Werk

Titel: Ueber den Zusammenhang ebener algebraischer Kurven mit quadratischen Formen.

Autor: Timerding, H.E.

Jahr: 1902

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?235181684_0055|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ueber den Zusammenhang ebener algebraischer Curven mit quadratischen Formen.

Von

H. E. Timerding in Strassburg i./E.

§ 1.

Die Beziehung einer Ebene auf ein Bündel von quadratischen Formen. Die Hauptcurve.

Eine quadratische Form von n Variabelen x_i

$$f = \sum f_{ij} x_i x_j \tag{1}$$

heisse *conisch*, wenn die Determinante aus ihren Coefficienten

$$F = |f_{ij}| \tag{2}$$

verschwindet. Setzen wir nun voraus, die Coefficienten seien als homogene lineare Functionen von drei unbestimmten Grössen ξ', ξ'', ξ''' gegeben, so dass

$$f_{ij} = \xi' f'_{ij} + \xi'' f''_{ij} + \xi''' f'''_{ij} \tag{3}$$

ist und f selbst die Form annimmt

$$f = \xi' f' + \xi'' f'' + \xi''' f''', \tag{4}$$

wo

$$f' = \sum f'_{ij} x_i x_j, \quad f'' = \sum f''_{ij} x_i x_j, \quad f''' = \sum f'''_{ij} x_i x_j \tag{5}$$

gesetzt ist, dann wird die Determinante F eine homogene Function n^{ten} Grades der Grössen ξ', ξ'', ξ''', sagen wir

$$F = \sum F_{\alpha\beta\gamma} \xi'^{\alpha} \xi''^{\beta} \xi'''^{\gamma}, \tag{6}$$

indem die Summation über alle α, β, γ, die der Bedingung $\alpha + \beta + \gamma = n$ genügen, zu erstrecken ist. Fasst man ξ', ξ'', ξ''' als homogene Punktcoordinaten in einer Ebene auf, so wird durch die Gleichung

$$F = 0$$

eine algebraische Curve n^{ter} Ordnung dargestellt, die wir fortan die *Hauptcurve* der Ebene nennen wollen. Zu jedem Punkte der Ebene gehört eine der quadratischen Formen, die man durch Veränderung der ξ erhält und deren Gesammtheit wir als ein *Formenbündel* bezeichnen wollen. Dies Bündel wird sonach durch die Punkte der Ebene dargestellt, und den Punkten der Hauptcurve entsprechen hierbei die conischen Formen des Bündels.

Wenn man an die Stelle der drei Grundformen f', f'', f''' irgend drei andere Formen des Bündels:

$$\begin{aligned} g' &= a_{11}f' + a_{12}f'' + a_{13}f''', \\ g'' &= a_{21}f' + a_{22}f'' + a_{23}f''', \\ g''' &= a_{31}f' + a_{32}f'' + a_{33}f''' \end{aligned}$$

bringt, so wird dadurch die Form

$$F = \sum F_{\alpha\beta\gamma}\xi'^{\alpha}\xi''^{\beta}\xi'''^{\gamma}$$

so geändert, als ob man für die Veränderlichen ξ', ξ'', ξ''' die Werthe

$$\begin{aligned} &a_{11}\xi' + a_{21}\xi'' + a_{31}\xi''', \\ &a_{12}\xi' + a_{22}\xi'' + a_{32}\xi''', \\ &a_{13}\xi' + a_{23}\xi'' + a_{33}\xi''' \end{aligned}$$

eingesetzt hätte. Die Hauptcurve bleibt dann dieselbe, nur muss man sich ihre Gleichung auf ein anderes Coordinatensystem bezogen denken. Von dem Fundamentaldreiecke dieses neuen Coordinatensystems sind die Ecken durch die Punkte gegeben, die den zu neuen Grundformen des Bündels gewählten Formen g', g'', g''' bei der ursprünglichen Beziehung der Ebene auf das Formenbündel entsprechen.

§ 2.

Die Invarianten der Formen des Bündels.

Die Coefficienten $F_{\alpha\beta\gamma}$ in der Gleichung $F = 0$ sind simultane Invarianten der drei quadratischen Formen f', f'', f''', wir wollen sie als die Fundamentalinvarianten dieser Formen bezeichnen. Um nun die Gestalt einer beliebigen simultanen Invariante der drei Formen f', f'', f''' zu erkennen, schreibe man diese Formen symbolisch:

$$\begin{aligned} f' &= (f_1' x_1 + f_2' x_2 + \cdots + f_n' x_n)^2, \\ f'' &= (f_1'' x_1 + f_2'' x_2 + \cdots + f_n'' x_n)^2, \\ f''' &= (f_1''' x_1 + f_2''' x_2 + \cdots + f_n''' x_n)^2 \end{aligned}$$

und füge beliebig viele neue Formen

$$f^{(\mu)} = \left(f_1^{(\mu)} x_1 + f_2^{(\mu)} x_2 + \cdots + f_n^{(\mu)} x_n\right)^2$$

hinzu, die immer abwechselnd mit einer der drei ersten Formen identisch sein sollen. Dann ist jede Invariante der drei Grundformen ein Aggregat von symbolischen Producten, deren symbolische Factoren Determinanten von folgender Gestalt sind:

$$\begin{vmatrix} f_1^{(\mu_1)} & f_2^{(\mu_1)} \cdots f_n^{(\mu_1)} \\ f_1^{(\mu_2)} & f_2^{(\mu_2)} \cdots f_n^{(\mu_2)} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ f_1^{(\mu_n)} & f_2^{(\mu_n)} \cdots f_n^{(\mu_n)} \end{vmatrix}.$$

Soll nun der soeben angeschriebene symbolische Factor zu einer wirklichen Function der Coefficienten in den drei Grundformen ergänzt werden, so kann dies nur durch einen Factor

$$f_1^{(\mu_1)} f_2^{(\mu_2)} \cdots f_n^{(\mu_n)}$$

oder einen Factor, der aus diesem durch beliebige Permutation der unteren Indices entsteht, geschehen. Daraus folgt aber, dass das symbolische Product die angegebene Determinante noch einmal als Factor enthält, im Ganzen also zum Quadrate oder allgemeiner zu einer geraden Potenz. Das Quadrat dieser Determinante stimmt aber bis auf einen Zahlfactor mit einer der Fundamentalinvarianten $F_{\alpha\beta\gamma}$ überein, und somit ist *jede Invariante der drei Grundformen eine ganze Function der* $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ *Fundamentalinvarianten* $F_{\alpha\beta\gamma}$.

Damit ergiebt sich aber weiter, dass diese *Fundamentalinvarianten* $F_{\alpha\beta\gamma}$ *nothwendig von einander unabhängig sind.* Denn die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten eines Systems von Grundformen, durch die sich alle anderen Invarianten rational ausdrücken lassen, muss mindestens ebenso gross sein als die um Eins vermehrte Differenz der Anzahl der Coefficienten in den Grundformen und der Coefficientenzahl in den linearen Substitutionsgleichungen. In unserem Falle ist die erstere Zahl $\frac{3n(n+1)}{2}$ und die letztere n^2, ihre um Eins vermehrte Differenz also

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

und dies ist genau die Anzahl der Fundamentalinvarianten. Da diese sonach von einander unabhängig sind und zwischen ihnen keine algebraische Beziehung stattfindet, ist auch die Form

$$F = \sum F_{\alpha\beta\gamma} \xi'^{\alpha} \xi''^{\beta} \xi'''^{\gamma}$$

eine ganz allgemeine ternäre Form n^{ten} Grades, und *jede ternäre Form lässt sich als eine symmetrische Determinante darstellen, deren Elemente lineare Functionen der Veränderlichen sind.*

Als eigentliche Invarianten der drei Grundformen f', f'', f''' kann man nur diejenigen bezeichnen, welche für die Coefficienten jeder dieser Formen homogen sind. Diese Invarianten werden also durch drei ganze Zahlen a, b, c charakterisirt, welche ihre Grade in den Coefficienten der einzelnen Formen angeben. Die Summe $a + b + c$ dieser drei Zahlen, die immer ein Vielfaches von n sein muss, kann der Gesammtgrad der Invariante heissen. Dann zeigt sich sofort, dass für den niedrigst möglichen Gesammtgrad n die Fundamentalinvarianten die einzig existirenden Invarianten sind. Um die Invarianten vom Gesammtgrade $m \cdot n$ zu finden, erhebe man die Form

$$\sum u_{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha\beta\gamma} \xi'^{\alpha} \xi''^{\beta} \xi'''^{\gamma}$$

in die m^{te} Potenz, und ersetze in dem Resultate den Coefficienten $u_{\alpha\beta\gamma} u_{\alpha'\beta'\gamma'} \cdots$ durch eine beliebige Zahl $u_{\alpha\beta\gamma\alpha'\beta'\gamma'\ldots}$, dann giebt in der homogenen Function mn^{ten} Grades von ξ', ξ'', ξ''', die man vor sich hat, der Coefficient von $\xi'^{a} \xi''^{b} \xi'''^{c}$, wo $a + b + c = m \cdot n$, die allgemeinste Invariante, die in den Coefficienten der einzelnen Formen die Grade a, b, c hat.

Besondere Beachtung verdienen unter diesen Invarianten diejenigen, welche gleichzeitig Invarianten der ternären Form sind und welche man als *Bündelinvarianten* bezeichnen könnte. Diese Invarianten haben nämlich die besondere Eigenschaft, dass sie sich, wenn man die Grundformen f', f'', f''' durch drei andere Formen des Bündels

$$\begin{aligned} &a_{11} f' + a_{12} f'' + a_{13} f''', \\ &a_{21} f' + a_{22} f'' + a_{23} f''', \\ &a_{31} f' + a_{32} f'' + a_{33} f''' \end{aligned}$$

ersetzt, nur um einen constanten Factor ändern, und zwar ist dieser Factor eine Potenz der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

§ 3.

Darstellung quadratischer Formen durch ebene algebraische Curven.

Bilden wir nun die quadratische Form von n neuen Veränderlichen u, die sich darstellt wie folgt:

$$F_{uu} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n & 0 \end{vmatrix}, \tag{7}$$

oder, wie wir auch dafür schreiben wollen:

$$F_{uu} = \sum F_{ij} u_i u_j, \tag{8}$$

so ist dies eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von den Grössen ξ', ξ'', ξ'''; bilden wir dieselbe Form noch einmal für andere Variabele v:

$$F_{vv} = \sum F_{ij} v_i v_j \tag{8'}$$

und weiter die bilineare Form:

$$F_{uv} = \sum F_{ij} u_i v_j, \tag{9}$$

die ebenfalls eine Function der ξ vom Grade $n-1$ ist, so ist der Ausdruck $F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2$ nach einem Satze von Hesse durch F theilbar und demnach

$$F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2 = F \cdot U, \tag{10}$$

wo U eine Function $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Grössen ξ ist. Hieraus ergiebt sich, dass $F_{uu} = 0$ und $F_{vv} = 0$ für feste Werthe der u und v zwei Berührungscurven der Hauptcurve $F = 0$ darstellen, nämlich solche Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Hauptcurve überall berühren, wo sie ihr begegnen, also in $\frac{1}{2}n(n-1)$ Punkten, und dass durch die Berührungspunkte dieser beiden Curven mit der Hauptcurve die durch die Gleichung $F_{uv} = 0$ gegebene Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchgeht.

Die Gleichung einer ganz beliebigen Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung lässt sich auf die Form bringen

$$\sum u_{ij} F_{ij} = 0,$$

indem die F_{ij}, der obigen Festsetzung gemäss, die Unterdeterminanten von F bezeichnen. Nun *ruht* nach einem Ausdrucke von Herrn Reye die Form

(1) $$f = \sum f_{ij} x_i x_j$$

auf der Form

(11) $$\varphi = \sum u_{ij} x_i x_j,$$

wenn die Beziehung

(12) $$\sum u_{ij} F_{ij} = 0$$

erfüllt ist. Ist die Form f insbesondere conisch, so dass für bestimmte Werthe der x die n Gleichungen

$$\sum_i f_{ij} x_i = 0, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

befriedigt sind, so muss, wenn der Bedingung (12) genügt werden soll, für dieselben Werthe der x auch $\varphi = 0$ werden, denn es ist für diese Werthe

$$x_i x_j = \varrho F_{ij}, \qquad i, j = 1, 2 \cdots n.$$

Den Formen des Formenbündels, die auf einer beliebig gegebenen quadratischen Form ruhen, entsprechen also in der Bildebene immer die Punkte einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, und die Mannigfaltigkeit der quadratischen Formen von n Veränderlichen ist so auf die isomorphe Mannigfaltigkeit der Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in einer Ebene eindeutig und linear bezogen, indem die Coefficienten in den Gleichungen dieser Curven lineare Functionen von den Coefficienten der quadratischen Formen sind.

Wird die quadratische Form φ (11) ein vollständiges Quadrat, also

$$\varphi = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n)^2,$$

so ruhen auf ihr alle Formen des Bündels, für welche die Bedingung

$$\sum F_{ij} u_i u_j = 0$$

erfüllt ist, und dieser Formenschar entspricht, wie wir soeben gesehen haben, eine Berührungscurve der Hauptcurve. Wir wollen von den Formen der Schar sagen, dass sie auch auf der linearen Function $u = \Sigma u_i x_i$ ruhen, und dies bedeutet dann, dass von allen Formen der Schar die Determinante verschwindet, wenn man zwischen den Veränderlichen x die lineare Beziehung $u = 0$ annimmt.

Unterwirft man die Formen des Bündels alle einer und derselben linearen Transformation, so kann man jede transformirte Form demselben Punkte der Bildebene zuweisen, dem die ursprüngliche Form entsprach. Hierbei gehen die conischen Formen, welche den Punkten der Hauptcurve entsprechen, wieder in conische Formen über, und die Formen, welche den Punkten einer Berührungscurve des zugehörigen Systems entsprechen, haben auch nach der Transformation die Eigenschaft, dass sie alle auf einer linearen Form ruhen.

Sind nun umgekehrt zwei Bündel von quadratischen Formen eindeutig auf die Punkte derselben Ebene bezogen, so dass nicht bloss den conischen Formen in den Bündeln beidemal die Punkte derselben Hauptcurve entsprechen, sondern auch denselben Berührungscurven dieser Hauptcurve in beiden Bündeln Scharen von solchen Formen correspondiren, deren Determinante jedesmal durch eine und dieselbe lineare Relation zwischen den Veränderlichen zum Verschwinden gebracht wird, so resultirt hieraus eine eindeutige Beziehung zwischen den Formen der beiden Bündel. Alle Formen des ersten Bündels lassen sich aber in die entsprechenden Formen des zweiten Bündels durch dieselbe Transformation der Veränderlichen überführen. Welcher Art diese Transformation ist, erhellt daraus, dass den Formen des ersten Bündels

$$f = \sum f_{ij} x_i x_j,$$

welche einer Beziehung

$$\sum \frac{\partial F}{\partial f_{ij}} u_i u_j = 0$$

genügen, solche Formen

$$g = \sum g_{ij} x_i x_j$$

des zweiten Bündels zugeordnet sein müssen, deren Coefficienten eine Gleichung

$$\sum \frac{\partial G}{\partial g_{ij}} v_i v_j = 0$$

befriedigen, indem

$$G = |g_{ij}|$$

die Determinante der Form g bezeichnet. So wird jeder linearen Function $\Sigma u_i x_i$ eine neue lineare Function $\Sigma v_i x_i$ zugewiesen, in welche sie durch die Transformation der Veränderlichen übergehen muss, und daraus folgt, dass diese Transformation eine lineare ist und die *Formen des zweiten Bündels sich somit durch eine und dieselbe lineare Transformation aus den Formen des ersten Bündels ableiten lassen.*

§ 4.

Ketten von Berührungscurven.

Der oben benutzte Satz, dass der Ausdruck $F_{uu} F_{vv} - F_{uv}^2$ durch die Determinante F theilbar ist, fliesst aus einem Theorem, das von Sylvester herrührt*) und sich folgendermassen formuliren lässt. *Die Determinante*

*) Man sehe in Band 88 des Journals für Mathematik, Seite 52.

$$(13) \qquad U_n^{(m)} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \cdots f_{1n} & u_1' & u_1'' \cdots & u_1^{(m)} \\ f_{21} & f_{22} \cdots f_{2n} & u_2' & u_2'' \cdots & u_2^{(m)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} \cdots f_{nn} & u_n' & u_n'' \cdots & u_n^{(m)} \\ u_1' & u_2' \cdots u_n' & 0 & 0 \cdots & 0 \\ u_1'' & u_2'' \cdots u_n'' & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ u_1^{(m)} & u_2^{(m)} \cdots u_n^{(m)} & 0 & 0 \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

ist, wenn F und F_{ij} die oben angegebene Bedeutung haben und

$$(14) \qquad F^{(\mu\nu)} = \sum_{ij} F_{ij} u_i^{(\mu)} u_j^{(\nu)}$$

gesetzt wird, identisch mit dem folgenden Ausdrucke:

$$(15) \qquad U_n^{(m)} = \frac{1}{F^{m-1}} \begin{vmatrix} F^{(11)} & F^{(12)} \cdots & F^{(1m)} \\ F^{(21)} & F^{(22)} \cdots & F^{(2m)} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ F^{(m1)} & F^{(m2)} \cdots & F^{(mm)} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ drückt, wenn $U_n^{(m)}$ in der Form (13) gegeben ist, aus, dass für ein Werthesystem $x_1, x_2 \cdots x_n$, welches den m Gleichungen genügt:

(α) $\quad u_1^{(\mu)} x_1 + u_2^{(\mu)} x_2 + \cdots + u_n^{(\mu)} x_n = 0, \qquad \mu = 1, 2 \cdots m,$

sich auch die n Gleichungen:

(β) $\quad f_{i1} x_1 + f_{i2} x_2 + \cdots + f_{in} x_n = \eta' u_i' + \cdots + \eta^{(m)} u_i^{(m)}, \quad i = 1, 2 \cdots n,$

durch m neue Grössen $\eta' \cdots \eta^{(m)}$ befriedigen lassen. Multiplicirt man von den Gleichungen (β) die i^{te} mit F_{ij} und addirt alle zu einander, so findet man, indem man

$$u_i = \eta' u_i' + \cdots + \eta^{(m)} u_i^{(m)}$$

setzt:

$$F \cdot x_j = \sum_i F_{ij} u_i, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

und multiplicirt man von diesen Gleichungen wiederum die j^{te} mit $u_j^{(\mu)}$ und addirt, so wird

$$\begin{aligned} F \cdot \sum_j u_j^{(\mu)} x_j &= \sum_{ij} F_{ij} u_i u_j^{(\mu)} \\ &= \sum_\nu \eta^{(\nu)} \sum_{ij} F_{ij} u_i^{(\nu)} u_j^{(\mu)} \\ &= \sum_\nu \eta^{(\nu)} F^{(\mu\nu)}. \end{aligned}$$

Nach (α) ist aber

$$\sum_j u_j^{(\mu)} x_j = 0,$$

also wird auch

$$\sum_\nu F^{(\mu\nu)} \eta^{(\nu)} = 0, \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2 \cdots m,$$

und hieraus folgt durch Elimination der $\eta^{(\nu)}$:

$$|F^{(\mu\nu)}| = 0.$$

$U_n^{(m)}$ muss also mit dieser Determinante übereinstimmen bis auf einen Factor, der die Grössen u nicht mehr enthält. Um ihn zu bestimmen, kann man beispielsweise annehmen, es seien $u_1' = 1$, $u_2'' = 1 \cdots u_m^{(m)} = 1$ und alle anderen $u_i^{(\mu)} = 0$, dann findet man mit Leichtigkeit den in dem Satze angegebenen Werth.

Ist nun wieder

$$f_{ij} = \xi' f_{ij}' + \xi'' f_{ij}'' + \xi''' f_{ij}'''$$

und lassen wir in dem Ausdrucke (13) die Zahl m nach und nach die Werthe von 1 bis $n-1$ annehmen, so finden wir, indem wir

$$U_n^{(m)} = 0$$

setzen, für veränderliche ξ und beliebige u der Reihe nach ein System von Curven der Ordnung $n-1$, $n-2 \cdots 1$, und zwar hat das System der Curven $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n-m)m$ Dimensionen, solange

$$(n-m)m < \tfrac{1}{2}(n-m)(n-m+3),$$

also $3(m-1) < n$ ist. Ist die Ordnung $n-m$ kleiner als es diese Ungleichheit verlangt, so gehören alle Curven der betreffenden Ordnung zu dem Systeme.

Unter den Curven des $(m+1)^{\text{ten}}$ Systems besteht eine Mannigfaltigkeit von $n-m-1$ Dimensionen aus Berührungscurven einer bestimmten Curve des m^{ten} Systems. Die Gleichung $U_n^{(m+1)} = 0$ einer dieser Curven erhält man aus der Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ der Curve des m^{ten} Systems, indem man zu den Elementen der Determinante (13) auf ihrer linken Seite eine Reihe und Spalte von

$$n \text{ Grössen } u_i^{(m+1)} \quad \text{und} \quad m \text{ mal } 0$$

hinzufügt. Diese Grössen kann man aber, ohne die Gleichung zu ändern, durch

$$n \text{ Grössen } \lambda' u_i' + \cdots + \lambda^{(m+1)} u_i^{(m+1)} \quad \text{und} \quad m \text{ mal } 0$$

ersetzen. Die $m+1$ willkürlichen Werthe $\lambda^{(\mu)}$ lassen sich insbesondere so wählen, dass m von den n Grössen verschwinden, und die übrigen $n-m$

sind dann in der Curvengleichung homogen und quadratisch enthalten. — Umgekehrt hat jede Curve des $(m+1)^{\text{ten}}$ Systems eine Mannigfaltigkeit von m Dimensionen unter den Curven des m^{ten} Systems zu Berührungscurven. Addirt man nämlich in der $(m+1)$ fach geränderten Determinante auf der linken Seite der Gleichung $U_n^{(m+1)} = 0$ die letzte Spalte und letzte Zeile, mit m beliebigen Parametern $\frac{\lambda'}{\lambda^{(m+1)}} \cdots \frac{\lambda^{(m)}}{\lambda^{(m+1)}}$ multiplicirt, zu den m vorhergehenden Spalten und Reihen und lässt die letzte Spalte und Reihe dann weg, so findet man die Gleichung einer der zu der Curve $U_n^{(m+1)} = 0$ des $(m+1)^{\text{ten}}$ Systems gehörigen Berührungscurven des m^{ten} Systems. Dieselbe Gleichung hätte man auch erhalten, wenn man in der $(m+1)$ fach geränderten Determinante die $(n+\mu)^{\text{te}}$ Spalte und $(n+\nu)^{\text{te}}$ Zeile fortgelassen, die so entstehende m fach geränderte Determinante mit $\lambda^{(\mu)}\lambda^{(\nu)}$ multiplicirt und diese Ausdrücke für die verschiedenen μ und ν alle zu einander addirt gleich Null gesetzt hätte. Die Gleichung enthält also die $m+1$ Parameter $\lambda^{(\mu)}$ homogen und quadratisch.

Auf der anderen Seite zeigt die zweite Darstellungsform (15) von $U_n^{(m)}$, dass durch m Berührungscurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Hauptcurve n^{ter} Ordnung immer eine Curve des m^{ten} Systems festgelegt wird. Die Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ wird nämlich, wenn man sie in dieser Form voraussetzt, durch die m Gleichungen von Berührungscurven

$$F^{(11)} = 0,\ F^{(22)} = 0 \cdots F^{(mm)} = 0$$

vollkommen bestimmt, da ja allgemein

$$F^{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial F^{(\mu\mu)}}{\partial u_i^{(\mu)}} u_i^{(\nu)}$$

ist. Die durch die Gleichung $U_n^{(m)} = 0$ dargestellte Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung gehört aber nicht bloss zu diesen m Berührungscurven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, sondern zu einem ganzen Systeme von solchen Curven. Die Gleichung

$$\sum^{m} F^{(\mu\nu)} \eta^{(\mu)} \eta^{(\nu)} = 0 \tag{16}$$

stellt nämlich für jede Werthecombination der m Grössen η eine Berührungscurve der Hauptcurve dar. In der That, setzen wir ein

$$F^{(\mu\nu)} = \sum_{ij} F_{ij} u_i^{(\mu)} u_j^{(\nu)}$$

und machen dann wieder

$$u_i = \eta' u_i' + \cdots + \eta^{(m)} u_i^{(m)},$$

so wird die Gleichung (16):

$$\sum^{n} F_{ij} u_i u_j = 0,$$

und dies ist die Gleichung einer Berührungscurve. Die Gleichung (16) enthält m Parameter η homogen und quadratisch, und das System dieser Berührungscurven ist in einem linearen Curvensysteme von $\frac{1}{2}m(m+3)$ Dimensionen enthalten.

§ 5.

Syzygetische und azygetische Systeme von Berührungscurven.

Jedem Punkte der Hauptcurve, mit den Coordinaten ξ', ξ'', ξ''', entspricht ein bestimmtes Werthesystem $x_1 \cdots x_n$, für welches die n Gleichungen

$$\sum_i (\xi' f'_{ij} + \xi'' f''_{ij} + \xi''' f'''_{ij}) x_i = 0, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

zusammenbestehen. Es ist nun zu berücksichtigen, dass für die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Werthesysteme x_i, die so den sämmtlichen Berührungspunkten einer Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des zugehörigen Systems

$$\sum F_{ij} u_i u_j = 0$$

entsprechen, zwar eine lineare Function, nämlich

$$u = \sum u_i x_i,$$

aber keine eigentliche quadratische Form der n Veränderlichen x_i verschwindet. Durch jene Berührungspunkte lassen sich nämlich wohl n fach unendlich viele Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung legen, die quadratischen Formen, welche zu diesen Curven gehören, indem auf ihnen die den Curvenpunkten entsprechenden Formen des Bündels ruhen, zerfallen aber *alle* in zwei lineare Factoren, und zwar ist einer von diesen für alle die quadratischen Formen derselbe, nämlich u.

Durch alle Berührungspunkte der Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bis auf einen lässt sich sicher eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung hindurchlegen. Dieselbe bildet mit jeder geraden Linie g in der Bildebene

$$\alpha' \xi' + \alpha'' \xi'' + \alpha''' \xi''' = 0$$

zusammen eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die zu dieser Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehörende quadratische Form der n Veränderlichen verschwindet nun erstens für die n Werthesysteme x_i, welche den n Schnittpunkten

der Hauptcurve mit der geraden Linie g entsprechen, und also zusammen mit je drei Werthen ξ', ξ'', ξ''' die Gleichungen befriedigen:

$$\sum_i (\xi' f_{ij}' + \xi'' f_{ij}'' + \xi''' f_{ij}''') x_i = 0, \qquad j = 1, 2 \cdots n,$$

$$\alpha' \xi' + \alpha'' \xi'' + \alpha''' \xi''' = 0,$$

aber, was zu beachten ist, nicht alle einer und derselben linearen Gleichung $\Sigma u_i x_i = 0$ genügen, und die Form verschwindet ausserdem für die den $\frac{1}{2} n (n-1) - 1$ Berührungspunkten in der angegebenen Weise entsprechenden Werthesysteme x_i. Durch diese $\frac{1}{2} (n-1)(n+2)$ Werthesysteme, für welche sie verschwinden soll, ist die quadratische Form aber bis auf einen constanten Factor bestimmt, und sie ist, wenn die gerade Linie g nicht durch den letzten Berührungspunkt der Berührungscurven hindurchgeht, keine zerfallende Form. Da sie deswegen nach dem Vorhergehenden nicht auch für das Werthesystem verschwinden kann, das dem letzten Berührungspunkte der Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung entspricht, so *liegt dieser letzte Berührungspunkt auch nicht mit den übrigen auf derselben Curve* $(n-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung.*

Um zu erkennen, welche Bedeutung diesem Umstande zukommt, fassen wir einmal den entgegengesetzten Fall ins Auge, dass die Berührungspunkte einer Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auf einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Ist dann $\varphi_{n-1} = 0$ die Gleichung der Berührungscurve, $\varphi_{n-2} = 0$ diejenige der Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so lässt sich die Gleichung der Hauptcurve in die Form bringen

$$\varphi_{n-1} \varphi_{n-3} - \varphi_{n-2}^2 = 0.$$

Die Curve $\varphi_{n-3} = 0$ ist dann eine Berührungscurve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung der Hauptcurve, und zwar berührt sie in den $\frac{1}{2} n (n-3)$ Punkten, in welchen die Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung die Hauptcurve ausser den Berührungspunkten der Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung schneidet. Die linke Seite der vorigen Gleichung hat aber den folgenden Werth:

$$\varphi_{n-1} \varphi_{n-3} - \varphi_{n-2}^2 = \varphi_{n-4} \cdot F,$$

indem man mit φ_{n-4} eine bestimmte Function $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades der Punktcoordinaten bezeichnet. Die Gleichung

$$\varphi_{n-4} F + \varphi_{n-2}^2 = 0,$$

stellt dann durch $\varphi_{n-3} = 0$ getheilt irgend eine Berührungscurve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dar, deren Berührungspunkte mit den Berührungspunkten der Curve $\varphi_{n-3} = 0$ auf einer Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen, indem die

Berührungscurve $(n-4)^{ter}$ Ordnung $\varphi_{n-4}=0$ der Curve $\varphi_{n-3}=0$ durch φ_{n-2} eindeutig bestimmt ist.

Alle diese Curven bilden ein System von Berührungscurven, welcher der Berührungscurve $(n-3)^{ter}$ Ordnung zugeordnet ist. Die Anzahl dieser letzteren Curven ist endlich, und ebensogross ist die Anzahl dieser Systeme von Berührungscurven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, die wir syzygetisch nennen wollen. Die übrigen Systeme, welche nothwendig zu geraden Thetacharakteristiken gehören, mögen azygetisch heissen. Wir können dann das vorhin gewonnene Resultat auch so aussprechen: *Die Berührungscurven $(n-1)^{ter}$ Ordnung, zu welchen die Beziehung einer algebraischen Curve auf ein Bündel von quadratischen Formen führt, bilden nothwendig ein azygetisches System und gehören zu einer geraden Charakteristik.* Diese Charakteristik bestimmt sich sehr einfach, denn die Curve $(n-2)^{ter}$ Ordnung, die durch alle Berührungspunkte einer der Berührungscurven bis auf einen geht, schneidet die Curve n^{ter} Ordnung noch in $p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Punkten, und in diesen Punkten verschwindet eine Thetafunction mit gerader Charakteristik, wenn man zur unteren Grenze der Normalintegrale erster Gattung, die ihre Argumente bilden, den letzten Berührungspunkt der Berührungscurve wählt. Wenn man insbesondere die einzelnen, nicht zerfallenden Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung sucht, welche die Hauptcurve in allen Schnittpunkten einer beliebigen geraden Linie bis auf einen und ausserdem in p Punkten berühren, so verschwindet in diesen letzteren Punkten immer eine Thetafunction mit gerader Charakteristik, indem zur unteren Grenze der Integrale erster Gattung der letzte Schnittpunkt der geraden Linie gewählt wird, und zu jeder dieser geraden Charakteristiken gehört i. A. eine Darstellung der Curve durch das Verschwinden einer symmetrischen Determinante, deren Elemente lineare Functionen der Punktcoordinaten sind. Diese Darstellung ist also auf höchstens $2^{p-1}(2^p+1)$ Arten möglich, denn dies ist die Anzahl aller geraden Charakteristiken überhaupt.*)

§ 6.

Mehrfache Punkte der Hauptcurve.

Wenn die Hauptcurve beliebig viele Doppelpunkte besitzt, so gehen die Berührungscurven, zu denen die Beziehung der Curve auf ein Bündel von quadratischen Formen führt, durch jeden Doppelpunkt hindurch. Soll nämlich eine Curve, die durch das Verschwinden einer symmetrischen Determinante F dargestellt wird, einen bestimmten Punkt doppelt enf-

*) Ueber die Ausnahmefälle, die bei Berührungscurven auftreten können, vgl. man H. Weber, Math. Annalen Bd. 13 und M. Noether, ebenda Bd. 17, § 8.

halten, so ist dies nur möglich, wenn für die Coordinaten dieses Punktes die Determinante F mit allen ersten Unterdeterminanten F_{ij} verschwindet. Dann verschwinden in der That auch die Ableitungen dieser Determinante nach den Coordinaten. Wenn nun von einer quadratischen Form die Determinante mit allen ersten Unterdeterminanten verschwindet, so möge die Form doppelt conisch heissen. Von ihr verschwinden dann alle Derivirten für unendlich viele Werthesysteme $x_i^{(0)}$, die sich aus zweien unter ihnen, x_i' und x_i'' durch lineare Combination, $\lambda' x_i' + \lambda'' x_i''$, erhalten lassen, und wenn die Form für ein Werthesystem x_i verschwindet, so verschwindet sie auch für jedes Werthesystem $\lambda x_i + \lambda' x_i' + \lambda'' x_i''$. Mit Benutzung dieses Ausdruckes können wir sagen: *Die Hauptcurve in der Bildebene hat ebensoviel Doppelpunkte, als in dem zugehörigen Bündel quadratischer Formen doppelt conische Formen enthalten sind.*

Bilden wir nun wieder die Functionen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades für ξ', ξ'', ξ'''

$$\sum u_{ij} F_{ij},$$

so verschwinden diese Functionen in jedem Doppelpunkte der Hauptcurve, da für diesen alle $F_{ij} = 0$ werden, und jeder dieser Functionen entspricht nicht mehr, wie wir oben angegeben haben, eine bestimmte quadratische Form der n Veränderlichen, sondern eine lineare Mannigfaltigkeit von solchen Formen, deren Dimensionenzahl durch die Anzahl der Doppelpunkte angegeben wird, und alle diese Mannigfaltigkeiten haben eine lineare Mannigfaltigkeit der nächstniedrigen Stufe mit einander gemein.

Man kann die vorstehenden Betrachtungen sofort auf den Fall ausdehnen, dass die Hauptcurve einen Punkt von beliebiger Multiplicität μ enthält. Dann nämlich muss für die Coordinaten dieses Punktes die Determinante F mit allen $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Minoren verschwinden. Wenn nun von einer quadratischen Form die Determinante mit allen $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten verschwindet, so verschwinden alle Derivirten dieser Form für $(\mu-1)$ fach unendlich viele Werthesysteme $x_i^{(0)}$, die sich aus μ unter ihnen, $x_i', x_i'' \cdots x_i^{(\mu)}$ folgendergestalt zusammensetzen lassen:

$$x_i^{(0)} = \lambda' x_i' + \lambda'' x_i'' + \cdots + \lambda^{(\mu)} x_i^{(\mu)},$$

und wenn die Form für ein Werthesystem x_i verschwindet, so verschwindet sie immer auch für jedes Werthesystem $\lambda x_i + \lambda' x_i' + \cdots + \lambda^{(\mu)} x_i^{(\mu)}$. Die Form soll dann μ fach conisch heissen, und *es entspricht sonach jedem μfachen Punkte der Hauptcurve eine μfach conische Form des zugehörigen Bündels von quadratischen Formen.* Jede der Berührungscurven $\Sigma u_i u_j F_{ij} = 0$ hat in dem μfachen Punkte der Hauptcurve einen $(\mu-1)$fachen Punkt, denn jede der Functionen F_{ij} verschwindet für die Coordinaten jenes μfachen Punktes mit allen $(\mu-2)^{\text{ten}}$ Derivirten.