hat es dann nur noch mit grossen Argumenten kD und kD' der Bessel'schen Function U_1 zu thun und darf für U_1 seinen asymptotischen Werth (20):

$$U_1(z) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-i\left(z + \frac{\pi}{4}\right)}$$

einführen. Hiermit geht aber G über in:

$$G(r_0, \varphi, r) = \pm i r_0 \sin\varphi_0 \sqrt{2\pi k} \frac{e^{-ikD - \frac{i\pi}{4}}}{D^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\sqrt{\frac{k}{2\pi}} r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty dr \sin iv \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\} \frac{e^{-ikD' + \frac{i\pi}{4}}}{D'^{\frac{3}{2}}}.$$

Führt man die Hülfsfunctionen ein:

$$(132) \quad F(r_0, \varphi_0) = \int_0^\infty dr \frac{e^{-ik(D+r)}}{D^{\frac{3}{2}}} h(r), \quad F'(r_0, v) = \int_0^\infty dr \frac{e^{-ik(D'+r)}}{D'^{\frac{3}{2}}} h(r),$$

so folgt für V:

$$V(r_0, \varphi_0) = \pm i r_0 \sin\varphi_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \cdot F(r_0, \varphi_0) e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

$$+\sqrt{\frac{k}{2\pi}} \frac{e^{+\frac{i\pi}{4}}}{2\pi} r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2} \int_0^\infty dv \sin iv F'(r_0, v) \left\{ \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}} \right\}.$$

Daraus leitet man die Grenze für V ab:

$$\text{(133)}\qquad \text{Mod. } V < |r_0 \sin\varphi_0| \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\,\text{Mod. } F$$

$$+\left|r_0 \sin\frac{\varphi_0}{2}\right| \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_0^\infty dv \sin iv\,\text{Mod. } F'(r_0, v)\cdot \left\{\frac{1}{\sin\frac{iv}{2} - \cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2} + \cos\frac{\varphi_0}{2}}\right\}.$$

Es bleibt also die Aufgabe, Grenzen für Mod. F und Mod. F' zu finden.

Aus dem Ausdruck (132) von F folgt durch partielle Integration:

$$F = \left[\frac{i}{k}\,\frac{e^{-ik(D+r)}}{1+\frac{dD}{dr}}\,\frac{h(r)}{D^{\frac{1}{2}}}\right]_{r=0}^{r=\infty} - \frac{i}{k}\int_0^\infty dr\, e^{-ik(D+r)}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{h(r)}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right],\quad \frac{dD}{dr} = \frac{r - r_0\cos\varphi_0}{D}$$

und daraus findet man leicht in Rücksicht auf (130):

$$\text{(134)}\quad \text{Mod. } F < \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\frac{\sqrt{2}}{k}\,\frac{1}{r_0^{\frac{1}{2}}(1-\cos\varphi_0)} + \frac{1}{k}\int_0^\infty dr\,\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{h(r)}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right].$$

Wenn man beachtet, dass $D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right) = \sqrt{D}\,(D + r - r_0\cos\varphi_0)$ eine mit r stets wachsende Grösse ist, so wird:

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{h(r)}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right] < -\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right]\text{Mod. } (hr)$$

$$+\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\,\text{Mod.}\,\frac{dh(r)}{dr}$$

und mit Hülfe von (130) und (131):

$$\text{Mod.}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{h(r)}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right]$$

$$< \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{2d}\left\{\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r+d^3}}\,\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)} - \frac{1}{\sqrt{r+d}}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right]\right\}$$

$$< \frac{\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{2d}\left\{\frac{3}{2}\,\frac{1}{\sqrt{r+d^3}}\,\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)} - \frac{3}{\sqrt{r+d}}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right]\right\}$$

$$< -\frac{3\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{2d}\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{\sqrt{r+d}\,D^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{dD}{dr}\right)}\right].$$

Setzt man dies in (134) ein, so folgt:

$$\text{Mod. } F < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2}}{k}\,\frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}(1-\cos\varphi_0)}.$$

Eine ganz ähnliche Behandlung liefert für F':

$$\text{Mod. } F' < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\sqrt{2}}{k}\,\frac{1}{r_0^{\frac{3}{2}}(1+\cos iv)}.$$

Damit wird nach (133):

$$\text{Mod. } V < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{1}{\sqrt{\pi k r_0}}\left\{\left|\frac{\sin\varphi_0}{1-\cos\varphi_0}\right| + \left|\sin\frac{\varphi_0}{2}\right|\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dv\,\sin iv}{1+\cos iv}\left\{\frac{1}{\sin\frac{iv}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{iv}{2}-\cos\frac{\varphi_0}{2}}\right\}\right\}.$$

Führt man in dem Integral $\xi = \sin\frac{iv}{2}$ als Variable ein, so wird dasselbe rational, und lässt sich daher leicht ausführen. Die Rechnung ergiebt für seinen Werth:

$$\frac{2\pi}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\left(1 \mp \cos\frac{\varphi_0}{2}\right) \quad \text{je nachdem} \quad \begin{matrix}\varphi_0 < \pi \\ \varphi_0 > \pi\end{matrix}$$

und damit wird die gesuchte Grenze von V:

$$\text{Mod. } V(r_0, \varphi_0) < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{1}{\sqrt{\pi k r_0}}\,\frac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}.$$

Bildet man auf dieselbe Weise eine Grenze für $V(r_0', \varphi_0')$ und ersetzt, wie es für grosse Entfernung vom Spalt erlaubt ist, r_0 und r_0' durch ϱ, φ_0 durch $\frac{3\pi}{2} - \chi$, φ_0' durch $\frac{3\pi}{2} + \chi$ (s. Fig. 8), so erhält man die gesuchte Grenze für den Einfluss der Restglieder:

$$(135)\quad \text{Mod.}[V(r_0,\varphi_0)+V(r_0',\varphi_0')] < \frac{4\vartheta}{1-\vartheta}\sqrt{\frac{2}{\pi k\varrho}}\cdot\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi},\quad \vartheta = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}} = \sqrt{\frac{2}{\pi k d}}.$$

Der Betrag dieser Grenze wird unten mit dem Betrag ζ des ersten Gliedes zu vergleichen sein.

25. Analoges für vertikal polarisirtes Licht. Zunächst sollen noch die analogen Ueberlegungen für vertikal polarisirtes Licht angegeben werden, um dann die Resultate gemeinsam discutiren zu können.

Man beginne auch hier damit, die Oberflächenbelegung $v(r) = 1$ zu setzen und das aus dieser Oberflächenbelegung nach (82) entspringende Wellenpotential:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr\,[G'(r_0, \varphi_0, r) + G'(r_0', \varphi_0', r)]$$

zu betrachten. Man bemerkt sogleich, dass wiederum ein naher Zusammenhang zwischen $u(0)$ und derjenigen Function Z' bestehn muss, durch welche Herr Sommerfeld die Beugung einer parallel zur Kante polarisirten Welle an einem einfachen Rand dargestellt hat, und zwar findet man ähnlich wie oben:

$$iku(0) = 2e^{ikz} - Z'(r_0, \varphi_0) - Z'(r_0', \varphi_0').$$

Damit folgt für die magnetische Schwingungsamplitude v:

$$v = e^{ikz} - iku(0) = Z'(r_0, \varphi_0) + Z'(r_0', \varphi_0') - e^{ikz}.$$

Führt man die aus Herrn Sommerfeld's Arbeit (pag. 359 (5) und pag. 367 (3b)) zu entnehmende Darstellung der Function Z' ein, so erhält man für v durch einfache Umstellungen:

$$v = \alpha + \beta$$

(wobei α und β die beiden bei der obigen Discussion von Z in (115) eingeführten Hülfsgrössen sind) und es folgt daher mit Hülfe der Ausdrücke (117) und (122) von β und α:

$$(136) \qquad v = \frac{e^{-ik\varrho}}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \left\{ e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\sin\frac{\chi}{2}} + e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\cos\frac{\chi}{2}} \right\}.$$

Es wäre nun weiter eine Grenze für den Einfluss des vernachlässigten Restes von $v(r)$ abzuleiten. Indessen möge es genügen, hier nur den Charakter des Resultates anzugeben, das aus einer ähnlichen, aber noch etwas umständlicheren Rechnung hervorgeht, wie sie in voriger Nummer ausgeführt wurde. Bezeichnet man nämlich mit v' den vernachlässigten Rest der magnetischen Schwingungsamplitude, so findet sich:

$$(137) \qquad \text{Mod. } v' < \frac{1}{\sqrt{2\pi k\varrho}} \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2} \frac{B}{\cos^2\chi},$$

wobei B eine mässige numerische Zahl ist. Diese Grenze bezieht sich wieder nur auf Punkte in grösserem Abstand vom Schirm.

26. Zusammenstellung und Ergebnisse. Wir wollen die Ergebnisse für die Beträge der ersten Glieder unsrer Entwicklungen, wie der Reste, aus den Gleichungen (129), (135), (136), (137) zusammenstellen, dabei aber zugleich eine Aenderung ihrer Form vornehmen. Auch sei nochmals hervorgehoben, dass *die folgenden einfachen Formeln nur für Punkte hinter dem Schirm und in einer Entfernung vom Spalt, für welche* $\frac{\varrho \cdot \lambda}{d^2}$ *eine grosse Zahl ist, gelten.*

Wir setzen:

$$(A) \qquad J = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\sin\frac{\chi}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\cos\frac{\chi}{2}}\right]^2$$

und:

$$(B) \qquad \operatorname{tg}\delta = \operatorname{tg}\left(\frac{\chi}{2}\right)\cdot\operatorname{cotg}\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right).$$

Dann folgt für die complexe Schwingungsamplitude bei horizontal polarisirtem Licht aus Gl. (129):

$$\zeta = \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\cdot\sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}-\delta\right)}$$

und bei vertikal polarisirtem Licht aus Gl. (136):

$$\nu = \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}+\delta\right)}.$$

Daraus folgt für die Schwingungscomponenten selbst:

$$Z = \text{pars real.}\left(\zeta e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}\right) = \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\cdot\sqrt{J}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\varrho - \frac{\lambda}{8} - \frac{\delta}{2\pi}\lambda - at\right),$$

$$N = \text{pars real.}\left(\nu e^{2\pi i\frac{t}{\tau}}\right) = \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\cdot\sqrt{J}\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\varrho - \frac{\lambda}{8} + \frac{\delta}{2\pi}\lambda - at\right).$$

Man sieht, dass (abgesehn von dem Factor $\frac{kd^2}{2\pi\varrho}$) J *die Lichtintensität bedeutet, während* δ (abgesehn von dem constanten Phasengewinn $\frac{\lambda}{8}$) *die durch die Beugung verursachte Phasenverschiebung darstellt.*

Für die vernachlässigten Reste ζ' und ν' der Schwingungsamplituden gelten in jeder gegen die Wellenlänge grossen Entfernung vom Schirm die Grenzen:

$$\text{Mod. } \zeta' < \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\,\frac{8}{kd}\,\frac{\vartheta}{1-\vartheta}\,\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}, \qquad \text{Mod. } \nu' < \sqrt{\frac{kd^2}{2\pi\varrho}}\,\frac{B}{kd}\,\frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}\,\frac{1}{\cos^2\chi},$$

$$\vartheta = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{d}} = \sqrt{\frac{2}{\pi kd}} \qquad B \text{ eine mässig grosse Zahl.}$$

Aendert man noch die Einheit der Lichtintensität im Verhältniss $\frac{kd^2}{2\pi\varrho}$, so kann man auch schreiben:

$$(C) \qquad \zeta = \sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}-\delta\right)}, \qquad \nu = \sqrt{J}\,e^{-i\left(k\varrho-\frac{\pi}{4}+\delta\right)},$$

$$(D) \qquad \text{Mod. } \zeta' < 4\pi\,\frac{\vartheta^2}{1-\vartheta}\,\frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}, \qquad \text{Mod. } \nu' < \frac{\pi}{2}B\,\frac{\vartheta^2}{(1-\vartheta)^2}\,\frac{1}{\cos^2\chi}.$$

Wir wollen nun die wohlbekannte Formel, welche die ältere Beugungstheorie für die Intensität des durch einen Spalt gebeugten Lichtes giebt, mit zum Vergleich heranziehn. Dieselbe lautet (Kirchhoff, Optik, pag. 91, wo $a = \frac{d}{2}$, $p = k \sin \chi$ und, um auf die jetzige Intensitätseinheit zu kommen, const. $= 1$ zu setzen ist):

$$\text{(E)} \qquad J' = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2} \sin \chi\right)}{\frac{kd}{2} \sin \chi} \right]^2 .$$

Zwischen dem älteren Intensitätsausdruck J' und dem hier abgeleiteten neuen J findet man leicht die Beziehung:

$$(138) \qquad J = J' \cos \chi + \left(\frac{1}{kd \cos \frac{\chi}{2}} \right)^2 .$$

Man kennt die Lichtvertheilung, welche der Ausdruck J' liefert. Auf einem senkrecht zur Richtung nach dem Spalt aufgestellten Schirm zeigt sich ein System abwechselnd heller und dunkler zum Spalt paralleler Streifen. Der hellste Streifen von der Intensität $J' = 1$ findet sich in der Mitte des Beugungsbildes ($\chi = 0$), zu beiden Seiten desselben folgen nahe äquidistant schwächere Lichtmaxima, deren Oerter sehr genähert durch die Gleichungen:

$$kd \sin \chi = \pi(2n + 1) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

gegeben werden. Die Helligkeiten dieser Maxima sind bestimmt durch den Ausdruck:

$$J' = \frac{1}{\left(\frac{kd}{2} \sin \chi\right)^2} .$$

Sie nehmen bei breitem Spalt mit wachsendem Beugungswinkel rasch an Kraft ab. Zwischen den Maximis finden sich stets Stellen völliger Dunkelheit eingeschaltet.

Aus Formel (138) erkennt man leicht, was sich hieran ändert, wenn man den neuen Intensitätsausdruck J einführt. Zunächst ist die Helligkeit überall mit dem Factor $\cos \chi$ zu multipliciren, die Intensität der seitlichen Lichtstreifen nimmt also mit wachsendem Beugungswinkel rascher ab, als nach der älteren Formel, und ausserdem lagert sich über das ganze Beugungsbild eine ziemlich gleichförmige, mit wachsendem Beugungswinkel wenig ansteigende (bei breitem Spalt schwache) Helligkeit, welche durch das zweite Glied der Formel (138) dargestellt wird. Es sind also die

Minima zwischen den Streifen nicht mehr völlig dunkel und für grössere Beugungswinkel, wo auch die Maxima schwach sind, tritt allmählich eine Verwischung der Streifen ein. Der Ort der seitlichen Maxima bleibt übrigens unverändert nahe den Stellen:

$$kd \sin \chi = \pi(2n+1) \qquad n = 1, 2, \cdots$$

während ihre Intensität durch die veränderte Formel

$$J' = \left(\frac{1}{kd \sin \frac{\chi}{2}}\right)^2$$

gegeben wird.

Fragen wir jetzt nach dem Gültigkeitsbereich des Ausdrucks J in Rücksicht auf die vernachlässigten Theile ζ' und ν'. Es werden nach (D) auch im besten Falle, für $\chi = 0$, die Reste ζ' und ν' numerisch klein nur dann, wenn kd gross, ϑ klein wird, also bei gegen die Wellenlänge breitem Spalt. Demnach kann die Formel J nur bei breitem Spalt eine Näherung darstellen. Da aber die Reste ζ' und ν' oder wenigstens die für sie abgeleiteten Grenzen mit wachsendem Beugungswinkel wachsen, so fragt sich weiter, bis zu welchen Beugungswinkeln die Anwendbarkeit der Formel J bestehn bleibt. Es wird genügen, wenn ζ' und ν' in den Helligkeits*maximis* klein gegen ζ und ν bleibt, wenn also in denselben:

$$\sqrt{J} > 4\pi g \frac{\vartheta^3}{1-\vartheta} \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi} \quad \text{und} \quad \sqrt{J} > \frac{\pi}{2} Bg \frac{\vartheta^3}{(1-\vartheta)^3} \frac{1}{\cos^2\chi}$$

ist, wobei g eine grosse Zahl ist. Führt man hier für $\sqrt{J}$ seinen Werth in den Maximis $\frac{1}{kd \sin\frac{\chi}{2}}$ ein, so folgt:

$$\operatorname{cotg} \chi > 4g \cdot \frac{\vartheta}{1-\vartheta}, \qquad \frac{\cos^2\chi}{\sin\frac{\chi}{2}} > gB \frac{\vartheta}{(1-\vartheta)^2}.$$

Diese Ungleichungen gelten für um so grössere, um so näher an einen Rechten heranreichende Beugungswinkel, je kleiner ϑ, je grösser die Spaltbreite ist.

Demnach gilt die Formel J mit um so grösserer Genauigkeit bis zu um so grösseren Beugungswinkeln, je breiter der Spalt im Verhältniss zur Wellenlänge ist. Dass für ganz grosse Beugungswinkel nahe einem Rechten nicht etwa nur die obige Grenzbestimmung ungenügend wird, sondern thatsächlich J aufhört, eine Näherung zu sein, erkennt man schon daraus, dass für $\chi = \frac{\pi}{2}$ strenge $\zeta = 0$ werden müsste, während es in

Wirklichkeit von der Ordnung $\frac{1}{kd}$ wird. Für $\chi = \frac{\pi}{2}$ ist also ζ und damit auch J um seinen eigenen Betrag falsch.

Beachtet man noch, dass für breiten Spalt und kleine Beugungswinkel J und J' nahezu identisch werden, so ist folgendes Resultat erreicht:

Wir sehen erstens, dass die ältere Formel:

$$J' = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{\frac{kd}{2}\sin\chi}\right]^2$$

der strengen Theorie um so näher entspricht, je breiter der Spalt und je kleiner der Beugungswinkel ist, und wir finden zweitens eine neue Formel:

$$J = \left[\frac{\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\sin\frac{\chi}{2}}\right]^2 + \left[\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\sin\chi\right)}{kd\cos\frac{\chi}{2}}\right]^2,$$

welche sich bei wachsender Spaltbreite auch für grössere und grössere Beugungswinkel der strengen Theorie anschliesst.

Noch weitere optische Folgerungen ergeben sich aus der Vergleichung der vertikalen und der horizontalen Schwingungscomponente. Die Amplitude beider Componenten ist nach (C) überall gleich. Daraus folgt, *dass natürliches einfallendes Licht durch die Beugung an einem Spalt — innerhalb des Gültigkeitsbereichs des Ausdrucks J — nicht polarisirt wird**).

Indessen tritt eine *Phasendifferenz zwischen der vertikalen und der horizontalen Componente* ein, welche durch $\frac{\delta\lambda}{\pi}$ gegeben wird und nach Formel (B) in den Maximis verschwindet, während sie in den Minimis bis auf eine halbe Wellenlänge ansteigt.

Das Gültigkeitsbereich der Formel J ist in Praxis ein recht ausgedehntes. Wir haben bei ihrer Ableitung vorausgesetzt, dass die Entfernung ρ des Standpunktes des Beobachters vom Spalt sehr gross ist. Die hieraus entspringenden Vernachlässigungen verschwinden aber völlig, wenn man in der üblichen Weise mit Hülfe eines auf unendlich eingestellten Fernrohrs die sogenannte Fraunhofer'sche Beugungserscheinung beobachtet, wie sie in unendlicher Entfernung vom Spalt zu Stande kommen würde. Unsre zweite Gruppe von Vernachlässigungen, die in der Weglassung der höheren Glieder des Näherungsverfahrens bestand, führt

*) Für ganz grosse Beugungswinkel nahe einem Rechten muss natürlich vertikale Polarisation eintreten, weil die horizontale Schwingungscomponente ζ nach der Randbedingung am Schirm gleich 0 werden muss.

wenigstens in dem mittleren Theile des Beugungsbildes auch nur bei sehr schmalen Spalten zu praktisch merklichen Fehlern. Wenn die Spaltbreite zehn Wellenlängen beträgt, erhält man aus Formel (D): Mod. $\zeta' < 0.014 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}$, während ζ in der Mitte des Beugungsbildes nahe 1 ist. Man sieht daraus, dass selbst für einen Spalt von nur zehn Wellenlängen Breite bei mässigen Beugungswinkeln χ der Fehler der Formel J und auch der älteren Formel J' nicht über ein paar Procent der in der Mitte des Beugungsbildes herrschenden Lichtintensität ansteigt.

Einen Abschluss in gewissem Sinne liefern die vorstehenden Untersuchungen für die *Theorie der Beugung der Röntgenstrahlen.* Fasst man einen Röntgenstrahl als einen Impuls auf, als eine Stosswelle, welche sich von einem Punkt im Aether, der einer kurzen Erschütterung ausgesetzt gewesen ist, fortpflanzt, so kann man sich diesen Impuls mit Hülfe des Fourier'schen Integrals in lauter homogene Schwingungen aller möglichen Schwingungsperioden oder Wellenlängen zerlegt denken. Man überzeugt sich leicht, dass hierbei fast die ganze Schwingungsenergie auf diejenigen homogenen Schwingungen fällt, deren Periode zwischen Null und Werthen von der Grössenordnung der Stossdauer liegt, während Schwingungen längerer Periode nur mit verschwindend kleiner Amplitude auftreten. Berechnete man nun die Beugung jeder einzelnen homogenen Welle durch einen Spalt unter alleiniger Berücksichtigung der ersten Glieder $w(r_0, \varphi_0) + w(r_0', \varphi_0')$ (Gl. 104) unsres Näherungsverfahrens, und superponirte dann die Amplituden des gebeugten Lichts für alle vorkommenden Wellen, so würde man auf einem anderen Wege zu genau den Resultaten über die Beugung von Impulsen gelangen, welche kürzlich Herr Sommerfeld (Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 46, 1901) abgeleitet hat. Ich hebe hervor, dass man hierbei nicht von den obigen einfachen Formeln für J Gebrauch machen kann, weil deren Ableitung voraussetzt, dass $\frac{\varrho \cdot \lambda}{d^2}$ numerisch gross ist, während bei der Zerlegung des Impulses in homogene Schwingungen Wellenlängen bis zur Null herunter und daher auch kleine Werthe des Products $\frac{\varrho \cdot \lambda}{d^2}$ auftreten. In der That hat Herr Sommerfeld den Ausdruck $w(r_0, \varphi_0) + w(r_0', \varphi_0')$, übertragen auf den Fall des Impulses, a. a. O. pag. 76—86, ohne die obigen Vernachlässigungen ausgewerthet. Dass dieser Ausdruck an sich eine Näherung für die Lösung des Problems sei, hat Herr Sommerfeld durch verschiedene Betrachtungen wahrscheinlich gemacht. Auf Grund unsrer Restformeln (D) lässt sich aber jetzt ohne Schwierigkeit eine numerische Grenze berechnen, um die das Sommerfeld'sche Resultat in dem concreten Falle des von den Herren

Haga und Wind*) ausgeführten Experimentes über Beugung von Röntgenstrahlen durch die Weglassung der weiteren Glieder des Näherungsverfahrens *höchstens* verfälscht sein kann. Indem ich für die Spaltbreite den ungünstigsten, kleinsten bei dem Experimente der Herren Haga und Wind vorkommenden Werth 0.002 mm ansetze, finde ich, dass der Fehler der Intensität bei den allein in Betracht kommenden kleinen Beugungswinkeln unter ein 10000-stel der in der Mitte des Beugungsbildes herrschenden Intensität bleibt.**) Man kommt damit zu dem Schluss, dass *Herrn Sommerfeld's angenäherte Theorie der Beugung von Röntgenstrahlen im concreten Fall des Experimentes der Herren Haga uud Wind bis auf practisch Unmerkliches mit einer strengen Theorie übereinstimmt.*

*) Wiedemann's Annalen der Physik. Bd. 68. 1899.

**) Es gilt dies unmittelbar nur für den Fall horizontal polarisirten Lichtes, für welches oben allein eine numerische Restgrenze aufgestellt wurde. Indessen ist klar, dass für vertikal polarisirtes Licht der Fehler von derselben Grössenordnung werden muss.