Ueber Theilung und Transformation der elliptischen Functionen.

Von

L. Kiepert in Hannover.

Mit den Untersuchungen über Theilung und Transformation der elliptischen Functionen ist ein fruchtbares Feld erschlossen, auf welchem ohne Zweifel noch eine reiche Ernte zu erwarten ist, zumal wenn es gelingt, die Modulargleichungen durch wesentlich einfachere zu ersetzen und den Zusammenhang dieser Gleichungen mit der Theorie der elliptischen Functionen noch weiter zu erforschen.

Zu diesem Zweck führte ich in meinen früheren Arbeiten über die Transformation der elliptischen Functionen*) eine Hülfsgrösse f ein, welche die Eigenschaft besitzt, dass sich alle übrigen bei der Transformation auftretenden Grössen durch sie und die Invarianten g_2, g_3 rational ausdrücken lassen. Zwischen f, g_2 und g_3 besteht immer eine algebraische Gleichung, welche die „*f-Gleichung*" genannt werden soll. Ist der Transformationsgrad n gleich $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ eine Zahl von der Form $6l \pm 1$, so wird f^2 die Wurzel einer Gleichung vom Grade

$$T(n) = n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots\,.$$

Hat aber n die Form $6l \pm 2$, oder $6l + 3$, oder $6l$, so wird erst eine höhere Potenz von f die Wurzel der f-Gleichung, während der Grad wieder $T(n)$ ist, so dass (wenn man von den Fällen $n = 2, 3, 4, 9, 25$ absieht) die Grösse f nicht mehr die geeignetste Hülfsgrösse ist.

---

*) Vergl. Journal für Mathematik, Bd. 87, S. 199—216, Bd. 88, S. 205—212 und Bd. 95, S. 218—231. Diese drei Abhandlungen sollen in dem Folgenden der Kürze wegen durch Abh. 1, Abh. 2, Abh. 3 citirt werden. — Vergl. ferner die neuerdings in den Göttinger Nachrichten veröffentlichte Note (Sitzung vom 6. Juni 1885): „*Ueber eine Resolvente derjenigen algebraischen Gleichung, von welcher in der Theorie der elliptischen Functionen die Theilung der Perioden abhängt.*"

Dieser Umstand hielt mich mehrere Jahre hindurch davon zurück, weitere Untersuchungen auf diesem Gebiete zu veröffentlichen, bis es mir durch das Studium einer Arbeit: „*Notiz über Modulargleichungen bei zusammengesetztem Transformationsgrad*“ von J. Gierster (Math. Annalen, Bd. 14, S. 537—544) gelang, die angedeutete Schwierigkeit zu überwinden.

Herr F. Klein hatte nämlich in seiner Abhandlung: „*Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*“ (Math. Annalen, Bd. 14, S. 111—172) statt der Modulargleichungen diejenigen Gleichungen untersucht, welche zwischen der absoluten Invariante

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27 g_3^2} = \frac{g_2^3}{\Delta}$$

und der entsprechenden Grösse J' der transformirten Function bestehen. Dabei machte er die allerdings sehr wesentliche, dafür aber auch sehr nützliche Einschränkung, dass das Geschlecht dieser *J-Gleichung* gleich Null sei, was nur bei den Primzahlen

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13$$

und bei den zusammengesetzten Zahlen

$$4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18,\ 25$$

der Fall ist. Man braucht nun bei dieser Einschränkung die J-Gleichung nicht selbst zu bilden, sondern J und J' werden *rationale* Functionen $T(n)^{\text{ten}}$ Grades einer Hülfsgrösse τ, welche sich durch functionentheoretische Betrachtungen leicht bilden lassen. Natürlich kann man diese Hülfsgrösse τ noch durch eine lineare Function von τ, nämlich durch $\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$ ersetzen, dies ist aber die einzige Willkür, welcher τ unterworfen ist. Vertauscht man in der *τ-Gleichung*, d. h. in der Gleichung zwischen J und τ, die Grössen J und τ mit J' und τ', so ist τ' eine lineare Function von τ, so dass damit auch schon J' als rationale Function von τ dargestellt ist.

Herr Klein bildete nun die τ-Gleichung für diejenigen Werthe von n, welche *Primzahlen* sind (ausserdem für $n = 4$) und fand, dass in allen diesen Fällen durch passende Verfügung über die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\tau^{n-1} = \Delta^{n-1} f^{24}$$

gemacht werden kann, ein Umstand, welcher für die Verwendung meiner Hülfsgrösse f sehr günstig erschien*).

---

*) In der That hat Herr Klein von hier ausgehend seinerseits eine allgemeine Theorie der f-Gleichungen (die er Multiplicatorgleichungen erster Stufe nennt) in Untersuchung gezogen [vergl. die Mittheilung im 15. Bande der mathem. Annalen, Seite 86—88]. Ich nenne hier auch sogleich die Abhandlung im 18. Bande

Im Anschluss an die Klein'sche Arbeit behandelte Herr Gierster noch die oben genannten Fälle, in denen n eine *zusammengesetzte* Zahl ist, und stellte die τ-Gleichungen auf. Auch hier kann für $n = 4, 9, 25$ diese Grösse τ noch so bestimmt werden, dass

$$\tau^{n-1} = \Delta^{n-1} f^{24}$$

wird. Dagegen ist Herr Gierster im Irrthum (wahrscheinlich durch Induction verleitet), wenn er behauptet, dass diese Relation auch noch für die anderen Werthe von n gilt. Es ist vielmehr für

$$n = 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 16,\ 18$$

die Grösse τ^{n-1} nur ein Factor von $\Delta^{n-1} f^{24}$.

Diese Erkenntniss, welche sich mir allerdings erst bei wiederholter Durchsicht und Prüfung der Gierster'schen Notiz ergab, eröffnete mir eine vielversprechende Aussicht auf dem Gebiete der Transformation. Dabei ist die von Herrn Klein inaugurirte Berücksichtigung des Geschlechtes der J-Gleichung wesentlich, die Untersuchung aber nicht auf den Fall beschränkt, wo dieses Geschlecht gleich Null ist.

Die von mir eingeführte Hülfsgrösse f ist somit gewissermassen der vornehmste Repräsentant einer ganzen Gattung von Hülfsgrössen, die nicht nur für die Transformation, sondern auch für die Algebra von besonderer Wichtigkeit sind, und die zu einander in inniger Beziehung stehen. Desshalb ist es nothwendig, dass ich in dieser Abhandlung zunächst die *Theorie der f-Gleichung* in ihrem Zusammenhange mit der Theilung und mit der Transformation der elliptischen Functionen gebe. Der Inhalt meiner früheren Abhandlungen über Transformation, deren Kenntniss ich hier übrigens nicht unbedingt voraussetze, wird dadurch wesentlich ergänzt, erweitert und zu einem fertigen Ganzen abgeschlossen. Dabei sind die einzelnen Sätze hier bereits so gefasst, dass sie auch sogleich für die späteren Untersuchungen verwendbar sind.

Im Gegensatz zu meinen früheren Arbeiten gehe ich jetzt, einem gütigen Rathe von Herrn Kronecker folgend, von der Theilung der elliptischen Functionen aus, indem ich die Theilwerthe von $\wp$, d. h. diejenigen Werthe von $\wp u$ untersuche, bei denen u der n^{te} Theil einer Periode ist. Die von einander verschiedenen Theilwerthe sind Wurzeln

---

der mathematischen Annalen („Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen und Theorie der Multiplicatorgleichungen erster Stufe"), in welcher Herr Hurwitz, soweit es sich um die f-Gleichung handelt, die von Herrn Klein gegebenen Ideen weiter verfolgt und eine grosse Anzahl neuer Resultate hinzugefügt hat. Neuerdings ist auch Herr Weber auf die Theorie der f-Gleichung eingegangen (Acta Mathematica, Bd. VI, pag. 329 ff.: „Zur Theorie der elliptischen Functionen"), wobei er seinen Ausgangspunkt in der Theilungsgleichung für sin am u nimmt.

der *„speciellen Theilungsgleichung"*, deren Coefficienten *ganze rationale* Functionen der Invarianten g_2, g_3 sind. Ist n eine zusammengesetzte Zahl, so lassen sich alle Theilwerthe $\wp\left(\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\right)$, bei denen die drei Zahlen λ, μ, n einen gemeinsamen Factor haben, absondern, wodurch eine Reduction der Theilungsgleichung eintritt.

Indem man die genannten Theilwerthe in Gruppen ordnet und cyklische Functionen $C_{\lambda,\mu}$ der Theilwerthe einer solchen Gruppe bildet, erhält man algebraische Gleichungen zwischen $C_{\lambda,\mu}$ und g_2, g_3, welche *Resolventen* der reducirten Theilungsgleichung heissen sollen. Unter ihnen nehmen diejenigen eine hervorragende Stelle ein, welche zur Transformation der elliptischen Functionen führen.

Die Aufgabe der Transformation n^{ten} Grades besteht nun hauptsächlich darin, $\bar{\wp}u=\wp\left(u \mid \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ als rationale Function von

$$\wp(u \mid \varpi, \varpi')=\wp(u \mid \omega, \omega')=\wp u$$

darzustellen, wobei das Periodenpaar

$$2\varpi=2p\omega+2q\omega', \quad 2\varpi'=2p'\omega+2q'\omega', \quad (pq'-p'q=+1)$$

dem primitiven Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ äquivalent ist.

Die Form dieser rationalen Function ist leicht anzugeben, es handelt sich nur darum, die Coefficienten, welche sie enthält, als *algebraische* Functionen von g_2, g_3 möglichst einfach darzustellen. Diess kann geschehen durch Einführung der Hülfsgrösse f, welche durch die f-Gleichung von g_2, g_3 abhängt, und welche man durch die Gleichung

$$f^2=(-1)^{n-1}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\sigma_{\alpha p,\alpha q}=\prod_{\alpha=1}^{n-1}\left[e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\eta\varpi}\,\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]$$

definiren kann. Ausserdem giebt es aber noch eine ganze Reihe charakteristischer Darstellungen von f, von denen hier in der Einleitung nur zwei hervorgehoben werden mögen.

1) Ist

$$h=e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}, \quad Q(\omega,\omega')=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}),$$

so wird

$$Q^{24}(\varpi,\varpi')=\Delta(\varpi,\varpi')=g_2^3-27g_3^2 \quad \text{und} \quad f=\frac{Q\left(\frac{\varpi}{n},\varpi'\right)}{Q^n(\varpi,\varpi')}.$$

2) Ist n *ungerade*, so ist bei der Darstellung von $\bar{\wp}u$ als rationale Function von $\wp u=s$ der Nenner das Quadrat einer ganzen Function $P(s)$. Für die Gleichung

$$P(s)=0$$

wird $\pm f^{-n+3}$ die *Discriminante*.

Um nun die oben erwähnten Coefficienten darzustellen, bildet man eine partielle Differentialgleichung, welcher die Function $f^3 P(s)$ genügt. (Ist n *gerade*, so tritt an die Stelle von $f^3 P(s)$ der Nenner in der Darstellung von $\bar{\wp} u$, multiplicirt mit f^6). Aus dieser Differentialgleichung findet man durch Entwickelung nach Potenzen von s die einzelnen Coefficienten von $P(s)$ unmittelbar als Functionen von f und den partiellen Ableitungen von f nach g_2 und g_3. Sobald also die f-Gleichung gebildet ist, kann man die Coefficienten von $P(s)$ als rationale Functionen von f, g_2 und g_3 darstellen.

Hat man den Nenner von $\bar{\wp} u$, so ergiebt sich daraus der Zähler sehr leicht, und ebenso ist auch die Darstellung von $\bar{\sigma} u = \sigma\left(u \middle| \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$, wie sich zeigen wird, dadurch schon gegeben. Die Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\bar{\wp} u$ findet man gleichfalls aus dieser partiellen Differentialgleichung.

Es kommt daher Alles auf die f-Gleichung und deren Wurzeln an. Zu ihrer Bildung ist es zunächst nothwendig, das Verhalten der Grösse $Q(\omega, \omega')$ zu untersuchen, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten 2ϖ, $2\varpi'$ vertauscht. Es wird nämlich

$$Q(\varpi, \varpi') = \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega'),$$

wo $\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}$ eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist, welche man durch Zurückführung auf Gauss'sche Summen bestimmen kann. Ich habe für diese Grösse ϱ auch sogleich eine Tabelle aufgestellt, welche die Fälle $q = 1$ bis $q = 7$ umfasst.

Jetzt bietet, abgesehen von numerischen Rechnungen, die Herstellung der f-Gleichung und die Untersuchung ihrer Wurzeln keine Schwierigkeit mehr, namentlich, wenn n eine *Primzahl* von der Form $6l \pm 1$ ist; denn man kennt die Form der Gleichung und kann die Zahlencoefficienten durch Entwickelung nach Potenzen von $h \left(= e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}\right)$ ausrechnen. Nach dieser Methode habe ich für die Zahlen

$$n = 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$$

die f-Gleichungen wirklich gebildet; für $n = 5$ und für $n = 7$ sind auch die übrigen Grössen, welche bei der Transformation auftreten, als rationale Functionen von f, g_2, g_3 dargestellt.

Zwischen den $n + 1$ Wurzeln der f-Gleichung gelten $\frac{n+1}{2}$ Relationen, welche denen für den Jacobi'schen Multiplicator analog sind.

Ist n eine *zusammengesetzte* Zahl von der Form $6l \pm 1$, so kann man die f-Gleichung am leichtesten durch *wiederholte Transformation* finden. Ist z. B. $n = ab$, so bilde man

$$f = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)}{Q\,(\varpi, \varpi')}, \quad \bar{f} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{ab}, \varpi'\right)}{Q^b\left(\frac{\varpi}{a}, \varpi'\right)}$$

und die beiden f-Gleichungen, deren Wurzeln f und $\bar{f}$ sind. Diese f-Gleichungen gehören bez. zur Transformation a^{ten} und b^{ten} Grades. Da nun

$$f^b \bar{f} = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{ab}, \varpi'\right)}{Q^{ab}(\varpi, \varpi')} = f\left(\frac{\varpi}{ab}, \varpi'\right)$$

wird, so findet man durch Elimination auch die f-Gleichung für $f\left(\frac{\varpi}{ab}, \varpi'\right)$.

Eine wesentliche Reduction tritt hierbei ein, wenn $n = 6l + 1$ ein *Quadrat* ist, weil dann nicht nur f^2, sondern schon f selbst die Wurzel einer Gleichung vom Grade $T(n)$ wird*). Dies habe ich auch an den Beispielen $n = 25$ und $n = 49$ durchgeführt.

Für die Zahlen von der Form $6l \pm 2$ gelten ähnliche Schlüsse; nur ist hier im Allgemeinen erst f^8 die Wurzel der f-Gleichung; als Beispiele sind die Fälle $n = 2, 4, 8$ behandelt**).

Hat n die Form $6l + 3$, so ist im Allgemeinen erst f^6 die Wurzel der f-Gleichung. Eine Ausnahme davon findet statt, wenn n ein *Quadrat* ist, weil dann schon f^3 die Wurzel der f-Gleichung wird. Als Beispiele dienen die Fälle $n = 3$ und $n = 9$.

Hat schliesslich n die Form $6l$, so wird im Allgemeinen erst f^{24} die Wurzel der f-Gleichung sein; die Ausführung von Beispielen wäre daher in diesem Falle sehr umständlich und konnte um so eher unterlassen werden, da dieser Uebelstand durch Einführung anderer Hülfsgrössen zu heben ist.

Wie schon in meinen früheren Abhandlungen, so werde ich auch hier die Theorie der elliptischen Functionen nach den Methoden des Herrn Weierstrass zu Grunde legen. Daher werde ich mich auch möglichst der Bezeichnungen bedienen, welche Herr H. A. Schwarz in seinen „*Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. Weierstrass*" benutzt hat.

Die innigen Beziehungen, welche mit den älteren Arbeiten des Herrn Klein bestehen, wurden schon hervorgehoben. Es erübrigt nur,

---

*) Vergl. denselben Satz bei Weber, l. c. Indem ich die Beispiele $n = 25$ und $n = 49$ hinzufüge, folge ich einer von Herrn Weber an mich gerichteten Aufforderung.

**) Vergl. hier und bei den folgenden Angaben die vorgenannte Arbeit von Herrn Hurwitz.

dass ich auf die neuesten Publicationen von Herrn Klein verweise, in welchen sich derselbe meinem ursprünglichen Ausgangspunkte und den von mir gebrauchten Methoden sehr genähert hat (siehe insbesondere auch die nach Abschluss der hier folgenden Untersuchungen veröffentlichte Arbeit: „Ueber die elliptischen Normalcurven von der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen der n^{ten} Stufe", in den Abhandl. der k. sächs. Gesellschaft d. Wiss. von 1885).

Abschnitt I.

Eigenschaften der speciellen Theilungsgleichung.

§ 1.

Definition und Eigenschaften der Theilwerthe der $\wp$-Function.

Nach meiner Abhandlung: „*Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen*" (Journal für Mathematik, Bd. 76, S. 21—33)*) ist für jeden beliebigen Werth von n

$$(1)\quad \psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{(\sigma u)^{nn}} = \frac{(n-1)^{n-1}}{[2!\,3!\ldots(n-1)!]^2}\begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u & \cdots & \wp^{(n-1)} u \\ \wp'' u & \wp''' u & \cdots & \wp^{(n)} u \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \wp^{(n-1)} u & \wp^{(n)} u & \cdots & \wp^{(2n-3)} u \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt zunächst, dass für jeden beliebigen Werth von m die Grössen $\psi_{2m+1}(u)$ und $\dfrac{\psi_{2m+2}(u)}{\wp' u}$ *ganze rationale* Functionen von $\wp u$, g_2, g_3 sind. Andererseits ist

$$(2)\qquad \psi_n^2(u) = n^2 \prod{}' \left[\wp u - \wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)\right],$$

wo λ und μ alle Werthe von 0 bis $n-1$ annehmen, nur dürfen sie nicht beide gleichzeitig gleich 0 sein, was der Strich bei dem Productzeichen $\prod$ andeuten möge. Nun ist aber

$$\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right) = \wp\left(\frac{2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'}{n}\right),$$

wenn

$$\lambda + \lambda' \equiv \mu + \mu' \equiv 0 \pmod{n},$$

folglich werden auf der rechten Seite von Gleichung (2) je zwei Factoren einander gleich, nur die drei Factoren

$$\wp u - \wp\omega, \quad \wp u - \wp\omega', \quad \wp u - \wp(\omega + \omega')$$

---

*) Die Resultate dieser Abhandlung sind in die oben erwähnte Formel-Sammlung von Herrn H. A. Schwarz aufgenommen worden.

treten für *gerade* Werthe von n einzeln auf. Setzt man also $\wp u = s$ und

$$(3)\begin{cases} \psi_{2m+1}(u) = (2m+1)[(\wp u)^{2m(m+1)} - K_1(\wp u)^{2m(m+1)-1} + \cdots + K_{2m(m+1)}] \\ \qquad = (2m+1) \prod_{2m+1}(s), \\ \psi_{2m+2}(u) = -(m+1)\wp' u[(\wp u)^{2m(m+2)} - K_1(\wp u)^{2m(m+2)-1} + \cdots + K_{2m(m+2)}] \\ \qquad = -(m+1)\wp' u \prod_{2m+2}(s), \end{cases}$$

so sind $K_1, K_2, \ldots$ die elementaren symmetrischen Functionen der von einander verschiedenen Grössen $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, wobei aber für *gerades* n die drei Grössen $\wp\omega$, $\wp\omega'$, $\wp(\omega + \omega')$ ausgeschlossen sind.

Die so definirten Grössen $\wp\left(\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n}\right)$, welche der Kürze wegen durch $\wp_{\lambda,\mu}$ bezeichnet werden, sollen *„das vollständige System der Theilwerthe n^{ten} Grades der Function $\wp u$"* heissen*) und die Gleichung

$$(4) \qquad \prod_n(s) = 0,$$

deren Wurzeln sie sind, soll *„die specielle Theilungsgleichung"* genannt werden. Es gilt dann der Satz:

I. *Die Coefficienten der speciellen Theilungsgleichung sind ganze rationale Functionen von g_2 und g_3;* und daraus folgt weiter:

II. *Jede (ganze) symmetrische Function derjenigen Theilwerthe, welche das vollständige System bilden, ist eine (ganze) rationale Function von g_2 und g_3.*

§ 2.

Reduction der Theilwerthe n^{ten} Grades der $\wp$-Function.

Sind $a, b, c, \ldots$ die von einander verschiedenen Primfactoren der Zahl n, ist also

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so zerfällt $\prod_n(s)$ in Factoren. Es wird nämlich nach Gleichung (2)

$$\psi_n^2(u) = n^2 \prod{}'(\wp u - \wp_{\lambda,\mu}); \quad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, 2, \cdots n-1 \\ \mu = 0, 1, 2, \cdots n-1 \end{pmatrix};$$

dabei giebt es unter den Werthen von λ und ebenso unter den Werthen von μ genau $\frac{n}{a}$ Werthe, welche durch a theilbar sind. Wenn man nun noch berücksichtigt, dass λ und μ nicht gleichzeitig 0 sein dürfen, so ergiebt sich der Satz, dass *die Anzahl der Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$, bei denen λ und μ beide durch a theilbar sind, gleich $\frac{n^2}{a^2} - 1$ ist.* Das

*) Da $\wp(u + 2\alpha\omega + 2\beta\omega') = \wp u$ ist, so wird auch $\wp_{\lambda+\alpha n, \mu+\beta n} = \wp_{\lambda,\mu}$.

Product dieser Factoren ist $\frac{a^2}{n^2} \cdot \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$, also eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3, durch welche $\psi^2_n(u)$ theilbar ist. Der Quotient

$$\psi^2_n(u) : \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$$

ist daher gleichfalls eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 und ist das Product von

$$(n^2 - 1) - \left(\frac{n^2}{a^2} - 1\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$. Ebenso ist die Anzahl aller Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ in $\psi^2_n(u)$, bei denen λ und μ *beide* durch b theilbar sind, gleich $\frac{n^2}{b^2} - 1$, während die Anzahl aller Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$, bei denen λ und μ *beide* durch ab theilbar sind, gleich $\frac{n^2}{a^2b^2} - 1$ ist. Daraus folgt, dass die Anzahl aller dieser Factoren, bei denen λ und μ *beide* durch b, aber nicht gleichzeitig *beide* durch ab theilbar sind, gleich

$$\left(\frac{n^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{n^2}{a^2b^2} - 1\right) = \frac{n^2}{b^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

wird. Das Product dieser Factoren ist

$$\frac{b^2}{n^2}\, \psi^2_{\frac{n}{b}}(u) : \frac{a^2b^2}{n^2}\, \psi^2_{\frac{n}{ab}}(u).$$

Ebenso, wie $\psi^2_n(u) : \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$ eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 ist, so muss auch $\psi^2_{\frac{n}{b}}(u) : \psi^2_{\frac{n}{ab}}(u)$ eine *ganze rationale* Function dieser Grössen sein, durch welche $\psi^2_n(u) : \psi^2_{\frac{n}{a}}(u)$ theilbar ist. Der Ausdruck

$$\frac{\psi^2_n(u)\, \psi^2_{\frac{n}{ab}}(u)}{\psi^2_{\frac{n}{a}}(u)\, \psi^2_{\frac{n}{b}}(u)}$$

ist also eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 und enthält nur noch

$$n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) - \frac{n^2}{b^2}\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\left(1 - \frac{1}{b^2}\right)$$

Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$.

Vertauscht man jetzt n mit $\frac{n}{c}$, so gelten dieselben Schlüsse, so dass auch

$$\frac{\psi^2_{\frac{n}{c}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{abc}}(u)}{\psi^2_{\frac{n}{ac}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{bc}}(u)}$$

eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 ist, welche diejenigen $\frac{n^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$ Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ enthält, bei denen λ und μ *beide* durch c, nicht aber beide auch durch a oder durch b theilbar sind. Dieser Ausdruck kann also wiederum abgesondert werden, so dass

$$\frac{\psi^2_n(u)\,\psi^2_{\frac{n}{ab}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{ac}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{bc}}(u)}{\psi^2_{\frac{n}{a}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{b}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{c}}(u)\,\psi^2_{\frac{n}{abc}}(u)}$$

eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 wird, die nur noch

$$n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)-\frac{n^2}{c^2}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$$
$$=n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)$$

Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ enthält.

Wenn man in dieser Weise fortfährt, bis man nur noch ein Product von solchen Factoren übrig behält, bei denen die drei Zahlen λ, μ, n keinen Factor mehr besitzen, der allen dreien gemeinsam ist, so wird dieses Product eine *ganze rationale* Function von $\wp u$, g_2, g_3 sein, deren Grad in Bezug auf $\wp u$ gleich $\varphi(n)\,T(n)$ ist, wobei $\varphi(n)$ und $T(n)$ durch die folgenden Gleichungen definirt werden:

$$(5)\qquad\begin{cases}\varphi(n)= n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots,\\ T(n)= n\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\cdots,\\ \varphi(n)\,T(n)= n^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\left(1-\frac{1}{c^2}\right)\cdots.\end{cases}$$

Diese ganze rationale Function von $\wp u$ ist aber (wenn n von 2 verschieden ist) ein vollständiges *Quadrat*, weil $\wp_{\lambda,\mu}=\wp_{\lambda',\mu'}$ wird für $\lambda+\lambda'\equiv\mu+\mu'\equiv 0 \pmod{n}$, so dass je zwei von den übrig gebliebenen Factoren $\wp u - \wp_{\lambda,\mu}$ einander gleich werden.

Die von einander verschiedenen Grössen $\wp_{\lambda,\mu}$, bei denen λ, μ, n keinen Factor besitzen, der allen dreien gemeinsam ist, sollen daher *„das reducirte System der Theilwerthe n^{ten} Grades“* heissen, ihre Anzahl ist für $n=2$ gleich 3 und für alle anderen Werthe von n gleich $\frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n)$. Die Gleichung, deren Wurzeln das reducirte System der Theilwerthe n^{ten} Grades ausmachen, heisse *„die reducirte Theilungsgleichung.“*

Hieraus ergeben sich die folgenden Sätze:

III. *Die Coefficienten der reducirten Theilungsgleichung sind ganze rationale Functionen von g_2 und g_3.*

IV. *Jede (ganze) symmetrische Function derjenigen Theilwerthe n^{ten} Grades, welche das reducirte System bilden, ist eine (ganze) rationale Function von g_2 und g_3.*

§ 3.

Resolventen der reducirten Theilungsgleichung.

Sind jetzt λ und μ so gewählt, dass $\wp_{\lambda,\mu}$ zu dem reducirten System der Theilwerthe n^{ten} Grades gehört, und setzt man der Kürze wegen

$$\frac{2\lambda\omega + 2\mu\omega'}{n} = w_{\lambda,\mu}, \quad \text{also} \quad \wp_{\lambda,\mu} = \wp(w_{\lambda,\mu}),$$

so gehören auch die $\wp$-Theiler

$$\wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^\varkappa w_{\lambda,\mu})$$

zu dem reducirten System, wenn k relativ prim ist zu n. Nun sei $\varkappa$ die *kleinste* Zahl, für welche

$$k^\varkappa \equiv \pm 1 \pmod{n}$$

ist, und es sei $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function der Grössen

$$\wp(w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda,\mu}).$$

Da nun $\wp(k^\varkappa u) = \wp u$ ist, so ist $C_{\lambda,\mu}$ auch eine cyklische Function von

$$\wp(kw_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^3 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^\varkappa w_{\lambda,\mu}),$$

oder von

$$\wp(k^2 w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^3 w_{\lambda,\mu}), \quad \wp(k^4 w_{\lambda,\mu}), \cdots \wp(k^{\varkappa+1} w_{\lambda,\mu}),$$

u. s. w. Ferner ist $\wp(ku)$ eine rationale Function von $\wp u$, deshalb wird

(6) $$C_{\lambda,\mu} = F(\wp(w_{\lambda,\mu})) = F(\wp(kw_{\lambda,\mu})) = \cdots = F(\wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda,\mu})),$$

wobei $F(\wp)$ eine rationale Function von $\wp$, g_2, g_3 bedeutet.

Wenn nun $\wp(w_{\lambda',\mu'}) = \wp_{\lambda',\mu'}$ gleichfalls zu den Theilwerthen des reducirten Systems gehört, aber von den Theilwerthen $\wp(w_{\lambda,\mu})$, $\wp(kw_{\lambda,\mu})$, $\cdots$, $\wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda,\mu})$ verschieden ist, so kann man dieselbe cyklische Function — sie heisse jetzt $C_{\lambda',\mu'}$ — von den Grössen

$$\wp(w_{\lambda',\mu'}), \quad \wp(kw_{\lambda',\mu'}), \quad \wp(k^2 w_{\lambda',\mu'}), \cdots \wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda',\mu'})$$

bilden und erhält ebenso

(6a) $$C_{\lambda',\mu'} = F(\wp(w_{\lambda',\mu'})) = F(\wp(kw_{\lambda',\mu'})) = \cdots = F(\wp(k^{\varkappa-1} w_{\lambda',\mu'})).$$

So kann man fortfahren, bis das reducirte System der Theilwerthe erschöpft ist. Nach bekannten Sätzen aus der Zahlentheorie muss nämlich $\varkappa$ ein Theiler von $\varphi(n)$ sein, während unter den Theilwerthen

$$\begin{array}{lll} \wp(w_{\lambda,\mu}), & \wp(kw_{\lambda,\mu}), & \cdots \wp(k^{\varkappa-1}w_{\lambda,\mu}), \\ \wp(w_{\lambda',\mu'}), & \wp(kw_{\lambda',\mu'}), & \cdots \wp(k^{\varkappa-1}w_{\lambda',\mu'}), \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

keine zwei einander gleich sind. Da nun (wenn man von dem Falle $n = 2$ absieht) $\varkappa$ auch sicher ein Theiler von $\frac{1}{2}\varphi(n)T(n)$ ist, so wird

$$\frac{1}{2\varkappa}\varphi(n)\,T(n) = N \tag{7}$$

eine ganze Zahl, und

$$\varkappa(C_{\lambda,\mu} + C_{\lambda',\mu'} + \cdots) = \sum F(\wp_{\lambda,\mu}), \tag{8}$$

wo die Summe auf der linken Seite N Glieder enthält, während die Summe auf der rechten Seite über die sämmtlichen Theilwerthe des reducirten Systems zu erstrecken ist.

Da für jede beliebige Potenz der Grössen $C_{\lambda,\mu}$, $C_{\lambda',\mu'}$, ... ähnliche Schlüsse gelten, so wird für jeden ganzzahligen Werth von r

$$C^r_{\lambda,\mu} + C^r_{\lambda',\mu'} + \cdots$$

eine symmetrische Function der Theilwerthe des reducirten Systems und somit nach Satz IV eine rationale Function von g_2 und g_3. Dies giebt den Satz:

V. *Ist $C_{\lambda,\mu}$ eine cyklische Function von $\wp(w_{\lambda,\mu})$, $\wp(kw_{\lambda,\mu})$, $\cdots$ $\wp(k^{\varkappa-1}w_{\lambda,\mu})$, wo $\varkappa$ die kleinste Zahl ist, für welche $k^\varkappa \equiv \pm 1$ (mod. n) ist, so wird $C_{\lambda,\mu}$ die Wurzel einer Gleichung N^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.* Eine solche Gleichung heisse „*Resolvente*" der reducirten Theilungsgleichung.

So ist z. B. für $n = 14$

$$\varphi(n) = 6, \quad T(n) = 24, \quad \frac{1}{2}\varphi(n)\,T(n) = 72;$$

das reducirte System der Theilwerthe besteht daher hier aus den 72 Grössen

$$\begin{array}{llll} \wp\left(\frac{\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{3\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{9\omega}{7}\right), & \\ \wp\left(\frac{\omega'+r\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{3\omega'+3r\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{9\omega'+9r\omega}{7}\right), & (r=0,1,2,\cdots 13), \\ \wp\left(\frac{2\omega'+s\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{6\omega'+3s\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{18\omega'+9s\omega}{7}\right), & (s=1,3,5,7,9,11,13), \\ \wp\left(\frac{7\omega'+t\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{21\omega'+3t\omega}{7}\right), & \wp\left(\frac{63\omega'+9t\omega}{7}\right); & (t=1,2) \end{array}$$

und jede cyklische Function von $\wp\left(\frac{\omega}{7}\right)$, $\wp\left(\frac{3\omega}{7}\right)$, $\wp\left(\frac{9\omega}{7}\right)$ ist die Wurzel einer Gleichung 24^{ten} Grades, deren Coefficienten *rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind.

Von besonderem Interesse ist der Satz V, wenn n eine Primzahl ist, und wenn man annimmt, dass $k = g$ eine primitive Wurzel von n ist. Dann wird nämlich, (wenn man von dem Falle $n = 2$ absieht),

$$\varkappa = \frac{1}{2}\,\varphi(n) = \frac{n-1}{2}, \quad N = T(n) = n + 1,$$

und die Theilwerthe

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{2g\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{2g^2\omega}{n}\right), \quad \cdots \wp\left(\frac{2g^{\varkappa-1}\omega}{n}\right)$$

sind, wenn man anders ordnet, identisch mit den Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{4\omega}{n}\right), \quad \wp\left(\frac{6\omega}{n}\right), \quad \cdots \wp\left(\frac{n-1}{n}\,\omega\right).$$

Jede *symmetrische* Function von diesen Grössen ist auch eine *cyklische* Function von $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$, $\wp\left(\frac{2g\omega}{n}\right)$, $\cdots \wp\left(\frac{2g^{\varkappa-1}\omega}{n}\right)$, so dass man in diesem Falle leicht Ausdrücke bilden kann, welche die Wurzeln einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades sind.

Solche Resolventen $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades sind in der That mehrfach gebildet und für die Transformation der elliptischen Functionen benutzt worden. Es soll hier aber auch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass aus dem Satz V auch die Bildung zahlreicher anderer Resolventen hervorgeht, die man erhält, wenn k *keine primitive* Wurzel von n ist.

Um dies an einem Zahlenbeispiel zu erläutern, sei $n = 13$, dann genügt eine cyklische Function der 6 Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{4\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{8\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{16\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{32\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{64\omega}{13}\right)$$

einer Resolvente 14^{ten} Grades, dagegen genügt eine cyklische Function der 3 Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{8\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{32\omega}{13}\right)$$

einer Resolvente 28^{ten} Grades; und endlich genügt eine cyklische (symmetrische) Function der beiden Grössen

$$\wp\left(\frac{2\omega}{13}\right), \quad \wp\left(\frac{10\omega}{13}\right)$$

einer Resolvente 42^{ten} Grades.

Aehnliche Betrachtungen gelten für alle Zahlen n von der Form a^α oder $2a^\alpha$, wenn a eine *ungerade Primzahl* ist, d. h. man kann dann mit Anwendung des Satzes V unmittelbar Resolventen vom Grade $T(n)$ bilden, weil es dann noch primitive Wurzeln von n giebt.

Ist n auf andere Weise aus mehreren Factoren zusammengesetzt, so sind die Resolventen, welche der Satz V liefert, nicht vom Grade $T(n)$, sondern ihr Grad wird ein Vielfaches von $T(n)$. Es wird aber in dem Folgenden gezeigt werden, wie man auch dann noch Resolventen vom Grade $T(n)$ bilden kann.

Abschnitt II.

Einführung der Grösse $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ und ihre Bedeutung für die Transformation der elliptischen Functionen.

§ 4.

Ueber die transformirten Functionen $\bar{\sigma} u$ und $\wp u$.*)

Die Theilwerthe n^{ten} Grades der $\wp$-Function spielen eine sehr wichtige Rolle bei der Transformation der elliptischen Functionen; und umgekehrt kann man auch zeigen, dass die genannten Theilwerthe rational berechnet werden können nach Auflösung gewisser Resolventen, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten.

Die allgemeinsten Ausdrücke für die Transformation der elliptischen Functionen findet man dabei in folgender Weise.

Es seien die ganzen Zahlen p und q zu einander relativ prim, im Uebrigen aber ganz beliebig, dann kann man zwei ganze Zahlen p' und q' finden, so dass

$$pq' - p'q = +1 \tag{9}$$

wird. Das Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \qquad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \tag{10}$$

heisst dann zu dem *primitiven* Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ *äquivalent*.

Vertauscht man nun die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten 2ϖ, $2\varpi'$, so ändern sich die Functionen σu, $\wp u$ und ihre Invarianten g_2, g_3 gar nicht. Es möge dies durch die Gleichungen

$$\begin{cases} \sigma(u \mid \varpi, \varpi') = \sigma(u \mid \omega, \omega') = \sigma u, \\ \wp(u \mid \varpi, \varpi') = \wp(u \mid \omega, \omega') = \wp u \end{cases} \tag{11}$$

ausgedrückt werden. Sind dagegen in

$$2\omega_1 = 2\lambda\omega + 2\mu\omega', \qquad 2\omega_1' = 2\lambda'\omega + 2\mu'\omega'$$

---

*) Die Ausführungen dieses und des folgenden Paragraphen sind zum Theil einer Vorlesung entnommen, welche Herr Weierstrass im Winter 1870—71 gehalten hat.

λ, μ, λ', μ' ganze Zahlen, für welche

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = n > 1$$

wird, so sind $\sigma(u \mid \omega_1, \omega_1')$ und $\wp(u \mid \omega_1, \omega_1')$ von $\sigma(u \mid \omega, \omega')$ und $\wp(u \mid \omega, \omega')$ verschieden. Es besteht aber doch noch ein Zusammenhang zwischen diesen und den ursprünglichen Functionen, welcher durch die *Transformation der elliptischen Functionen* klar gelegt wird, und zwar entstehen hierbei die ursprünglichen Functionen aus den neuen durch *Transformation n^{ten} Grades.* Es lässt sich aber zeigen, dass man sich darauf beschränken kann, den Zusammenhang zwischen den Functionen $\sigma(u \mid n\varpi, \varpi')$, $\wp(u \mid n\varpi, \varpi')$ und $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, $\wp(u \mid \omega, \omega')$ zu untersuchen; oder — und dass kommt auf dasselbe hinaus — man braucht nur den Zusammenhang zwischen $\sigma(u \mid \omega, \omega')$, $\wp(u \mid \omega, \omega')$ und den transformirten Functionen

$$\sigma\left(u \mid \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \bar{\sigma} u, \quad \wp\left(u \mid \frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = \bar{\wp} u \tag{12}$$

zu untersuchen.

Da $\bar{\wp} u$ eine *gerade* Function von u ist, welche die Perioden 2ϖ, $2\varpi'$ besitzt, so muss $\bar{\wp} u$ eine rationale Function von $\wp u$ sein, die jetzt gebildet werden möge.

Die sämmtlichen nicht congruenten Werthe von u, für welche $\bar{\wp} u$ unendlich wird, sind

$$0, \frac{2\varpi}{n}, \frac{4\varpi}{n}, \ldots \frac{2(n-1)\varpi}{n};$$

entwickelt man $\bar{\wp} u$ nach Potenzen von $u - \frac{2\alpha\varpi}{n}$, so wird für $\alpha = 0$, $1, 2, \ldots n-1$

$$\bar{\wp} u = \left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^{-2} + \frac{g_2}{20}\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)^2 + \cdots,$$

so dass die elliptische Function

$$\bar{\wp} u - \wp u - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = -B_1$$

für keinen Werth von u mehr unendlich wird, woraus man schliesst, dass B_1 eine Constante ist. Den Werth dieser Constanten findet man, indem man die linke Seite der letzten Gleichung nach Potenzen von u entwickelt, dann ist der Coefficient von u^0 gleich $-B_1$, also

$$B_1 = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right). \tag{13}$$

Dies giebt für beliebige Werthe von n:

$$(14)\qquad \bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right].$$

Ist n *ungerade*, also $n = 2m + 1$, so wird

$$\bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) + \wp\left(u - \frac{2(m+\alpha)\varpi}{n}\right)\right] - B_1.$$

Setzt man jetzt

$$m + \alpha = n - \beta, \qquad \text{also} \qquad \beta = m + 1 - \alpha,$$

und beachtet, dass

$$\wp\left(u - \frac{2(n-\beta)\varpi}{n}\right) = \wp\left(u + \frac{2\beta\varpi}{n}\right)$$

wird, so erhält man

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\wp\left(u - \frac{2(m+\alpha)\varpi}{n}\right) = \sum_{\beta=m}^{\beta=1}\wp\left(u + \frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \sum_{\alpha=1}^{m}\wp\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right),$$

also

$$(14\text{a})\quad \bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) + \wp\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] - B_1.$$

Nun ist aber

$$\wp(u-v) + \wp(u+v) = \frac{(\wp u + \wp v)\left(2\wp u\,\wp v - \frac{1}{2}g_2\right) - g_3}{(\wp u - \wp v)^2},$$

folglich wird

$$(15\text{a})\quad \bar{\wp}u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\left[\wp u + \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]\left[2\wp u\,\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \frac{1}{2}g_2\right] - g_3}{\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]^2} - B_1.$$

Ist n *gerade*, also $n = 2m + 2$, so findet man in ähnlicher Weise

$$(14\text{b})\quad \left\{\begin{aligned} \bar{\wp}u &= \wp u + \wp(u - \varpi) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) + \wp\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] - B_1, \end{aligned}\right.$$

oder

$$(15\text{b})\quad \left\{\begin{aligned} \bar{\wp}u &= \wp u + e_\lambda + \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{\wp u - e_\lambda} \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\left[\wp u + \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]\left[2\wp u\,\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \frac{1}{2}g_2\right] - g_3}{\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]^2} - B_1, \end{aligned}\right.$$

wenn man $\wp\varpi$ mit e_λ und die beiden anderen Wurzeln der Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0$$

mit e_μ und e_ν bezeichnet.

Ist n *ungerade*, so folgt durch Integration aus Gleichung (14a)

$$(16\text{a})\quad \frac{\bar{\sigma}' u}{\bar{\sigma} u} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\frac{\sigma'\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)} + \frac{\sigma'\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}\right] + B_1 u,$$

und ist n *gerade*, so folgt durch Integration aus Gleichung (14b)

$$(16\text{ b})\quad \frac{\bar{\sigma}' u}{\bar{\sigma} u} = \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{\sigma'(u-\varpi)}{\sigma(u-\varpi)} + \tilde{\eta}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{m}\left[\frac{\sigma'\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)} + \frac{\sigma'\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}{\sigma\left(u + \frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}\right] + B_1 u.$$

Hierbei ist

$$\tilde{\eta} = \frac{\sigma'\varpi}{\sigma\varpi} = 2p\eta + 2q\eta',$$

und die Integrationsconstanten sind dadurch bestimmt, dass man u mit $-u$ vertauscht.

Bei nochmaliger Integration der Gleichungen (16a) und (16b) findet man die Integrationsconstante, indem man $u = 0$ setzt und die Relation

$$\frac{\bar{\sigma} u}{\sigma u} = 1 \quad \text{für} \quad u = 0$$

beachtet. Dadurch erhält man die Gleichungen

$$(17\text{a})\quad \begin{cases} \bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\,\sigma u \prod\limits_{\alpha=1}^{m} \dfrac{\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n} - u\right)\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n} + u\right)}{\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)} \\[2ex] \quad\; = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\,\sigma^n u \prod\limits_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right], \end{cases}$$

wenn $n = 2m + 1$ ist; und, indem man $\dfrac{e^{-\tilde{\eta} u}\sigma(\varpi + u)}{\sigma\varpi}$ mit $\sigma_\lambda u$ bezeichnet,

$$(17\text{b})\quad \bar{\sigma} u = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\,\sigma_\lambda u\,\sigma^{n-1} u \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right],$$

wenn $n = 2m + 2$ ist.

Es kommt besonders auf die Bestimmung von

$$(18)\quad \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] = P(s)$$

an, denn kennt man diese Grösse, so folgt für $n = 2m + 1$

$$\lg(\bar{\sigma} u) = \frac{1}{2} B_1 u^2 + n \lg(\sigma u) + \lg P(s),$$

$$\frac{\bar{\sigma}' u}{\bar{\sigma} u} = B_1 u + n \frac{\sigma' u}{\sigma u} + \frac{d \lg P(s)}{du},$$

(19a)
$$\bar{\wp} u = n \wp u - B_1 - \frac{d^2 \lg P(s)}{du^2}.$$

In ähnlicher Weise findet man für $n = 2m + 2$

(19b)
$$\bar{\wp} u = (n-1) \wp u + \wp(u - \bar{\varpi}) - B_1 - \frac{d^2 \lg P(s)}{du^2}.$$

Dabei ist

(20) $P(s) = s^m - G_1 s^{m-1} + G_2 s^{m-2} - \cdots \pm G_m$ und $s = \wp u$,

es sind also $G_1, G_2, \ldots G_m$ die *elementaren symmetrischen* Functionen der Theilwerthe

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right), \wp\left(\frac{4\varpi}{n}\right), \cdots \wp\left(\frac{2m\varpi}{n}\right).$$

Ausserdem ist

(21)
$$B_1 = \begin{cases} 2G_1 & \text{für } n = 2m + 1, \\ 2G_1 + e_\lambda & \;\;,, \;\; n = 2m + 2. \end{cases}$$

Aus diesen Betrachtungen ergiebt sich der Satz:

VI. *Zur Transformation n^{ten} Grades braucht man nicht die Theilwerthe $\wp_{\lambda,\mu}$ selbst, sondern nur die Grössen $G_1, G_2, \ldots G_m$ (und für gerades n noch e_λ).*

§ 5.

Ueber die Anzahl der Transformationen n^{ten} Grades.

In $\bar{\wp} u = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\varpi}{n}, \bar{\varpi}'\right)$ ist $\bar{\varpi}$ gleich $p\omega + q\omega'$, wobei p und q beliebige ganze Zahlen sind. Den unendlich vielen Werthen, welche p und q haben können, entsprechen aber nicht *unendlich* viele Werthe von $\bar{\wp} u$, sondern es giebt nur eine *endliche* Anzahl von verschiedenen Functionen $\bar{\wp} u$, welche durch Transformation n^{ten} Grades aus $\wp u$ entstanden sind. Diese Anzahl nennt man die *Anzahl der Transformationen n^{ten} Grades.* Mit ihrer Bestimmung hat sich schon Jacobi beschäftigt. (Ges. Werke, Bd. 1, S. 101)*). Hier kann man diese Anzahl auf folgende Weise finden.

*) Man vergl. auch Königsberger, die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen, S. 70.

Joubert, Sur les équations, qui se rencontrent dans la théorie de la transformation des fonctions elliptiques, S. 13.

Hurwitz, Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Math. Annalen, Bd. XVIII, S. 528—592.

Es sei zunächst $n = 2$, dann wird

$$B_1 = \wp\varpi = e_\lambda,\quad \bar{\sigma}u = e^{\frac{1}{2}B_1 u^2}\sigma_\lambda u\,\sigma u,\quad \bar{\wp}u = \wp u + \wp(u-\varpi) - \wp\varpi;$$

dabei ist $\wp\varpi$ die Wurzel einer Gleichung 3^{ten} Grades, nämlich der Gleichung

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0.$$

In diesem Falle ist also die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen gleich 3; die zugehörigen Werthe von ϖ sind:

$$\varpi = \omega,\quad \varpi = \omega',\quad \varpi = \omega + \omega'.$$

Es sei ferner n eine von 2 verschiedene Primzahl, also von der Form $2m + 1$, dann ist nach den Angaben in § 3

$$G_1 = \wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right) + \wp\left(\frac{4\varpi}{n}\right) + \cdots + \wp\left(\frac{2m\varpi}{n}\right)$$

die Wurzel einer Resolvente $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades. Dasselbe gilt von $G_2, G_3, \ldots G_m$; man braucht aber nur *eine* dieser Resolventen aufzustellen und zu lösen, weil, wie sich später ergeben wird, $G_2, G_3, \ldots G_m$ rationale Functionen von G_1 sind. Die $n + 1$ verschiedenen Werthe, welche ϖ dabei haben darf, sind z. B.*)

$$\omega,\ \omega',\ \omega + \omega',\ 2\omega + \omega',\ \ldots,\ (n-1)\,\omega + \omega'.$$

Im allgemeinen Falle gilt der folgende Satz:

VII. *Ist n eine beliebige ganze Zahl von der Form*

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so ist die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades höchstens gleich

$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\cdots$$

Zum Beweise dieses Satzes beachte man, dass

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n} + 2\alpha(\lambda\omega + \mu\omega')\right) = \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$$

ist, wobei λ und μ beliebige ganze Zahlen sind, folglich ändern sich $\bar{\sigma}u$ und $\bar{\wp}u$ gar nicht, wenn man bei ihrer Bildung, wie sie durch die Gleichungen (14), (17a), (17b) dargestellt ist, in

$$\varpi = p\omega + q\omega'$$

die Zahlen p und q bez. mit den Zahlen $p + n\lambda = p_1$, $q + n\mu = q_1$ vertauscht. Dann werden allerdings die Zahlen p und q möglicher Weise einen gemeinsamen Factor haben, dagegen werden sie niemals *beide* denselben Factor mit n gemeinsam haben. Setzt man nun

---

*) Man darf natürlich zu 2ϖ das n-fache einer beliebigen Periode addiren.

$$w_1 = \frac{2p_1\omega + 2q_1\omega'}{n},$$

so ist $\bar{\wp} u$ eine symmetrische Function der Grössen

$$\wp(w_1),\ \wp(2w_1),\ \ldots\ \wp((n-1)w_1)$$

und wird sich gar nicht ändern, wenn man w_1 mit rw_1 vertauscht, wenn nur r zu n relativ prim ist, denn die Zahlen

$$r,\ 2r,\ 3r,\ \ldots\ (n-1)r$$

geben modulo n die Reste

$$1, 2, 3, \ldots n-1,$$

nur in anderer Ordnung. Es liefern daher je zwei Grössen w_1 und w_2 dieselbe Transformation, wenn

$$w_2 = rw_1 + 2\lambda\omega + 2\mu\omega'$$

und r relativ prim zu n ist, so dass die Anzahl der Werthe von r gleich $\varphi(n)$ ist. Die Anzahl *aller* Grössen w_1, welche modulo 2ω, $2\omega'$ *nicht* congruent sind, ist aber nach den Untersuchungen des ersten Abschnitts gleich $\varphi(n)\ T(n)$, folglich kann die Anzahl der von einander verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades höchstens gleich $T(n)$ sein.

In Uebereinstimmung hiermit wird später der Satz bewiesen werden, dass *die Grössen, welche bei der Transformation n^{ten} Grades auftreten, sämmtlich rationale Functionen von einer Grösse sind, welche von einer Resolvente $T(n)^{\text{ten}}$ Grades abhängt.*

§ 6.

Einführung der Hülfsgrösse $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$.

Es liegt nahe, bei der Transformation der elliptischen Functionen die in dem vorhergehenden Paragraphen charakterisirte Grösse B_1 (resp. G_1) als Hülfsgrösse einzuführen, durch welche die anderen bei der Transformation auftretenden Grössen, nämlich $G_2, G_3, \ldots G_m$ und die Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\bar{\wp} u$, sich *rational* ausdrücken lassen. Dies ist auch in der That die Absicht von Herrn Weierstrass gewesen (vergl. F. Müller, de transformatione functionum ellipticarum. Berlin 1867). Die Resolvente, deren Wurzel B_1 (resp. G_1) ist, wird aber nicht einfach genug, weshalb es nützlich erscheint, noch andere Hülfsgrössen aufzusuchen. Es sei nun, gleichviel ob $n = 2m+1$ oder $n = 2m+2$ ist,

$$D = \prod_{\alpha=1}^{m}\prod_{\beta=1}^{m}{}' \left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)\right], \tag{22}$$

wo der Strich bei dem Productzeichen Π andeuten möge, dass β nur die von α verschiedenen Werthe zwischen 1 und m annimmt; dann ist D die Discriminante der Gleichung

$$(23)\quad P(s)=\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp u-\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]=s^m-G_1s^{m-1}+G_2s^{m-2}-\cdots\pm G_m=0.$$

Setzt man nun der Kürze wegen*)

$$(24)\qquad \sigma_{\alpha p,\alpha q}=-e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2\bar\eta\bar\omega}\sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right),$$

so wird

$$(25)\qquad \sigma_{-\alpha p,-\alpha q}=-\sigma_{+\alpha p,+\alpha q};\ \sigma_{(\alpha+rn)p,(\alpha+rn)q}=(-1)^r\sigma_{\alpha p,\alpha q};$$
$$\sigma_{(n-\alpha)p,(n-\alpha)q}=\sigma_{\alpha p,\alpha q}.$$

Aus der Gleichung

$$\wp u-\wp v=\frac{\sigma(v-u)\,\sigma(v+u)}{\sigma^2u\,\sigma^2v}$$

folgt daher

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)=\frac{\sigma\left(\frac{2(\beta-\alpha)\varpi}{n}\right)\sigma\left(\frac{2(\beta+\alpha)\varpi}{n}\right)}{\sigma^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\sigma^2\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)},$$

oder

$$(26)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)=\frac{\sigma_{(\beta-\alpha)p,(\beta-\alpha)q}\,\sigma_{(\beta+\alpha)p,(\beta+\alpha)q}}{\sigma^2_{\alpha p,\alpha q}\,\sigma^2_{\beta p,\beta q}}.$$

Ist jetzt n *ungerade*, also $n=2m+1$, so wird deshalb

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}\prod_{\beta=1}^{m}{}'\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)\right]&=\frac{(-1)^{\alpha-1}\prod\limits_{\beta=1}^{m}\sigma^2_{\beta p,\beta q}}{\sigma_{2\alpha p,2\alpha q}\,\sigma^{2m-3}_{\alpha p,\alpha q}\prod\limits_{\beta=1}^{m}\sigma^2_{\beta p,\beta q}}\\&=\frac{(-1)^{\alpha-1}}{\sigma_{2\alpha p,2\alpha q}\,\sigma^{2m-3}_{\alpha p,\alpha q}},\end{aligned}\right.$$

wobei also β auf der *linken* Seite der Gleichung nur die Werthe

---

*) Herr Klein hat in seiner bereits oben citirten Abhandlung die Bezeichnungen

$$\sigma_{\lambda,\mu}(u\,|\,\omega,\omega')=e^{\frac{2\lambda\eta+2\mu\eta'}{n}\left(u-\frac{\lambda\omega+\mu\omega'}{n}\right)}\sigma\left(u-\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\,\Big|\,\omega,\omega'\right),$$

$$\sigma_{\lambda,\mu}=-e^{-\frac{2(\lambda\eta+\mu\eta')(\lambda\omega+\mu\omega')}{n^2}}\sigma\left(\frac{2\lambda\omega+2\mu\omega'}{n}\,\Big|\,\omega,\omega'\right)$$

eingeführt, denen die hier benutzten Ausdrücke entsprechen.

$$1, 2, \ldots a-1,\ a+1, \ldots m$$

annimmt. Da nun noch

$$(28)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{2\alpha p, 2\alpha q} = \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q}$$

wird, so folgt aus Gleichung (27)

$$(29)\qquad D = \prod_{\alpha=1}^{m} \prod_{\beta=1}^{m}{}' \left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q}^{2m-2}}.$$

Setzt man also

$$(30)\qquad f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q},$$

so wird

$$(31)\qquad D = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} f^{-2m+2} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} f^{-n+3}.$$

Diese Grösse f ist genau dieselbe, welche ich in Abh. 1 als Hülfsgrösse in die Transformationstheorie der elliptischen Functionen eingeführt habe. Schon aus ihrer Beziehung zur Discriminante der Gleichung $P(s) = 0$ kann man schliessen, dass sie zweckmässig gewählt ist.

Man kann jetzt noch die Beschränkung aufheben, dass n *ungerade* ist. Es war nämlich für *ungerade* Werthe von n

$$f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p, \alpha q};$$

deshalb ist nach den Relationen (25) auch

$$f = (-1)^m \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{(n-\alpha)p,\ (n-\alpha)q}.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$(32)\qquad f^2\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = f^2 = (-1)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \sigma_{\alpha p, \alpha q}.$$

Durch diese Gleichung sei f^2 jetzt auch für *gerade* Werthe von n definirt.

§ 7.

Verschiedene Darstellungen der Grösse f.

I. Es sei

$$(33)\qquad h = e^{\frac{\varpi' \pi i}{\varpi}},\quad z = e^{\frac{u\pi i}{2\varpi}},\quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}},$$

dann wird bekanntlich

$$e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma u = \frac{2\varpi}{\pi} \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1 - h^{2\nu} z^2}{1 - h^{2\nu}} \cdot \frac{1 - h^{2\nu} z^{-2}}{1 - h^{2\nu}} \right),$$

also

$$-\sigma_{\alpha p, \alpha q} = e^{-2\left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 \eta \varpi} \sigma\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{2\varpi}{\pi} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{n}\right) \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1-h^{2\nu} \varepsilon^{\alpha}}{1-h^{2\nu}} \cdot \frac{1-h^{2\nu} \varepsilon^{-\alpha}}{1-h^{2\nu}} \right),$$

folglich ist für jeden positiven ganzzahligen Werth von n

$$(34) \qquad f^2 = (-1)^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \sigma_{\alpha p . \alpha q} = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{n-1} n \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1 - h^{2n\nu})^2}{(1 - h^{2\nu})^{2n}} . \text{*)}$$

Für *ungerade* Werthe von n war f selbst durch die Gleichung (30) definirt, aus der man in Uebereinstimmung mit Gleichung (34)

$$(35) \qquad f = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{n} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2n\nu}}{(1 - h^{2\nu})^n}$$

findet. Man kann auch diese Darstellung ohne Weiteres auf *gerade* Werthe von n übertragen, wenn man eine Festsetzung über das Vorzeichen von $\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ trifft. Dieses Vorzeichen soll stets so bestimmt werden, dass der reelle Theil von $\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ *positiv* ist. In dem Falle, wo der reelle Theil gleich 0 ist, möge der Factor von i positiv genommen werden.

Nach dieser Festsetzung sei die Grösse f durch die Gleichung (35) ebenso für *gerade wie für ungerade* Werthe von n definirt.

II. Setzt man jetzt

$$(36) \qquad g_2^3 - 27 g_3^2 = \Delta(\varpi, \varpi') = \Delta,$$

so ist

---

*) Hierbei ist die bekannte Relation

$$2^{n-1} \prod_{\alpha=1}^{n-1} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{n}\right) = n$$

verwendet. Eine ausführlichere Herleitung der Gleichung (34) findet sich in Abh. 1, § 2. Unter h und z versteht man gewöhnlich die Grössen $e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ und $e^{\frac{u \pi i}{2\omega}}$, so dass bei dieser Untersuchung h und z eine umfassendere Bedeutung haben.

$$(37)\qquad \Delta^{\frac{1}{24}} = \Delta^{\frac{1}{24}}(\varpi, \varpi') = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}),^{*)}$$

wobei $\left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ das vorhin angegebene Vorzeichen besitzt. Aus Gleichung (35) folgt dann also

$$(38)\qquad f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right) = f = \frac{\Delta^{\frac{1}{24}}\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{\Delta^{\frac{n}{24}}(\varpi, \varpi')}.$$

Da die 24te Wurzel aus $\Delta(\varpi, \varpi')$ eine grosse Rolle spielt, so möge dafür ein besonderes Zeichen Q eingeführt werden; es sei also

$$(39)\qquad Q = Q(\varpi, \varpi') = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) = \Delta^{\frac{1}{24}}(\varpi, \varpi').$$

Dadurch geht die Gleichung (38) über in

$$(38\text{a})\qquad f = \frac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^{n}(\varpi, \varpi')}.$$

Bei dieser Darstellung von f, die also für *jeden* Werth von n gilt, sei noch einmal auf Gleichung (31) verwiesen, (welche allerdings nur für *ungerade* Werthe von n hergeleitet wurde und) welche jetzt die Form

$$(40)\qquad D = (-1)^{\frac{(n-1)(n-3)}{8}} \frac{Q^{n(n-3)}(\varpi, \varpi')}{Q^{n-3}\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}$$

annimmt. Dabei ist D die Discriminante von

$$P(s) = s^m - G_1 s^{m-1} + G_2 s^{m-2} - \cdots \pm G_m = 0,$$

während $Q^{24}(\varpi, \varpi')$ und $Q^{24}\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ bez. die Discriminanten der Gleichungen

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 0 \quad \text{und} \quad 4\bar{\wp}^3 - \bar{g}_2\bar{\wp} - \bar{g}_3 = 0$$

sind.

III. Nach Gleichung (26) war

$$(41)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\beta\varpi}{n}\right) = \frac{\sigma_{(\beta-\alpha)p,\,(\beta-\alpha)q}\;\sigma_{(\beta+\alpha)p,\,(\beta+\alpha)q}}{\sigma^2_{\alpha p,\,\alpha q}\;\sigma^2_{\beta p,\,\beta q}}.$$

*) Herr H. A. Schwarz bezeichnet in seiner oben citirten Formelsammlung die Grösse $g_2^3 - 27g_3^2$ mit $16G$. Von dieser Bezeichnung konnte ich keinen Gebrauch machen, weil hier fortgesetzt die 24te Wurzel aus $g_2^3 - 27g_3^2$ vorkommt, wobei der Factor $\sqrt[6]{2}$ sehr lästig sein würde.

Setzt man in dieser Gleichung $\beta = 2\alpha$, so wird

$$(42)\qquad \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{\sigma_{3\alpha p,\,3\alpha q}}{\sigma_{\alpha p,\,\alpha q}\,\sigma^2_{2\alpha p,\,2\alpha q}}.$$

Hat nun $n = 2m + 1$ die Form $6l \pm 1$, so ist wegen der Relationen (25)

$$(43)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{2\alpha p,\,2\alpha q} = \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p,\,\alpha q} \quad \text{und} \quad \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{3\alpha p,\,3\alpha q} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p,\,\alpha q},$$

folglich wird

$$(44)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^l}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \sigma^2_{\alpha p,\,\alpha q}} = (-1)^l f^{-2}.$$

Von dieser Darstellung der Grösse f war ich in Abh. 1 ausgegangen.

Setzt man in Gleichung (41) $\beta = 3\alpha$, so wird

$$\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{6\alpha\varpi}{n}\right) = \frac{\sigma_{2\alpha p,\,2\alpha q}\,\sigma_{4\alpha p,\,4\alpha q}}{\sigma^2_{\alpha p,\,\alpha q}\,\sigma^2_{3\alpha p,\,3\alpha q}}.$$

Da nun

$$\prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{4\alpha p,\,4\alpha q} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \prod_{\alpha=1}^{m} \sigma_{\alpha p,\,\alpha q}$$

ist, so wird

$$(45)\qquad \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{6\alpha\varpi}{n}\right)\right] = \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{\prod\limits_{\alpha=1}^{m} \sigma^2_{\alpha p,\,\alpha q}} = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} f^{-2}.$$

In dieser Weise kann man fortfahren, indem man nach einander $\beta = 4\alpha,\ 5\alpha, \ldots$ setzt und $\prod\limits_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\varkappa\varpi}{n}\right)\right]$ bildet. Diese Producte werden allerdings nur gleich $\pm f^{-2}$, wenn die Zahlen $\varkappa - 1$, $\varkappa$, $\varkappa + 1$ zu n relativ prim sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so erhält man Grössen, welche von $\pm f^2$ verschieden sind, auf welche ich aber schon jetzt die Aufmerksamkeit lenken möchte, weil sie gleichfalls bei der Transformation der elliptischen Functionen noch nützliche Verwendung finden sollen. Auch die Ausdrücke von der Form

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varkappa\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\lambda\varpi}{n}\right)\right]$$

sind zu beachten.

IV. Aus der Gleichung

$$\wp' u\, \wp' v = [\wp(v-u) - \wp(v+u)]\,(\wp u - \wp v)^2$$

folgt

$$\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\wp'\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)=\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{6\alpha\varpi}{n}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)\right]^2.$$

Deshalb ist nach den Gleichungen (44) und (45), (die aber nur für $n=6l\pm1$ gelten),

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\wp'\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}f^{-6},$$

da ferner

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right),$$

so wird

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=f^{-6}$$

und

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=(-1)^m f^{-3}. \tag{46}$$

Die Bestimmung des Zeichens ergiebt sich leicht aus dem speciellen Falle, wo ϖ reell und $\varpi'=i\varpi$ ist; dann sind nämlich die Grössen $\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ sämmtlich negativ, während f positiv ist.*)

V. Aus den Gleichungen (44) und (46) findet man schliesslich

$$f=(-1)^{l+m}\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)}, \tag{47}$$

eine Formel, welche zeigt, dass f eine *rationale* Function der Grössen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$, also auch der Grössen $\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$ ist.

---

*) Ich habe hier diejenige Herleitung der Gleichung (46) benutzt, welche mir seit beinahe 7 Jahren bekannt ist. Inzwischen hat aber Herr Klein in seiner oben citirten Abhandlung die folgende einfachere Entwickelung dieser Formel mitgetheilt. Es ist

$$\wp' u=-\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4 u},$$

also

$$\wp'\left(u-\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=-\frac{\sigma_{2\alpha p,\,2\alpha q}(2u)}{\sigma^4_{\alpha p,\,\alpha q}(u)},$$

folglich wird

$$-\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=\frac{\sigma_{2\alpha p,\,2\alpha q}}{\sigma^4_{\alpha p,\,\alpha q}},\quad \prod_{\alpha=1}^{m}\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)=\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{1}{\sigma^3_{\alpha p,\,\alpha q}}=(-1)^m f^{-3}.$$

Die Formel (46) gilt also immer, wenn $n=2m+1$ ist.

§ 8.

Herleitung einer fundamentalen partiellen Differentialgleichung.

Die Grösse f oder $f\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)$ ist nur deshalb als Hülfsgrösse bei der Transformation der elliptischen Functionen verwendbar, weil sich alle übrigen Grössen, welche man bei der Darstellung von $\bar{\wp}\bar{u}$ braucht, als *rationale* Functionen von f ausdrücken lassen. Zu diesem Zwecke muss zunächst eine partielle Differentialgleichung hergeleitet werden, aus der dann die vollständige Darstellung jener Grössen folgt.

Es sei nun (vergl. die Formelsammlung von Herrn Schwarz, S. 41, Gl. (7))

$$(48)\qquad \vartheta_1 = \vartheta_1(v \mid \tau) = 2\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda h^{\frac{(2\lambda+1)^2}{4}} \sin(2\lambda+1)v\pi,$$

wo

$$v = \frac{u}{2\varpi}, \quad \tau = \frac{\varpi'}{\varpi}, \quad h = e^{\tau\pi i}$$

sein möge. Aus dieser Definition folgt unmittelbar die partielle Differentialgleichung

$$(49)\qquad 4\pi i\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial v^2},$$

oder, wenn man die drei Grössen u, ϖ, ϖ' als die unabhängigen Veränderlichen ansieht,

$$(50)\qquad \pi i\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varpi'} = \varpi\,\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial u^2},$$

eine Gleichung, der noch die Homogeneitätsbedingung

$$(51)\qquad \varpi\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varpi} + \varpi'\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varpi'} + u\,\frac{\partial\vartheta_1}{\partial u} = 0$$

hinzuzufügen ist. Durch Transformation n^{ten} Grades treten $\bar{\vartheta}_1$, $\bar{\sigma}u$, $\bar{Q}$, $\frac{\varpi}{n}$, h^n, $\bar{\bar{\eta}}$ an die Stelle von ϑ_1, σu, Q, ϖ, h, $\bar{\eta}$, und die Gleichung (50) geht für jedes beliebige n über in

$$(52)\qquad n\pi i\,\frac{\partial\bar{\vartheta}_1}{\partial\varpi'} = \varpi\,\frac{\partial^2\bar{\vartheta}_1}{\partial u^2}.$$

Nun ist aber

$$\vartheta_1 = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} Q^3 e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\varpi}}\sigma u, \qquad \bar{\vartheta}_1 = \left(\frac{\varpi}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{Q}^3 e^{-\frac{n\bar{\bar{\eta}}u^2}{2\varpi}}\bar{\sigma}u,$$

wobei, wie aus den Gleichungen (16a) und (16b) folgt,

$$(53)\qquad n\left(\bar{\bar{\eta}} - \bar{\eta}\right) = B_1\varpi'$$

ist. Wenn man also die Function S durch die Gleichung

$$(54)\qquad S = f^3 e^{-\frac{1}{2}B_1 u^2} \frac{\bar{\sigma} u}{\sigma^n u}$$

definirt und in die vorhergehenden Gleichungen einführt, so wird durch passende Anwendung der Gleichungen (50) und (52)

$$(55)\qquad \bar{\vartheta}_1 = \left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1^n}{\sqrt{n}} S$$

und

$$n\pi i\,\vartheta_1^2 \frac{\partial S}{\partial \varpi'} = \varpi \Big[n(n-1) S \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial u}\right)^2 + 2n\vartheta_1 \frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{\partial \vartheta_1}{\partial u}$$
$$- n(n-1)\vartheta_1 S \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u^2} + \vartheta_1^2 \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}\Big],$$

oder

$$(56)\qquad \frac{n\pi i}{\varpi}\,\frac{\partial S}{\partial \varpi'} = 2n \frac{\partial S}{\partial u}\,\frac{\partial \lg \vartheta_1}{\partial u} - n(n-1) S \frac{\partial^2 \lg \vartheta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}.$$

Nun folgt aber aus

$$\vartheta_1 = \left(\frac{\varpi}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} Q^3 e^{-\frac{\tilde{\eta} u^2}{2\varpi}} \sigma u$$

$$\frac{\partial \lg \vartheta_1}{\partial u} = -\frac{\tilde{\eta} u}{\varpi} + \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \qquad \frac{\partial^2 \lg \vartheta_1}{\partial u^2} = -\frac{\tilde{\eta}}{\varpi} - \wp u,$$

so dass Gleichung (56) übergeht in

$$(57)\quad \frac{n\pi i}{\varpi}\,\frac{\partial S}{\partial \varpi'} = \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} + 2n\frac{\partial S}{\partial u}\left(-\frac{\tilde{\eta} u}{\varpi} + \frac{\sigma' u}{\sigma u}\right) + n(n-1) S\left(\frac{\tilde{\eta}}{\varpi} + \wp u\right).$$

S ist hierbei als eine Function von u, ϖ, ϖ' betrachtet, man kann aber auch S als eine Function von $\wp u = s$, g_2 und g_3 ansehen. Die Formeln, welche man bei dem Uebergange von der einen Auffassung zu der anderen braucht, findet man in der Abhandlung der Herren Frobenius und Stickelberger: „*Ueber die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*" (Journal für Mathematik, Bd. 92, S. 311—327). Dieser Arbeit entnehme ich die Gleichungen

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial \varpi'} = \dfrac{2\varpi}{\pi i}\left(2s^2 - \dfrac{1}{3} g_2 + s' \dfrac{\sigma' u}{\sigma u}\right) - \dfrac{2\tilde{\eta}}{\pi i}(2s - us'), \\[2ex] \dfrac{\partial g_2}{\partial \varpi'} = -\dfrac{8\tilde{\eta}}{\pi i} g_2 + \dfrac{12\varpi}{\pi i} g_3, \quad \dfrac{\partial g_3}{\partial \varpi'} = -\dfrac{12\tilde{\eta}}{\pi i} g_3 + \dfrac{2\varpi}{3\pi i} g_2^2, \end{cases}$$

wobei also s statt $\wp u$ und s' statt $\wp' u$ geschrieben ist. Dadurch erhält man

$$(59)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \varpi'} = \dfrac{\partial S}{\partial s}\,\dfrac{\partial s}{\partial \varpi'} + \dfrac{\partial S}{\partial g_2}\,\dfrac{\partial g_2}{\partial \varpi'} + \dfrac{\partial S}{\partial g_3}\,\dfrac{\partial g_3}{\partial \varpi'} \\[2ex] \quad = \dfrac{2\varpi}{\pi i}\left[\dfrac{\partial S}{\partial s}\left(2s^2 - \dfrac{1}{3} g_2 + s' \dfrac{\sigma' u}{\sigma u}\right) + 6 g_3 \dfrac{\partial S}{\partial g_2} + \dfrac{1}{3} g_2^2 \dfrac{\partial S}{\partial g_3}\right] \\[2ex] \quad - \dfrac{2\tilde{\eta}}{\pi i}\left[\dfrac{\partial S}{\partial s}(2s - us') + 4 g_2 \dfrac{\partial S}{\partial g_2} + 6 g_3 \dfrac{\partial S}{\partial g_3}\right]. \end{cases}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial s} s', \quad \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} s'^2 + \frac{\partial S}{\partial s}\left(6s^2 - \frac{1}{2} g_2\right).$$

Wenn man ausser diesen Relationen berücksichtigt, dass S in Bezug auf die Veränderlichen s, g_2, g_3 in dem Sinne als eine homogene Function vom Grade $-\frac{n-1}{4}$ angesehen werden kann, dass s von der ersten, g_2 von der zweiten, g_3 von der dritten Dimension ist, so findet man

$$(60) \qquad s\frac{\partial S}{\partial s} + 2g_2\frac{\partial S}{\partial g_2} + 3g_3\frac{\partial S}{\partial g_3} + \frac{n-1}{4} S = 0.$$

Durch diese Relationen geht Gleichung (57) über in

$$(61) \quad \begin{cases} s'^2 \frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + \left[(6-4n)s^2 - \frac{1}{6}(3-4n)\, g_2\right]\frac{\partial S}{\partial s} - 12\, n g_3 \frac{\partial S}{\partial g_2} \\ \qquad - \frac{2n}{3} g_2^2 \frac{\partial S}{\partial g_3} + n(n-1)\, sS = 0. \end{cases}$$

Diese Differentialgleichung kann noch etwas einfacher geschrieben werden, wenn man eine von den Herren Frobenius und Stickelberger (in der oben citirten Abhandlung) eingeführte Bezeichnung benutzt. Es sei nämlich D das durch die Gleichung

$$(62) \qquad D(\varphi) = 18g_3\frac{\partial \varphi}{\partial g_2} + g_2^2\frac{\partial \varphi}{\partial g_3}$$

definirte Operationssymbol; dann erhält man aus Gleichung (61)

$$(61\text{a}) \quad \begin{cases} 6(4s^3 - g_2 s - g_3)\frac{\partial^2 S}{\partial s^2} + [12(3-2n)s^2 - (3-4n)g_2]\frac{\partial S}{\partial s} \\ \qquad - 4nD(S) + 6n(n-1)\, sS = 0. \end{cases}$$

In etwas anderer Form findet sich diese fundamentale Differentialgleichung bereits in meiner zweiten Abhandlung über die Transformation der elliptischen Functionen (S. 209, Gl. (15)). Dort ist aber die Function S durch eine Function

$$L = Q^{n-1} S$$

ersetzt, welche in dem oben angedeuteten Sinne in Bezug auf s, g_2, g_3 eine homogene Function 0ter Ordnung ist. Dem entsprechend sind dort auch die Grössen q, γ_2, γ_3 durch die Gleichungen

$$s = Q^4 q, \quad g_2 = Q^8\gamma_2, \quad g_3 = Q^{12}\gamma_3, \quad \gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 = 1$$

eingeführt, damit die vorkommenden Grössen sämmtlich von der 0ten Ordnung sind, so dass man es thatsächlich nur mit *zwei* Veränderlichen q und γ_2 zu thun hat. Diese Modification ist aber deshalb eine unwesentliche, weil

$$(63) \qquad D(\Delta) = D(Q^{24}) = D(g_2^3 - 27g_3^2) = 0,$$

so dass bei Benutzung des Operationssymbols D die Grösse Q wie eine Constante behandelt werden darf.

Ist ferner F eine homogene Function 0^{ter} Ordnung von g_2 und g_3, so findet man ausserdem

$$(64)\qquad D(F) = 18\gamma_3 Q^4 \frac{dF}{d\gamma_2} = \gamma_2{}^2 Q^4 \frac{dF}{d\gamma_3}.$$

Wenn man also die Gleichung (61a) mit Q^{n-5} multiplicirt, so geht sie in die Form über, welche ich in Abh. 2 mitgetheilt habe, nämlich in

$$(61\,\text{b})\left\{\begin{aligned} &6(4q^3-\gamma_2 q-\gamma_3)\frac{\partial^2 L}{\partial q^2} + [12(3-2n)q^2 - (3-4n)\gamma_2]\frac{\partial L}{\partial q} \\ &\qquad\qquad - 72n\gamma_3 \frac{\partial L}{\partial \gamma_2} + 6n(n-1)\,qL = 0. \end{aligned}\right.$$

Nachher haben auch die Herren Frobenius und Stickelberger am Schluss ihrer oben citirten Abhandlung die entsprechende Differentialgleichung für die Function $B = f^{-3}S$ angegeben und schliesslich hat auch Herr Klein neuerdings (vergl. die wiederholt genannte Abhandlung) gefunden, dass seine Function $\varrho = \frac{X_\alpha(u)}{\sigma^n u}$, welche für $\alpha = 0$, $p = 1$, $q = 0$, $p' = 0$, $q' = 1$ gleich S wird, auch dann noch der Gleichung (61) genügt, wenn α einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ hat. Dabei beschränkt sich aber Herr Klein auf den Fall, wo n *ungerade* ist. Im Uebrigen ist die Function ϱ nur scheinbar allgemeiner als S, weil S eine Function der Grösse ϖ ist, welche noch die beiden beliebigen Zahlen p und q enthält, während bei den Herren Frobenius, Stickelberger und Klein nur der Fall $\varpi = \omega$, $\varpi' = \omega'$ in Frage kommt.

§ 9.

Darstellung der Grössen $G_1, G_2, \ldots G_m$ als rationale Functionen von f.

Die Gleichung (61a) gilt für alle Werthe von s; daher müssen in der Entwickelung nach Potenzen von s die einzelnen Coefficienten gleich Null sein.

Unterscheidet man zunächst zwei Fälle, je nachdem n *ungerade oder gerade* ist, so wird nach Gleichung (17a) für $n = 2m + 1$

$$(64)\qquad S = f^3(s^m - G_1 s^{m-1} + \cdots \pm G_m) = \sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^\alpha f^3 G_\alpha s^{m-\alpha}.$$

Hierbei ist natürlich $G_0 = 1$, während die Grössen G, welche in den folgenden Formeln mit negativem Index auftreten, gleich Null zu setzen sind. Indem man diese Entwickelung von S in die Gleichung

(61 a) einführt und den Coefficienten von $(-1)^\alpha s^{m-\alpha+1}$ gleich Null setzt, erhält man

$$(65)\quad \begin{cases} 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha + 8nD(G_{\alpha-1}) + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)g_2 G_{\alpha-2} \\ \qquad + 3(n-2\alpha+5)g_3 G_{\alpha-3}] + 24nG_{\alpha-1}D(\lg f) = 0. \end{cases}$$

Für $\alpha = 1$ ergiebt sich hieraus

$$(66)\qquad 3G_1 + nD(\lg f) = 0,$$

und wenn man dies in die vorige Gleichung einsetzt,

$$(65\text{a})\quad \begin{cases} 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha - 72G_1 G_{\alpha-1} + 8nD(G_{\alpha-1}) \\ + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)g_2 G_{\alpha-2} + 3(n-2\alpha+5)g_3 G_{\alpha-3}] = 0. \end{cases}$$

So findet man für $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$ bez. die Gleichungen

$$(67)\quad \begin{cases} 240G_2 - 72G_1^2 + 8nD(G_1) + (n-1)(n+6)g_2 = 0, \\ 504G_3 - 72G_1G_2 + 8nD(G_2) + (n-3)[(n+12)g_2G_1 \\ \qquad\qquad + 3(n-1)g_3] = 0, \\ 864G_4 - 72G_1G_3 + 8nD(G_3) + (n-5)[(n+18)g_2G_2 \\ \qquad\qquad + 3(n-3)g_3G_1] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Für $n = 2m + 2$ wird nach Gleichung (17b)

$$(68)\qquad S = f^3\sqrt{s-e_\lambda}\,(s^m - G_1 s^{m-1} + \cdots \pm G_m)$$
$$= \sqrt{s-e_\lambda}\sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^\alpha f^3 G_\alpha s^{m-\alpha}.$$

Wenn man diesen Ausdruck in die Gleichung (61 a) einsetzt, so hat man zu beachten, dass wegen der Gleichung $4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda - g_3 = 0$

$$(69)\qquad D(e_\lambda) = \frac{18g_3e_\lambda + g_2^2}{12e_\lambda^2 - g_2} = 6e_\lambda^2 - g_2$$

wird. Indem man dann die Gleichung (61 a) mit $4(s-e_\lambda)^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, nach Potenzen von s entwickelt und den Coefficienten von $-s^{m+2}$ gleich Null setzt, erhält man zunächst

$$(70)\qquad 3(2G_1 + e_\lambda) + 2nD(\lg f) = 0.$$

Setzt man jetzt den Coefficienten von $(-1)^\alpha s^{m-\alpha+3}$ gleich Null, so wird mit Rücksicht auf Gleichung (70)

$$(71)\quad \begin{cases} 24\alpha(2\alpha+1)G_\alpha+24[-3G_1+4\alpha(\alpha-1)e_\lambda]G_{\alpha-1} \\ \quad +[-144e_\lambda G_1+24(n+2\alpha^2-5\alpha)e_\lambda^2+(n^2+4\alpha n-12\alpha^2-7n \\ \qquad\qquad +30\alpha-18)g_2]G_{\alpha-2} \\ \quad +[-72e_\lambda^2G_1+2(n^2+4\alpha n-12\alpha^2-5n+48\alpha-54)g_2e_\lambda \\ \qquad\qquad +3(n^2-4\alpha n+4\alpha^2+10n-16\alpha+12)g_3]G_{\alpha-3} \\ \quad +(n-2\alpha+6)\{[(n+6\alpha-15)g_2e_\lambda^2+6(n-2\alpha+5)g_3e_\lambda]G_{\alpha-4} \\ \qquad\qquad +3(n-2\alpha+8)g_3e_\lambda^2G_{\alpha-5}\} \\ \quad +8n[(D(G_{\alpha-1})+2e_\lambda D(G_{\alpha-2})+e_\lambda^2D(G_{\alpha-3})]=0. \end{cases}$$

Hieraus findet man für $\alpha=2,3,4,\ldots$

$$(72)\quad \begin{cases} 240G_2-72G_1^2+48e_\lambda G_1+8nD(G_1) \\ \qquad\qquad +(n-2)[24e_\lambda^2+(n+3)g_2]=0, \\ 504G_3-72G_1G_2+96e_\lambda G_2+8nD(G_2) \\ \qquad\qquad +(n-4[24e_\lambda^2G_1+(n+9)g_2G_1+3(n-2)g_3]=0, \\ 864G_4-72G_1G_3+144e_\lambda G_3+8nD(G_3) \\ \qquad\qquad +(n-6)[24e_\lambda^2G_2+(n+15)g_2G_2+3(n-4)g_3G_1]=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Man kann aber auch beide Fälle vereinigen, indem man

$$(73)\qquad S^2=f^6(s^{n-1}-B_1s^{n-2}+B_2s^{n-3}-\cdots\pm B_{n-1})$$

setzt, wobei also für $n=2m+1$

$$B_1=2G_1,\quad B_2=2G_2+G_1^2,\quad B_3=2G_3+2G_1G_2,\ldots$$

wird, während für $n=2m+2$

$$B_1=2G_1+e_\lambda,\quad B_2=2G_2+G_1^2+2e_\lambda G_1,$$
$$B_3=2G_3+2G_1G_2+e_\lambda(2G_2+G_1^2),\ldots$$

ist. Dadurch gehen die Gleichungen (66), (67) und ebenso die Gleichungen (70), (72) über in

$$(74)\quad \begin{cases} 3B_1+2nD(\lg f)=0, \\ 120B_2-48B_1^2+4nD(B_1)+(n-1)(n+6)g_2=0, \\ 252B_3-84B_1B_2+12B_1^3+4nD(B_2)+(n^2+7n-21)g_2B_1 \\ \qquad\qquad +3(n^2-4n+3)g_3=0, \\ 432B_4-108B_1B_3-48B_2^2+60B_1^2B_2-12B_1^4+4nD(B_3) \\ \qquad +(n^2+9n-48)g_2B_2+3g_2B_1^2+3(n^2-6n+9)g_3B_1=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Noch einfacher werden diese Differentialgleichungen, wenn man die Grössen $G_1, G_2, \ldots; B_1, B_2, \ldots$, die ja in dem oben angegebenen

Sinne homogene Functionen von g_2 und g_3 sind, durch andere Grössen ersetzt, so dass man es nur mit homogenen Functionen 0^{ten} Grades von g_2 und g_3 zu thun hat; d. h. es werden dann alle Grössen Functionen einer *einzigen* Veränderlichen

$$\gamma_2 = \frac{g_2}{Q^8} \quad \text{oder} \quad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}.$$

Zu diesem Zwecke setze man

$$(75) \qquad Q^{3n-3}f^3 = \left(\frac{\bar{Q}}{Q}\right)^3 = \Gamma, \quad \Gamma G_\alpha = Q^{4\alpha}\Gamma_\alpha$$

und bezeichne der Kürze wegen die Ableitungen nach γ_2 durch Accente. Dadurch gehen z. B. die Gleichungen (66) und (67) über in

$$(76) \quad \begin{cases} \Gamma_1 + 2n\gamma_3\Gamma' = 0, \\ 240\Gamma_2 + 144n\gamma_3\Gamma_1' + (n-1)(n+6)\gamma_2\Gamma = 0, \\ 504\Gamma_3 + 144n\gamma_3\Gamma_2' + (n-3)[(n+12)\gamma_2\Gamma_1 + 3(n-1)\gamma_3\Gamma] = 0, \\ 864\Gamma_4 + 144n\gamma_3\Gamma_3' + (n-5)[(n+18)\gamma_2\Gamma_2 + 3(n-3)\gamma_3\Gamma_1] = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 24\alpha(2\alpha+1)\Gamma_\alpha + 144n\gamma_3\Gamma'_{\alpha-1} + (n-2\alpha+3)[(n+6\alpha-6)\gamma_2\Gamma_{\alpha-2} \\ \qquad\qquad + 3(n-2\alpha+5)\gamma_3\Gamma_{\alpha-3}] = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, welche sich übrigens schon in Abh. 2 finden, besitzen den Vorzug, dass sie *linear* und *homogen* sind in Bezug auf die 4 Grössen Γ_α, $\Gamma'_{\alpha-1}$, $\Gamma_{\alpha-2}$, $\Gamma_{\alpha-3}$. Daraus folgt dann auch, dass Γ_α eine *lineare*, *homogene* Function von $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \dots, \Gamma^{(\alpha)}$ ist. Beachtet man jetzt noch, dass Γ_α gleich Null ist, sobald α grösser wird als m, so liefert die Darstellung von Γ_{m+1} *eine lineare*, *homogene Differentialgleichung* $(m+1)^{ter}$ *Ordnung für die Grösse* Γ.

In den folgenden Abschnitten wird nun noch gezeigt werden, dass immer eine Gleichung zwischen f, g_2 und g_3 besteht, welche hier kurz die *f-Gleichung* genannt werden möge. Aus dieser f-Gleichung findet man also $D(\lg f)$ und somit ist es durch Benutzung der vorstehenden Differentialgleichungen leicht möglich, $G_1, G_2, \dots$ oder $B_1, B_2, \dots$ als *rationale* Functionen von f, g_2 und g_3 darzustellen.

§ 10.

Berechnung der Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function $\wp u$.

Es ist für jeden Werth von n

$$\wp u = u^{-2} + \frac{1}{20} g_2 u^2 + \frac{1}{28} g_3 u^4 + \cdots,$$

$$\bar{\wp} u = u^{-2} + \frac{1}{20} \bar{g}_2 u^2 + \frac{1}{28} \bar{g}_3 u^4 + \cdots.$$

Andererseits ist

$$\bar{\wp} u = \wp u + \sum_{\alpha=1}^{n-1}\left[\wp\left(u - \frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right]$$

$$= u^{-2} + \left[\frac{1}{20}\, g_2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp''\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] u^2$$

$$+ \left[\frac{1}{28}\, g_3 + \frac{1}{24}\sum_{\alpha=1}^{n-1}\wp''''\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right] u^4 + \cdots.$$

Da nun

$$\wp'' u = 6\wp^2 u - \frac{1}{2}\, g_2, \quad \wp'''' u = 120\wp^3 u - 18 g_2 \wp u - 12 g_3$$

ist, so folgt aus den beiden Entwickelungen von $\bar{\wp} u$

$$\bar{g}_2 = \ 60 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - (5n-6)\, g_2,$$

$$\bar{g}_3 = 140 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp^3\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - 21 g_2 \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - (14n-15) g_3;$$

hierbei ist aber

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = B_1, \quad \sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = B_1{}^2 - 2B_2,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} \wp^3\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) = B_1{}^3 - 3B_1B_2 + 3B_3,$$

folglich wird

(77) $\bar{g}_2 = -120 B_2 + 60 B_1{}^2 - (5n-6) g_2,$

(78) $\bar{g}_3 = 420 B_3 - 420 B_1 B_2 + 140 B_1{}^3 - 21 g_2 B_1 - (14n-15) g_3.$

Da in dem vorigen Paragraphen angegeben wurde, wie man die Grössen B_1, B_2, B_3 findet, so folgt jetzt aus den Gleichungen (77) und (78) auch die Berechnung von $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$.

Man kann aber für $\bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$ Formeln geben, welche für die numerische Berechnung noch geeigneter sind. Aus den Gleichungen (74) folgt nämlich

$$3B_1 = nD(\lg f^{-2}) = nf^2 D(f^{-2}).$$

$$3nD(B_1) = -9B_1{}^2 + n^2 f^2 D^2(f^{-2}),$$

also

$$120 B_2 - 60 B_1{}^2 + (n^2+5n-6) g_2 + \frac{4}{3}\, n^2 f^2 D^2(f^{-2}) = 0,$$

oder

(77 a) $$\bar{g}_2 - n^2 g_2 = \frac{4}{3} n^2 f^2 D^2(f^{-2}).$$

Ferner folgt aus Gleichung (77)

$$\frac{n}{9} f^8 D(f^{-8}\bar{g}_2) = 840 B_3 - 840 B_1 B_2 + 280 B_1^3 - 42 g_2 B_1 - (28n - 30) g_3,$$

deshalb geht Gleichung (78) über in

(78 a) $$\bar{g}_3 = \frac{n}{18} f^8 D(f^{-8}\bar{g}_2).$$

Eine andere Form dieser Gleichungen (77 a) und (78 a) findet man, indem man

$$f^{-2} = \frac{Q^{2n}}{\bar{Q}^2} = Q^{2n-2}\xi$$

setzt; dann wird nach Gleichung (64)

$$D(f^{-2}) = 18\gamma_3 \; Q^{2n+2} \frac{d\xi}{d\gamma_2} = 18\gamma_3 Q^{2n+2}\xi',$$

$$D^2(f^{-2}) = 324\gamma_3 Q^{2n+6} \frac{d(\gamma_3\xi')}{d\gamma_2},$$

$$\bar{g}_2 - n^2 g_2 = 432 n^2 \gamma_3 Q^8 \xi^{-1} \frac{d(\gamma_3\xi')}{d\gamma_2},$$

(77 b) $$\bar{\gamma}_2 = n^2 \xi^3 \left(\gamma_2 \xi + 432 \frac{d(\gamma_3\xi')}{d\gamma_2}\right).$$

Ferner ist

$$f^{-8}\bar{g}_2 = Q^{8n}\bar{\gamma}_2, \quad D(f^{-8}\bar{g}_2) = 18\gamma_3 Q^{8n+4}\bar{\gamma}_2',$$

folglich wird

$$\bar{g}_3 = n\gamma_3 \bar{Q}^8 Q^4 \bar{\gamma}_2',$$

oder

(78 b) $$\bar{Q}^4 \bar{\gamma}_3 = n\gamma_3 Q^4 \bar{\gamma}_2'.$$

Wendet man diejenigen Bezeichnungen an, welche Herr Klein (Math. Annalen, Bd. XIV, S. 111—172) benutzt, so hat man zu setzen

$$\gamma_2^3 = J, \quad \gamma_3^2 = J - 1, \quad \bar{\gamma}_2^3 = J', \quad \bar{\gamma}_3^2 = J' - 1, \quad \bar{Q}^2 = n Q^2 M$$

und erhält dadurch aus Gleichung (78 b) die bereits bekannte Differentialgleichung

(79) $$M^2 = \frac{1}{n} \frac{dJ'}{dJ} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}} (J-1)^{\frac{1}{2}}}{J'^{\frac{2}{3}} (J'-1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Abschnitt III.

Verhalten der Grösse $Q(\omega, \omega')$ bei einer linearen Transformation der Perioden.

§ 11.

Feststellung der Aufgabe.

Um die verschiedenen Werthe der Hülfsgrösse $f = \dfrac{Q\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^n(\varpi, \varpi')}$ zu erhalten, welche den $T(n)$ verschiedenen Transformationen n^{ten} Grades entsprechen, ist es nur nöthig, der Grösse 2ϖ alle diejenigen Werthe zu ertheilen, welche nach § 5 die $T(n)$ verschiedenen Transformationen liefern.

Indem man nun beachtet, dass sich

$$Q^{24}(\omega, \omega') = \Delta(\omega, \omega') = g_2^3 - 27 g_3^2$$

gar nicht ändert, wenn man das primitive Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ mit dem äquivalenten Periodenpaar

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega' \qquad (pq' - p'q = +1)$$

vertauscht, findet man, dass

$$(80) \qquad Q(\varpi, \varpi') = \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q(\omega, \omega')$$

sein muss, wobei $\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix}$, oder kürzer ϱ, eine 24^{te} Wurzel der Einheit ist. Diese 24^{te} Wurzel der Einheit bildet ein Analogon zu den 8^{ten} Wurzeln der Einheit, welche bei der linearen Transformation der Θ-Functionen auftreten.

Man kann sie sogar auf die Bestimmung der letzteren zurückführen, indem man die 24^{te} Wurzel aus Δ mit der 8^{ten} Wurzel aus dieser Grösse durch Transformation dritter Ordnung in Verbindung setzt, wie dies bereits Jacobi in seinen Fundamenten gethan hat (s. Band I der ges. Werke, Seite 237).

Wenn ich trotzdem hier noch ausführlich ein Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe angebe, welches dem auf die Θ-Function bezüglichen Hermite'schen nachgebildet ist*), und welches ich bereits vor 5 Jahren den Herren Weierstrass und Klein mitgetheilt habe, so geschieht dies, um das Verständniss der vorliegenden Untersuchungen von dem Studium anderer umfangreicher Abhandlungen unabhängig zu machen, namentlich aber, um die Resultate in derjenigen

*) Liouville's Journal, ser. 2, t. III, p. 26—36.

Form zu gewinnen, in welcher sie später von mir verwendet werden. Vielleicht bieten auch die Betrachtungen, welche zu meinen Resultaten führen, an und für sich einiges Interesse.*)

§ 12.

Definition der Function $\Phi(u)$.

Um das Verfahren von Herrn Hermite nachzubilden, werde eine Function $\Phi(u)$ benutzt, welche durch ihre Eigenschaften den Θ-Functionen sehr nahe steht. Diese Function werde definirt durch die Gleichung

$$(81)\qquad \Phi(u) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right) {}^{**}),$$

welche ich bereits in Abh. 1, Gleichung (27) angegeben habe. Dort findet sich auch schon in Gleichung (31) die Relation

$$(82)\qquad \Phi(u) = \Delta^{\frac{1}{24}} e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u.$$

Hierdurch ist die Beziehung von $\Phi(u)$ zu den Functionen

$$(83)\qquad \begin{cases} \sigma_1 u = e^{-\eta u} \dfrac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega} = e^{+\eta u} \dfrac{\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega}, \\ \sigma_2 u = e^{-\eta'' u} \dfrac{\sigma(\omega''+u)}{\sigma\omega''} = e^{+\eta'' u} \dfrac{\sigma(\omega''-u)}{\sigma\omega''}, \\ \sigma_3 u = e^{-\eta' u} \dfrac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'} = e^{+\eta' u} \dfrac{\sigma(\omega'-u)}{\sigma\omega'} \end{cases}$$

gegeben. Von der Richtigkeit der Relation (82) kann man sich entweder dadurch überzeugen, dass man die Werthe von u aufsucht, für welche $\Phi(u)$ verschwindet, oder man kann auch die drei Gleichungen

$$(84)\qquad \begin{cases} \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{e_2 - e_3}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u \\ \qquad = h^{\frac{1}{4}} (z + z^{-1}) \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})(1 + h^{2\nu} z^2)(1 + h^{2\nu} z^{-2}), \end{cases}$$

*) In der That ist auch von anderer Seite in neuerer Zeit der in Rede stehenden 24ten Einheitswurzel besonderes Interesse zugewandt worden. Herr Weber giebt in seiner oben citirten Abhandlung eine Bestimmung auf rein arithmetischem Wege, während Herr Molien (Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. vom 12. Jan. 1885) die sogenannte Cauchy'sche Methode benutzt. In der Note des Herrn Molien finden sich auch noch weitere Literaturnachweise.

**) h hat hier den üblichen Werth $e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$; dem entsprechend sei in dem Folgenden $z = e^{\frac{u\pi i}{2\omega}}$.

$$(84)\quad \begin{cases} \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{e_1-e_3}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_2 u = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu-1}z^2)(1+h^{2\nu-1}z^{-2}), \\ \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{e_1-e_2}\, e^{-\frac{\eta u^2}{2\omega}} \sigma_3 u = \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1-h^{2\nu-1}z^2)(1-h^{2\nu-1}z^{-2}) \end{cases}$$

mit einander multipliciren. Mit Rücksicht darauf, dass

$$\sqrt{2}\,\sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2} = \Delta^{\frac{1}{8}} = Q^3$$

ist, erhält man dann

$$(85)\qquad 2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} Q^3 e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u$$

$$= h^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^3(1+h^{2\nu}z^2)(1+h^{2\nu}z^{-2})(1-h^{4\nu-2}z^4)(1-h^{4\nu-2}z^{-4}).$$

Dividirt man diese Gleichung durch

$$2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} Q^2 = 2\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{6}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2,$$

so wird

$$(86)\qquad Q e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \sigma_1 u\, \sigma_2 u\, \sigma_3 u$$

$$= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z+z^{-1}}{2} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})(1+h^{2\nu}z^2)(1+h^{2\nu}z^{-2})(1-h^{4\nu-2}z^4)(1-h^{4\nu-2}z^{-4}).$$

Der Kürze wegen möge der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung mit $F(z)$ bezeichnet werden. Es ist dann $F(z)$ eine *ungerade* Function von z, welche sich nicht ändert, wenn man z mit z^{-1} vertauscht. Indem man $F(z)$ nach steigenden und fallenden Potenzen von z entwickelt, kann man schreiben

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{2n+1}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten a_n bildet man $F(hz)$ und findet durch einige einfache Zwischenrechnungen

$$(87)\qquad F(z) = -h^3 z^6 F(hz),$$

oder

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^{2n+1} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n h^{2n+4} z^{2n+7} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} a_{n-3} h^{2n-2} z^{2n+1}.$$

Daraus folgt

(88) $$a_n = -a_{n-3}h^{2n-2}.$$

Da sich $F(z)$ nicht ändert, wenn man z mit z^{-1} vertauscht, so wird

(89) $$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^{2n+1} + z^{-2n-1}) = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2n+1)\frac{u\pi}{2\omega}.$$

Setzt man nun

$$2a_0 = c_0 h^{\frac{1}{12}},\quad 2a_1 = c_1 h^{\frac{9}{12}},\quad 2a_2 = c_2 h^{\frac{25}{12}},$$

so wird nach Gleichung (88)

$$2a_{3\lambda} = (-1)^\lambda c_0 h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}},\qquad 2a_{3\lambda+1} = (-1)^\lambda c_1 h^{\frac{(6\lambda+3)^2}{12}},$$

$$2a_{3\lambda+2} = (-1)^\lambda c_2 h^{\frac{(6\lambda+5)^2}{12}}.$$

Deshalb geht die Gleichung (89) über in

(90) $$\begin{cases} F(z) = c_0 \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right) \\ \quad + c_1 \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+3)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+3)\frac{u\pi}{2\omega}\right) \\ \quad + c_2 \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+5)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+5)\frac{u\pi}{2\omega}\right). \end{cases}$$

Dabei ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+5)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+5)\frac{u\pi}{2\omega}\right)$$

$$= -\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda-1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda-1)\frac{u\pi}{2\omega}\right)$$

$$= -\sum_{\lambda=-1}^{-\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right);$$

ferner findet man aus der Gleichung

(86a) $$F(0) = Q = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^\lambda h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}$$

für die Grössen c_0, c_1, c_2 die Werthe

$$c_0 = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}},\quad c_1 = 0,\quad c_2 = -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}},$$

folglich ist

$$F(z) = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}} \cos\left((6\lambda+1)\frac{u\pi}{2\omega}\right).$$

Damit ist die Richtigkeit der Relation (82) bewiesen.

Beachtet man noch, dass

$$\sigma_1 u \sigma_2 u \sigma_3 u = -\frac{1}{2} \wp' u \sigma^3 u,$$

so wird

$$(91) \qquad \Phi(u \mid \omega, \omega') = \Phi(u) = -\frac{1}{2} Q e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \wp' u \sigma^3 u \text{*)}.$$

§ 13.

Lineare Transformation der Function $\Phi(u \mid \omega, \omega')$.

Vertauscht man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten

$$2\varpi = 2p\omega + 2q\omega', \quad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega', \quad (pq' - p'q = +1),$$

so ändern sich die Functionen $\wp' u$ und σu bekanntlich gar nicht; es wird also nach Gleichung (80)

$$\Phi(u \mid \varpi, \varpi') = -\frac{1}{2} \varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} Q e^{-\frac{3\tilde{\eta} u^2}{2\tilde{\omega}}} \wp' u \sigma^3 u,$$

wobei

$$\tilde{\eta} = p\eta + q\eta',$$

$$\frac{\eta}{\omega} - \frac{\tilde{\eta}}{\varpi} = \frac{1}{\omega\varpi} [\eta(p\omega + q\omega') - (p\eta + q\eta')\omega] = \frac{q\pi i}{2\omega\varpi}$$

ist. Man erhält also

$$(92) \quad \begin{cases} \Phi(u \mid \varpi, \varpi') = \varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} e^{\frac{3u^2}{2}\left(\frac{\eta}{\omega} - \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\omega}}\right)} \Phi(u \mid \omega, \omega') \\ \qquad = \varrho \begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} e^{\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\tilde{\omega}}} \Phi(u \mid \omega, \omega'), \end{cases}$$

oder, wenn man mit $2e^{-\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\tilde{\omega}} - \frac{u\pi i}{2\omega}}$ multiplicirt,

---

*) Im Anschlusse an diese Formel und seine eigenen neueren Entwickelungen bemerkt mir Herr Klein, dass man setzen kann:

$$\Phi(u \mid \omega, \omega')$$

$$= \sqrt{\frac{3\pi}{\omega}} \cdot Q \cdot e^{\frac{3\eta u^2}{2\omega}} \left(h^{\frac{1}{3}} z^{-2} \vartheta_1\left(\frac{3u - 2\omega'}{2\omega}, h^3\right) - h^{\frac{4}{3}} z^{-4} \vartheta_1\left(\frac{3u - 4\omega'}{2\omega}, h^3\right)\right).$$

$$(93)\quad 2e^{-\frac{3qu^2\pi i}{4\omega\varpi}-\frac{u\pi i}{2\omega}}\Phi(u\,|\,\varpi,\varpi') = \varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} e^{-\frac{u\pi i}{2\omega}}\Phi(u\,|\,\omega,\omega').$$

Der Kürze wegen mögen jetzt folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$(94)\quad \begin{cases} \varphi(u,\lambda) = -\dfrac{3qu^2}{4\omega\varpi} + \left(\dfrac{6\lambda+1}{2\varpi} - \dfrac{1}{2\omega}\right)u + \dfrac{(6\lambda+1)^2\varpi'}{12\varpi}, \\ \psi(u,\lambda) = -\dfrac{3qu^2}{4\omega\varpi} + \left(-\dfrac{6\lambda+1}{2\varpi} - \dfrac{1}{2\omega}\right)u + \dfrac{(6\lambda+1)^2\varpi'}{12\varpi}; \end{cases}$$

dann wird

$$\varphi(u+2\omega,\lambda) = \varphi(u,\lambda-q) + 6\lambda - 4qq' + q + (q+1)(q'-1).$$

Da nun q und q' nicht gleichzeitig *gerade* sein dürfen, so folgt hieraus

$$\varphi(u+2\omega,\lambda) \equiv \varphi(u,\lambda-q) + q \pmod{2},$$

und

$$\varphi(u+2n\omega,\lambda) \equiv \varphi(u,\lambda-nq) + nq \pmod{2}.$$

Dies giebt

$$(95)\quad e^{\pi i\varphi(u+2n\omega,\lambda)} = (-1)^{nq}\, e^{\pi i\varphi(u,\lambda-nq)}.$$

Ebenso findet man

$$(96)\quad e^{\pi i\psi(u+2n\omega,\lambda)} = (-1)^{nq}\, e^{\pi i\psi(u,\lambda+nq)}.$$

Macht man jetzt noch die Voraussetzung, dass q *positiv* ist, da (abgesehen von dem besonders zu behandelnden Falle $q = 0$) alle übrigen Fälle auf diesen zurückgeführt werden können, und setzt man dann

$$(97)\quad \lambda = \mu q + \nu,$$

wo μ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen möge, während ν nur die Werthe $0, 1, 2, \ldots q-1$ durchläuft, so wird durch Anwendung von Gleichung (95) und (96)

$$(98)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda e^{\pi i\varphi(u,\lambda)} = \sum\limits_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu \sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\varphi(u-2\mu\omega,\nu)}, \\ \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda e^{\pi i\psi(u,\lambda)} = \sum\limits_{\nu=0}^{q-1}(-1)^\nu \sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\psi(u+2\mu\omega,\nu)}. \end{cases}$$

Durch diese Relationen kann man die Gleichung (93) umformen. Setzt man nämlich zunächst für $\Phi(u\,|\,\varpi,\varpi')$ und $\Phi(u\,|\,\omega,\omega')$ ihre Werthe nach Gleichung (81) ein, so wird

$$\left(\frac{\pi}{p\omega+q\omega'}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda\left[e^{\pi i\varphi(u,\lambda)} + e^{\pi i\psi(u,\lambda)}\right]$$

$$=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^\lambda e^{\frac{(6\lambda+1)^2\omega'\pi i}{12\omega}}\left(e^{\frac{6\lambda u\pi i}{2\omega}} + e^{-\frac{(6\lambda+2)u\pi i}{2\omega}}\right),$$

oder

$$(99)\quad \begin{cases} \left(\frac{\pi}{p\omega+q\omega'}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\nu=0}^{q-1}(-1)^{\nu} \sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u-2\mu\omega,\nu)}+e^{\pi i\psi(u+2\mu\omega,\nu)}\right] \\ =\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}e^{\frac{(6\lambda+1)^2\omega'\pi i}{12\omega}}\left(e^{\frac{3\lambda u\pi i}{\omega}}+e^{-\frac{(3\lambda+1)u\pi i}{\omega}}\right). \end{cases}$$

Nun ist

$$\int\limits_0^{2\omega}\sum\limits_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u-2\mu\omega,\nu)}+e^{\pi i\psi(u+2\mu\omega,\nu)}\right]du=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u,\nu)}+e^{\pi i\psi(u,\nu)}\right]du$$

und

$$\int\limits_0^{2\omega}e^{\frac{3\lambda u\pi i}{2\omega}}du=\begin{cases}2\omega \text{ für } \lambda=0,\\ 0 \quad ,, \quad \lambda \gtrless 0;\end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\omega}e^{-\frac{(3\lambda+1)u\pi i}{2\omega}}du=0;$$

deshalb folgt aus Gleichung (99) durch Integration zwischen den Grenzen 0 und 2ω

$$(100)\quad \begin{cases} \left(\frac{\pi}{p\omega+q\omega'}\right)^{\frac{1}{2}} \sum\limits_{\nu=0}^{q-1}(-1)^{\nu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{\pi i\varphi(u,\nu)}+e^{\pi i\psi(u,\nu)}\right]du \\ =\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix}h^{\frac{1}{12}}\,2\omega\,. \end{cases}$$

Nun ist nach **Cauchy** bekanntlich

$$(101)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-a^2u^2-2abu+c}\,du=e^{b^2+c}\left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wenn die reellen Theile von a^2 und von $\left(\frac{\pi}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ *positiv* sind. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man

$$a^2=\frac{3q\pi i}{4\omega\varpi},\quad 2ab=\left(\frac{1}{2\varphi}-\frac{6\lambda+1}{2\varpi}\right)\pi i,\quad c=\frac{(6\lambda+1)^2\varpi'\pi i}{12\varpi}$$

setzt und der Einfachheit wegen annimmt, dass ω reell und $\omega'=i\omega$ ist; es ist dies eine Beschränkung, die auf den Werth von ϱ gar keinen Einfluss hat. Es wird dann nämlich

$$a^2 = \frac{3q\pi i}{4\omega^2(p+qi)} = \frac{3q\pi(q+pi)}{4\omega^2(p^2+q^2)},$$

$$b^2 + c = \frac{\omega'\pi i}{12\omega} + \frac{\pi i}{12q}\,[p - 2(6\lambda+1) + (6\lambda+1)^2 q'],$$

so dass die Gleichung (101) übergeht in

$$(102)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\varphi(u,\lambda)}\,du = h^{\frac{1}{12}}\, e^{\frac{\pi i}{12q}[p-2(6\lambda+1)+(6\lambda+1)^2 q']} \left(\frac{4\omega\varpi}{3qi}\right)^{\frac{1}{2}};$$

und dem entsprechend ist

$$(103)\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\psi(u,\lambda)}\,du = h^{\frac{1}{12}}\, e^{\frac{\pi i}{12q}[p+2(6\lambda+1)+(6\lambda+1)^2 q']} \left(\frac{4\omega\varpi}{3qi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung (100) ein, so erhält man

$$4\left(\frac{\pi}{\varpi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega\varpi}{3qi}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}}\, e^{\frac{p\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu e^{\frac{(6\nu+1)^2 q'\pi i}{12q}} \cos\left(\frac{6\nu+1}{6q}\pi\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} h^{\frac{1}{12}}\, 2\omega,$$

oder, wenn man die Bestimmung über die Vorzeichen gehörig berücksichtigt,

$$(104)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3q}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu e^{\frac{(6\nu+1)^2 q'\pi i}{12q}} \cos\left(\frac{6\nu+1}{6q}\pi\right).$$

Ist $q = 0$, so muss $p = \pm 1$, $q' = \pm 1$ sein. Dieser Fall muss, wie schon vorhin erwähnt wurde, besonders behandelt werden. Zunächst sei

$$p = +1,\quad q' = +1,\quad \text{also}\quad \varpi = \omega,\quad \varpi' = p'\omega + \omega',$$

dann ist

$$\varphi(u,\lambda) = +\frac{3\lambda u}{\omega} + \frac{(6\lambda+1)^2(p'\omega+\omega')}{12\omega},$$

$$\psi(u,\lambda) = -\frac{(3\lambda+1)u}{\omega} + \frac{(6\lambda+1)^2(p'\omega+\omega')}{12\omega}.$$

Deshalb wird für alle Werthe von λ, die von 0 verschieden sind,

$$\int\limits_0^{2\omega} e^{\pi i\varphi(u,\lambda)}\,du = 0 \quad\text{und}\quad \int\limits_0^{2\omega} e^{\pi i\varphi(u,0)}\,du = 2e^{\frac{p'\pi i}{12}}\, h^{\frac{1}{12}}\,\omega.$$

Dagegen ist für alle Werthe von λ

$$\int\limits_0^{2\omega} e^{\pi i\psi(u,\lambda)}\,du = 0.$$

Wenn man also die Gleichung (99) zwischen den Grenzen 0 und 2ω integrirt, so erhält man

$$\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} 2\omega\, e^{\frac{p'\pi i}{12}} h^{\frac{1}{12}} = \varrho h^{\frac{1}{12}} 2\omega \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$\varrho\begin{pmatrix}1, & 0\\ p', & 1\end{pmatrix} = e^{\frac{p'\pi i}{12}}. \tag{105}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\varrho\begin{pmatrix}-1, & 0\\ p', & -1\end{pmatrix} = e^{-\frac{(p'+6)\pi i}{12}}. \tag{106}$$

§ 14.

Zurückführung auf Gauss'sche Summen.

Aus der Gleichung (104) erkennt man noch nicht unmittelbar, dass ϱ eine 24te Wurzel der Einheit ist; deshalb soll jetzt eine Umformung des Ausdruckes für ϱ vorgenommen werden, welche auf Gauss'sche Summen führt.

Der Kürze wegen sei

$$F(\nu) = e^{\frac{\pi i}{12q}[(6\nu+1)^2 q' + 12\nu q + 12\nu + 2]}, \tag{107}$$

$$G(\nu) = e^{\frac{\pi i}{12q}[(6\nu+1)^2 q' - 12\nu q - 12\nu - 2]}; \tag{108}$$

dann geht Gleichung (104) über in

$$\varrho\begin{pmatrix}p, & q\\ p', & q'\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3q}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\nu)]. \tag{104a}$$

Nun wird aber

$$F(\mu+\nu) = F(\mu) e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q' + 3\nu q' + q + 1]} = F(\nu) e^{\frac{\mu\pi i}{q}[(6\nu+1)q' + 3\mu q' + q + 1]}, \tag{109}$$

$$G(\mu+\nu) = G(\mu) e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q' + 3\nu q' - q - 1]} = G(\nu) e^{\frac{\mu\pi i}{q}[(6\nu+1)q' + 3\mu q' - q - 1]}. \tag{110}$$

Für $\mu = q$ folgt hieraus, weil $(q+1)(q' \pm 1)$ immer eine *gerade* Zahl sein muss,

$$F(\nu + q) = F(\nu), \quad G(\nu + q) = G(\nu). \tag{111}$$

In Gleichung (104a) darf also ν ein beliebiges Restsystem von q durchlaufen.

Jetzt sind je nach den Werthen von q und q' vier Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Hauptfall: $q = 3\xi + 1$.

Wenn $q = 3\xi + 1$ ist, so wird

$$G(\xi - \nu) = F(\nu)\, e^{-\frac{\pi i}{3}},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\nu)] = \sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\xi - \nu)],$$

oder

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} [F(\nu) + G(\nu)] = \left(1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}\right) \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = e^{-\frac{\pi i}{6}} \sqrt{3} \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu),$$

also

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & 3\xi + 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12 q}} \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu). \tag{112}$$

Setzt man jetzt in herkömmlicher Weise

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\nu^2 m \pi i}{n}} = \varphi[m, n], \text{*)} \tag{113}$$

so sind schon von Gauss in seiner Abhandlung: *Summatio quarundarum serierum singularium* (ges. Werke, Bd. 2, S. 11) die Werthe dieser Summen angegeben. Auf solche Gauss'sche Summen kann man nun $\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu)$ zurückführen, doch muss man unterscheiden, ob q *gerade* oder *ungerade* ist.

I^a^. *Ist* $q = 6\alpha + 1$, so setze man

$$\mu = \alpha(p + 1)(q + 1) = 2\alpha(3\alpha + 1)(p + 1), \tag{114}$$

so dass μ sicher eine durch 4 theilbare Zahl ist. Es wird dann

$$6\mu + 1 = q^2(p + 1) - p,$$

$$\begin{aligned}(6\mu + 1) q' + q + 1 &= q[(p + 1) q q' - p' + 1] \\ &= q[(q^2 - 1) p' + (q + 1)(q' + 1) - q'],\end{aligned}$$

also

$$(6\mu + 1) q' + q + 1 \equiv -q q' \pmod{2q}.$$

Deshalb ist

$$e^{\frac{\nu \pi i}{q}[(6\mu+1) q' + q + 1 + 3\nu q']} = e^{\frac{\nu(3\nu q' - q q')\pi i}{q}},$$

oder, wenn man mit

---

*) Dieser Ausdruck $\varphi[m, n]$ ist nicht zu verwechseln mit der in Gleichung (94) definirten Function $\varphi(u, \lambda)$, welche in dem Folgenden gar nicht mehr benutzt wird.

$$1 = e^{\frac{\nu(\nu+1)qq'\pi i}{q}}$$

multiplicirt,

$$(115)\qquad e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{2(3\alpha+2)q'\nu^2\pi i}{q}}.$$

Deshalb wird nach Gleichung (109)

$$(116)\qquad F(\mu+\nu) = F(\mu)\, e^{\frac{2(3\alpha+2)q'\nu^2\pi i}{q}} = F(\mu)\, r^{\nu\nu},$$

wo

$$r = e^{\frac{2(3\alpha+2)q'\pi i}{q}}, \quad \sum_{\nu=0}^{q-1} r^{\nu\nu} = \varphi[(3\alpha+2)q', q]$$

ist. Dies giebt

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\mu+\nu) = F(\mu)\,\varphi[3\alpha+2)q', q]$$

und nach Gleichung (112)

$$(117)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+2)q', q]\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12q}} F(\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+2)q', q]\, e^{\frac{E\pi i}{12}}.$$

Da $\frac{1}{\sqrt{q}}\varphi[(3\alpha+2)q', q]$ bekannt ist, so bleibt nur noch E zu berechnen übrig. Hierbei ist aber zu beachten, dass man E um ein Vielfaches von 24 vermehren oder vermindern kann, ohne dass sich ϱ ändert. Dies soll benutzt werden, d. h. es soll ein möglichst einfacher Ausdruck gesucht werden, der zu E modulo 24 congruent ist.

Nach Gleichung (114) wird

$$(3\mu+1)q'+1 = 3\alpha q[(p+1)q'+p'] + (3\alpha+1)(q'+1),$$

und weil $6\mu q$ durch $24q$ theilbar ist,

$$E = \frac{1}{q}[p-5q+(6\mu+1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2]$$

$$\equiv \frac{1}{q}[p-5q+2+12\mu\{(3\mu+1)q'+1\}+q']$$

$$\equiv \frac{1}{q}[p+q'-5q+2+12\mu(3\alpha+1)(q'+1)],$$

oder da

$$2(3\alpha+1) = q+1, \quad 6\mu = (q^2-1)(p+1), \quad q^2-1 = 12\alpha(3\alpha+1),$$

$$E \equiv \frac{1}{q}[p+q'-5q+2+6\mu(q'+1)]$$

$$\equiv \frac{1}{q}[p+q'-5q+2+(q^2-1)(pq'+p+q'+1)],$$

also

$$E \equiv q(p + q' + 2) - 5.$$

Dies giebt

$$(118)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha + 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+2)\,q', q]\, e^{\frac{[q(p+q'+2)-5]\pi i}{12}}. -$$

I^b. *Ist* $q = 6\alpha - 2$, so müssen p und q' *ungerade* sein, so dass man setzen kann

$$p + 1 = 2a, \quad q + 1 = 2d.$$

Setzt man hier

$$\mu = a(2\alpha - 1), \quad \text{also} \quad 6\mu + 1 = 2aq - p,$$

so wird

$$(6\mu+1)q' + q + 1 = q(2aq' + 1 - p') \equiv q(1 - p') \equiv qq'(1 - p') \pmod{2q}$$

und

$$(119)\qquad e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q-qp'+3)}.$$

Deshalb wird nach Gleichung (109)

$$(120)\qquad F(\mu + \nu) = F(\mu)\, e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q-qp'+3)} = F(\mu)\, r^{\nu\nu},$$

wo

$$r = e^{\frac{(q-qp'+3)q'\pi i}{q}}, \quad \sum_{\nu=0}^{q-1} r^{\nu\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{2q-1} r^{\nu\nu} = \frac{1}{2}\,\varphi[(q - qp' + 3)\,q', 2q]$$

ist. Dies giebt

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1} F(\mu + \nu) = \frac{1}{2}\,F(\mu)\,\varphi[(q - qp' + 3)\,q', 2q]$$

und

$$(121)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha - 2 \\ p', & q' \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q - qp' + 3)\,q', 2q]\, e^{\frac{(p-5q)\pi i}{12q}} F(\mu) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q - qp' + 3)\,q', 2q]\, e^{\frac{E\pi i}{12}}. \end{aligned}\right.$$

Dabei wird

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{q}\,[p - 5q + (6\mu + 1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2] \\ &= \frac{1}{q}\,[p - 7q + 2aq - p + (6\mu + 1)\,q\,(2aq' + 2 - p')] \\ &= 2a - 7 + (6\mu + 1)\,(2aq' + 2 - p') \\ &= 2a - 7 + 2aq' + 2 - p' + 4a(q-1)\,(aq' + 1) - 2ap'(q-1). \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$4a(q-1)(aq'+1) = 12a(2\alpha-1)(2ad-a+1)$$
$$= 24a^2d(2\alpha-1) - 12a(a-1)(2\alpha-1)$$

ein Vielfaches von 24, so dass

$$E \equiv 4ad - 5 - p' - 2ap'(q-1) \equiv p + q' - 3 - pp'(q-1).$$

Dies giebt also

$$(122)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q-p'q+3)q', 2q]\,e^{\frac{[p+q'-3-pp'(q-1)]\pi i}{12}}.$$

II. Hauptfall. $q = 3\xi - 1$.

Hier wird

$$G(-\xi-\nu) = F(\nu)\,e^{\frac{\pi i}{3}},$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}[F(\nu)+G(\nu)] = \sum_{\nu=0}^{q-1}[F(\nu)+G(-\xi-\nu)] = \left(1+e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu),$$

also

$$(123)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 3\xi-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,e^{\frac{(p-q)\pi i}{12q}}\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu).$$

Wie beim ersten Hauptfalle, so muss man auch hier unterscheiden, ob q *ungerade* oder *gerade* ist.

II[a]. *Ist* $q = 6\alpha - 1$, so findet man ganz ähnlich wie im Falle I[a], indem man $\mu = \alpha(p+1)(q-1)$ setzt,

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1}F(\mu+\nu) = F(\mu)\sum_{\nu=0}^{q-1}e^{\frac{2(3\alpha+1)q'\nu^2\pi i}{q}}$$
$$= F(\mu)\,\varphi[(3\alpha+1)q', q],$$

und da

$$F(\mu)\,e^{\frac{(p-q)\pi i}{12q}} = e^{\frac{[q(p+q'+2)-1]\pi i}{12}}$$

wird, so erhält man

$$(124)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+1)q', q]\,e^{\frac{[q(p+q'+2)-1]\pi i}{12}}.$$

II[b]. *Ist* $q = 6\alpha + 2$, so müssen wieder p und q' *ungerade* sein, so dass man setzen kann

$$p'+1 = 2a, \quad q'+1 = 2d.$$

Giebt man hier der Grösse μ den Werth $-a(2\alpha+1)$, so findet man ähnlich wie im Falle I[b]

$$\sum_{\nu=0}^{q-1}F(\nu) = \sum_{\nu=0}^{q-1}F(\mu+\nu) = \frac{1}{2}F(\mu)\,\varphi[q-p'q+3)q', 2q]$$

und deshalb

$$(125)\quad \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q-p'q+3)q', 2q]\,e^{\frac{[-p-q'-3+pp'(q+1)]\pi i}{12}}.$$

III. Hauptfall. $q = 3\xi$, $q' = 3\eta - 1$.

Da q und q' nicht gleichzeitig gerade sein dürfen, so ist

$$(q+1)(q'+1) \equiv 0 \ (\text{mod. } 6), \quad (q+1)(q'-1) \equiv -2 \ (\text{mod. } 6),$$

folglich wird nach Gleichung (109)

$$F(\nu+\xi) = F(\nu), \qquad G(\nu+\xi) = e^{-\frac{2\pi i}{3}}\,G(\nu),$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = 3\sum_{\nu=0}^{\xi-1} F(\nu),$$

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} G(\nu) = \left(1 + e^{-\frac{2\pi i}{3}} + e^{-\frac{4\pi i}{3}}\right)\sum_{\nu=0}^{\xi-1} G(\nu) = 0.$$

Daher erhält man

$$(126)\qquad \varrho\begin{pmatrix} p, & 3\xi \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\,e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}\sum_{\nu=0}^{\xi-1} F(\nu).$$

Aus der Gleichung $pq' - p'q = +1$ folgt nun, dass hier $p+1$ durch 3 theilbar sein muss; es sei also

$$p + 1 = 3\zeta.$$

III¹. *Ist* $q = 6\alpha + 3$, so setze man

$$\mu = 2\zeta\alpha(\alpha+1);$$

wodurch man erreicht, dass μ durch 4 theilbar ist. Jetzt wird

$$6\mu + 1 = \zeta q(2\alpha+1) - p, \quad (6\mu+1)q' + q + 1 \equiv qq' \ (\text{mod. } 2q).$$

Daraus folgt

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']} = e^{\frac{q'\nu\pi i}{q}(3\nu+q)} = e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q+3)} = r^{\nu\nu},$$

wo

$$r = e^{\frac{(q+3)q'\pi i}{q}} = e^{\frac{2(\alpha+1)q'\pi i}{2\alpha+1}}, \quad \sum_{\nu=0}^{\xi-1} r^{\nu\nu} = \varphi[(\alpha+1)q', 2\alpha+1].$$

Man erhält daher nach Gleichung (109)

$$F(\mu+\nu) = F(\mu)\,e^{\frac{q'\nu^2\pi i}{q}(q+3)} = F(\mu)\,r^{\nu\nu}$$

und

$$(127)\quad\begin{cases}\varrho\begin{pmatrix}p, & 6\alpha+3\\ p', & 3\eta-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)q', 2\alpha+1]\,F(\mu)\,e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}\\[2ex] \qquad=\dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)q', 2\alpha+1]\,e^{\frac{E\pi i}{12}}.\end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{q}\,[p-3q+(6\mu+1)^2 q'+12\mu q+12\mu+2]\\ &=\frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q)+\frac{12\mu}{q}\,[(3\mu+1)\,q'+q+1]\\ &=\frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q)+\frac{12\mu}{q}(\alpha+1)(q'+1)+12\mu(\zeta\alpha q'+1+\alpha p').\end{aligned}$$

Da nun μ durch 4 theilbar ist und

$$12\mu(\alpha+1)=24\zeta\alpha(\alpha^2+2\alpha+1)=-3\zeta+\zeta q(4\alpha^2+6\alpha+1)$$

wird, so ist modulo 24

$$\begin{aligned}E&\equiv\frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q)+\frac{12\mu}{q}\,(\alpha+1)\,(q'+1)\\ &\equiv\frac{1}{q}\,(p+q'+2-3q-3\zeta q'-3\zeta)+\zeta(q'+1)\,(4\alpha^2+6\alpha+1)\\ &\equiv-p'-3+\zeta\eta(12\alpha^2+18\alpha+3)\\ &\equiv-p'-3+\zeta\eta(6\alpha+3)=\zeta\eta q-p'-3.\end{aligned}$$

Man erhält also

$$(128)\quad \varrho\begin{pmatrix}3\zeta-1, & 6\alpha+3\\ p', & 3\eta-1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)q', (2\alpha+1)]\,e^{\frac{(\eta\zeta q-p'-3)\pi i}{12}}.$$

III[b]. *Ist* $q=6\alpha$, so muss q' ungerade sein. Deshalb ist $q'+1$ durch 6 theilbar und ebenso $p+1$; man setze daher

$$p+1=6\sigma,\quad q'+1=6\tau.$$

Ferner sei $\mu=-\sigma$, also

$$6\mu+1=-p,\ (6\mu+1)q'+q+1=(1-p')q\equiv(1-p')qq'\ (\text{mod.}\,2q).$$

Daraus folgt

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}[(6\mu+1)q'+q+1+3\nu q']}=e^{\frac{\nu q'\pi i}{q}(3\nu+q-p'q)}=e^{\frac{\nu^2 q'\pi i}{q}(q-p'q+3)}=r^{\nu\nu},$$

wobei

$$r=e^{\frac{3q'\pi i}{q}(2\alpha-2\alpha p'+1)}=e^{\frac{(2\alpha-2\alpha p'+1)q'\pi i}{2\alpha}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{2\alpha-1} r^{\nu\nu}=\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{4\alpha-1} r^{\nu\nu}=\frac{1}{2}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q', 4\alpha].$$

Nach Gleichung (109) erhält man also

$$F(\mu + \nu) = F(\mu)\, r^{\nu\nu}$$

und

$$\varrho\begin{pmatrix}6\sigma-1, & 6\alpha \\ p', & 6\tau-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi\,[(2\alpha - 2\alpha p' + 1)\,q',\, 4\alpha]\, F(\mu)\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi\,[(2\alpha - 2\alpha p' + 1)\,q',\, 4\alpha]\, e^{\frac{E\pi i}{12}}.$$

Dabei ist

$$E = \frac{1}{q}\,[p - 3q + (6\mu + 1)^2 q' + 12\mu q + 12\mu + 2]$$

$$= \frac{1}{q}\,(p - 3q + p^2 q' - 2pq - 2q - 2p)$$

$$= pp' - 2p - 5;$$

dies giebt also

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} &\varrho\begin{pmatrix}6\sigma-1, & 6\alpha \\ p', & 6\tau-1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi\,[(2\alpha - 2\alpha p' + 1)\,q',\, 4\alpha]\, e^{\frac{(pp'-2p-5)\pi i}{12}}.\end{aligned}\right.$$

IV. Hauptfall: $q = 3\xi$, $q' = 3\eta + 1$.

Hier ist

$$(q + 1)(q' + 1) \equiv 2 \pmod{6}, \qquad (q + 1)(q' - 1) \equiv 0 \pmod{6},$$

folglich wird nach Gleichung (109)

$$F(\nu + \xi) = e^{\frac{2\pi i}{3}} F(\nu), \qquad G(\nu + \xi) = G(\nu),$$

also

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} F(\nu) = \left(1 + e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}}\right) \sum_{\nu=0}^{\xi-1} F(\nu) = 0,$$

$$\sum_{\nu=0}^{q-1} G(\nu) = 3 \sum_{\nu=0}^{\xi-1} G(\nu).$$

Daher erhält man

$$(130)\qquad \varrho\begin{pmatrix}p, & 3\xi \\ p', & 3\eta + 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\xi}}\, e^{\frac{(p-3q)\pi i}{12q}} \sum_{\nu=0}^{\xi-1} G(\nu).$$

Die Rechnungen werden daher in diesem Falle denen des vorigen Falles ganz ähnlich, man hat nur $F(\nu)$ mit $G(\nu)$ zu vertauschen und statt der Gleichung (109) die Gleichung (110) passend zu verwenden. Dadurch erhält man die beiden Formeln

$$(131)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} 3\xi+1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta+1 \end{pmatrix} \\ = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)\,q',\ 2\alpha+1]\,e^{\frac{(-\eta\zeta q+p'-3)\pi i}{12}} \end{cases}$$

und

$$(132)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} 6\sigma+1, & 6\alpha \\ p', & 6\tau+1 \end{pmatrix} \\ = \dfrac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\,\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)\,q',\ 4\alpha]\,e^{\frac{(pp'-2p-1)\pi i}{12}}. \end{cases}$$

§ 15.

Tabellen.

Es erscheint zweckmässig, die gefundenen Resultate in einer Tabelle zusammenzustellen. Es möge dabei ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die Darstellung von ϱ auf sehr verschiedene Weise möglich ist, und dass es vermuthlich noch einfachere Ausdrücke für ϱ giebt. Die folgende Tabelle ist aber für die vorliegenden Zwecke vollkommen ausreichend.

$$(133)\quad \begin{cases} \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+2)\,q',\ q]\,e^{\frac{[q\,(p+q'+2)-5]\pi i}{12}}, \\ \qquad\text{(Gleichung (118)),} \\ \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha+2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[q-p'q+3)q',\ 2q]\,e^{\frac{[-p-q'-3+pp'(q+1)]\pi i}{12}}, \\ \qquad\text{(Gleichung (125)),} \\ \varrho\begin{pmatrix} 3\xi-1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta-1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)\,q',\ 2\alpha+1]\,e^{\frac{(\eta\zeta q-p'-3)\pi i}{12}}, \\ \qquad\text{(Gleichung (128)),} \\ \varrho\begin{pmatrix} 3\xi+1, & 6\alpha+3 \\ p', & 3\eta+1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2\alpha+1}}\,\varphi[(\alpha+1)\,q',\ 2\alpha+1]\,e^{\frac{(-\eta\zeta q+p'-3)\pi i}{12}}, \\ \qquad\text{(Gleichung (131)),} \\ \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-2 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2\sqrt{q}}\,\varphi[(q-p'q+3)q',\ 2q]\,e^{\frac{[p+q'-3-pp'(q-1)]\pi i}{12}}, \\ \qquad\text{(Gleichung (122)),} \\ \varrho\begin{pmatrix} p, & 6\alpha-1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{q}}\,\varphi[(3\alpha+1)\,q',q]\,e^{\frac{[q(p+q'+2)-1]\pi i}{12}}, \\ \qquad\text{(Gleichung (124)),} \end{cases}$$

$$(133)\left\{\begin{aligned}
&\varrho\begin{pmatrix}6\sigma-1, 6\alpha \\ p', 6\tau-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)q', 4\alpha]\,e^{\frac{(pp'-2p-5)\pi i}{12}}, \\
&\qquad\qquad\text{(Gleichung (129))}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}6\sigma+1, 6\alpha \\ p', 6\tau+1\end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}\varphi[(2\alpha-2\alpha p'+1)q', 4\alpha]\,e^{\frac{(pp'-2p-1)\pi i}{12}}, \\
&\qquad\qquad\text{(Gleichung (132))}.
\end{aligned}\right.$$

Hieraus mögen noch die Fälle $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ besonders ausgerechnet und in eine Tabelle zusammengestellt werden.

$$(134)\qquad \varrho\begin{pmatrix}1, 0 \\ p', 1\end{pmatrix} = e^{\frac{p'\pi i}{12}}, \qquad \varrho\begin{pmatrix}-1, 0 \\ p', -1\end{pmatrix} = e^{\frac{-(p'+6)\pi i}{12}},$$

$$(134\text{a})\left\{\begin{aligned}
&\varrho\begin{pmatrix}p, 1 \\ p', q'\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(p+q'-3)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 2 \\ p', q'\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{24}(p+q'-6)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 3 \\ p', 3k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{36}(p+q'-11)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 3 \\ p', 3k+2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{36}(p+q'-7)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 4 \\ p', 4k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{48}(p+q'-18)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 4 \\ p', 4k+3\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{48}(p+q'-6)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 5 \\ p', 5k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-27)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 5 \\ p', 5k+2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-15)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 5 \\ p', 5k+3\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-15)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 5 \\ p', 5k+4\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{60}(p+q'-3)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 6 \\ p', 6k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{72}(p+q'-38)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 6 \\ p', 6k+5\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{72}(p+q'+2)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 7 \\ p', 7k+1\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-51)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 7 \\ p', 7k+2\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-27)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 7 \\ p', 7k+3\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-15)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 7 \\ p', 7k+4\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-27)}, \\
&\varrho\begin{pmatrix}p, 7 \\ p', 7k+5\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'-15)}, && \varrho\begin{pmatrix}p, 7 \\ p', 7k+6\end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{84}(p+q'+9)}.
\end{aligned}\right.$$

Die Form, welche die 18 verschiedenen Werthe von ϱ in den Gleichungen (134a) haben, ist so übereinstimmend, dass die Frage nahe liegt, ob sich die Gleichungen nicht alle durch eine einzige darstellen lassen. Dies ist in der That möglich, denn setzt man

$$p = hq + r, \quad q' = kq + t,$$

wo r, t positiv und kleiner als q sein sollen, so haben die Gleichungen (134a) sämmtlich die Form

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & q \\ p', & q' \end{pmatrix} = \varrho\begin{pmatrix} hq+r, & q \\ & p', kq+t \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(h+k+r+t-q-2)}.$$

Ich habe aber noch nicht geprüft, wie weit die Gültigkeit dieser einfachen Formel reicht.

Abschnitt IV.

Theorie der f-Gleichung, wenn n eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl ist.

§ 16.

Beweis, dass in dem vorliegenden Falle f^2 einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades genügt.

Ist $n = 2m+1$ eine Primzahl von der Form $6l \pm 1$ und g eine primitive Wurzel von n, so wird nach Gleichung (44)

$$(135)\quad f^{-2} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m}\left[\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)\right] = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} F\left(\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right),$$

wo

$$F(\wp) = \frac{3\wp^4 - \frac{3}{2}g_2\wp^2 - 3g_3\wp - \frac{1}{16}g_2^2}{4\wp^3 - g_2\wp - g_3}$$

ist. Die Grösse f^2 ist somit eine symmetrische und deshalb auch cyklische Funktion von

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right),\ \wp\left(\frac{2g\varpi}{n}\right),\ \ldots\ \wp\left(\frac{2g^{m-1}\varpi}{n}\right).$$

Daraus folgt nach den Ausführungen in § 3, dass f^{-2} die Wurzel einer Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades ist, deren Coefficienten *rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind. Der Nenner in $F(\wp)$ ist

$$4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = \wp'^2;$$

der Nenner in f^{-2} wird daher gleich $\prod_{\alpha=1}^{m}\wp'^2\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$, und dieses Product ist nach Gleichung (46) gleich f^{-6}. Der Nenner, welcher in

$$f^{-2} = (-1)^l \prod_{\alpha=1}^{m} F\left(\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)\right)$$

auftritt, muss sich also gegen entsprechende Factoren im Zähler fortheben, so dass die ganzen symmetrischen Functionen der $n+1$ Grössen f^{-2} unter Anwendung der angedeuteten Relationen sogar *ganze* symmetrische Functionen der Theilwerthe des reducirten Systems werden. Daraus kann man also nach Satz IV in § 2 schliessen, dass die Coefficienten der Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, von welcher f^{-2} abhängt, sogar *ganze* rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

§ 17.

Die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung. Jacobi'sche Relationen.

Um die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung zu erhalten, beachte man, dass f^2 eine cyklische Function der m Theilwerthe n^{ten} Grades

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right), \wp\left(\frac{2g\varpi}{n}\right), \wp\left(\frac{2g^2\varpi}{n}\right), \cdots \wp\left(\frac{2g^{m-1}\varpi}{n}\right)$$

ist. Setzt man jetzt für ϖ die $n+1$ Werthe

$$\omega,\ \omega',\ \omega'+24\omega,\ \omega',+48\omega,\ \cdots \omega'+24(n-1)\omega,$$

so wird das vollständige System der Theilwerthe n^{ten} Grades erschöpft. Bezeichnet man also die $n+1$ Wurzeln der f-Gleichung mit

$$f_\infty^2,\ f_0^2,\ f_1^2,\ f_2^2,\ \ldots f_{n-1}^2,$$

so ist nach Gleichung (35)

$$(136)\qquad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{n},\ \omega'\right)}{Q^n(\omega,\ \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^m \sqrt{n} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1-h^{2n\nu})}{(1-h^{2\nu})^n},$$

wobei h den Werth $e^{\frac{\omega'\pi i}{\omega}}$ hat. Vertauscht man jetzt $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$ mit $\wp\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{n}\right)$, so geht f_∞ in f_r über. Nun ist aber

$$\wp(u\,|\,\omega,\omega') = \wp(u\,|\,\omega'+24r\omega,\ -\omega),$$

weil sich $\wp u$ gar nicht ändert, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ durch die äquivalenten Perioden $2p\omega+2q\omega'$, $2p'\omega+2q'\omega'$ ersetzt. Es geht also f_∞ in f_r über, wenn man

$$\wp\left(\frac{2\omega}{n}\,\middle|\,\omega,\omega'\right) \quad\text{mit}\quad \wp\left(\frac{2\omega'+48r\omega}{n}\,\middle|\,\omega'+24r\omega,\ -\omega\right)$$

vertauscht, d. h. man hat in f_∞ die Grössen $\omega'+24r\omega$, $-\omega$ an die Stelle von ω, ω' zu setzen. Dadurch erhält man also

$$f_r = \frac{Q\left(\frac{\omega'+24r\omega}{n},-\omega\right)}{Q^n(\omega'+24r\omega,\ -\omega)}$$

für $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$. Aus der Tabelle (134a) findet man

$$\varrho\begin{pmatrix}24r, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{\frac{(24r-3)\pi i}{12}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}, \quad \varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 0\end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{4}},$$

folglich ist

$$Q(24r\omega + \omega', -\omega) = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q(\omega, \omega'),$$

$$Q\left(\frac{\omega' + 24r\omega}{n}, -\omega\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q\left(\omega, \frac{\omega' + 24r\omega}{n}\right)$$

und

$$(137)\quad f_r = e^{\frac{(n-1)\pi i}{4}} \frac{Q\left(\omega, \frac{\omega'+24r\omega}{n}\right)}{Q^n(\omega, \omega')} = e^{\frac{m\pi i}{2}} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^m h^{\frac{-n^2+1}{12n}} \varepsilon^r \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left(1 - h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24r\nu}\right)}{(1-h^{2\nu})^n},$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist.

Dieses Resultat stimmt mit Gleichung (9) in Abh. 1 überein; auch zeigt die hier benutzte Herleitung recht deutlich, wesshalb es zweckmässig ist, die Grössen $Q\left(\omega, \frac{\omega'+24r\omega}{n}\right)$ und nicht etwa $Q\left(\omega, \frac{\omega'+r\omega}{n}\right)$ einzuführen.

Setzt man

$$N = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^m h^{\frac{n}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu})^n$$

und entwickelt die Grössen

$$Nf_\infty, \; Nf_0, \; Nf_1, \; \ldots \; Nf_{n-1}$$

nach Potenzen von h, so findet man, wie schon in Abh. 1 gezeigt wurde, die nach Jacobi benannten Relationen, nämlich die $\frac{n+1}{2}$ Relationen

$$(138)\quad \begin{cases} f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} = e^{\frac{(2l+m)\pi i}{2}} f_\infty \sqrt{n}, \\ f_0 + \varepsilon^{-\beta} f_1 + \varepsilon^{-2\beta} f_2 + \cdots + \varepsilon^{-2m\beta} f_{n-1} = 0, \end{cases}$$

wo β ein beliebiger Nichtrest von n ist. In ähnlicher Weise findet man auch die Gleichungen

$$(139)\quad \begin{cases} f_0^3 + f_1^3 + f_2^3 + \cdots + f_{n-1}^3 = e^{\frac{m\pi i}{2}} f_\infty^3 \sqrt{n}, \\ f_0^3 + \varepsilon^{-3\beta} f_1^3 + \varepsilon^{-6\beta} f_2^3 + \cdots + \varepsilon^{-6m\beta} f_{n-1}^3 = 0. \end{cases}$$

§ 18.

Herstellung der f-Gleichung.

Schon in § 5 der Abhandlung 1 ist ausführlich angegeben, wie man die f-Gleichung wirklich herstellen kann. Sie hat die Form

$$(140)\qquad f^{2n+2} + \mathfrak{g}_1 f^{2n} + \mathfrak{g}_2 f^{2n-2} + \cdots + \mathfrak{g}_{n+1} = 0,$$

und es folgt zunächst aus der Productentwickelung der Grössen f, wie sie durch die Gleichungen (136) und (137) gegeben ist,

$$(141)\qquad \mathfrak{g}_{n+1} = f_\infty^2 f_0^2 f_1^2 \cdots f_{n-1}^2 = (-1)^m \frac{n}{\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}}.$$

Da f^{-2} einer Gleichung genügt, deren Coefficienten *ganze rationale* Functionen von g_2 und g_3 sind, so müssen, wie aus Gleichung (141) folgt, die Coefficienten $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots$ in der Gleichung für f^2 gleichfalls *ganze rationale* Functionen von g_2 und g_3 sein, dividirt durch eine Potenz von Δ, deren Exponent eine *ganze* Zahl ist. Nennt man diesen Exponenten, wenn er bei $\mathfrak{g}_\alpha$ auftritt, α_1, so wird α_1 zwischen

$$\frac{\alpha(n-1)}{12} \quad\text{und}\quad \frac{\alpha n}{12}$$

liegen, weil

$$\Delta^{\frac{1}{12}} = \frac{\pi}{\omega} h^{\frac{1}{6}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^2$$

und

$$f_\infty^{2\alpha} = \frac{n^\alpha h^{\frac{\alpha n}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2n\nu})^{2\alpha}}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)}{12}} h^{\frac{\alpha}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{2\alpha}},$$

$$f_r^{2\alpha} = (-1)^{\alpha m} \frac{\varepsilon^{2\alpha r} h^{\frac{\alpha}{6n}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-h^{\frac{2\nu}{n}}\varepsilon^{24r\nu}\right)^{2\alpha}}{\Delta^{\frac{\alpha(n-1)}{12}} h^{\frac{\alpha}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{2\alpha}}$$

ist. Liegt zwischen $\frac{\alpha(n-1)}{12}$ und $\frac{\alpha n}{12}$ keine ganze Zahl, so ist $\mathfrak{g}_\alpha = 0$, liegen aber mehrere ganze Zahlen dazwischen, so darf man für α_1 die grösste nehmen.

Um nun auch den Zähler von $\mathfrak{g}_\alpha$ zu bestimmen, muss man zunächst berücksichtigen, dass die Dimension von

$$g_2, \quad g_3, \quad \Delta^{\alpha_1} = (g_2^3 - 27 g_3^2)^{\alpha_1}, \quad f^2 = \frac{Q^2\left(\frac{\varpi}{n}, \varpi'\right)}{Q^{2n}(\varpi, \varpi')}, \quad \mathfrak{g}_\alpha$$

bez. gleich

$$2, \quad 3, \quad 6\alpha_1, \qquad \frac{1-n}{2}, \qquad \frac{1-n}{2}\alpha$$

ist. Daraus folgt, dass der Zähler von $\mathfrak{g}_\alpha$ eine *ganze* homogene Function $\mathfrak{G}_{\alpha_2}$ der Grössen g_2, g_3 sein muss, deren Grad α_2 durch die Gleichung

$$\alpha_2 = 6\alpha_1 - \frac{n-1}{2}\alpha \tag{142}$$

bestimmt wird. Homogen ist die Function in dem Sinne, dass man die Dimension von g_2 und g_3 berücksichtigt.

Dieser Grad α_2 ist eine verhältnissmässig kleine Zahl, sie muss nämlich nach den über α_1 getroffenen Bestimmungen kleiner sein als $\frac{\alpha}{2}$. Kennt man α_2, so ist die Function $\mathfrak{G}_{\alpha_2}$ bis auf einige Zahlencoefficienten vollständig bestimmt. Es ist nämlich, wenn man mit $c_1, c_2, \ldots$ Zahlencoefficienten bezeichnet,

$$\mathfrak{G}_1 = 0,$$

und es hat

$\mathfrak{G}_0$ die Form c_1,
$\mathfrak{G}_2$ „ „ $c_1 g_2$,
$\mathfrak{G}_3$ „ „ $c_1 g_3$,
$\mathfrak{G}_4$ „ „ $c_1 g_2^2$,
$\mathfrak{G}_5$ „ „ $c_1 g_2 g_3$,
$\mathfrak{G}_6$ „ „ $c_1 g_2^3 + c_2 g_3^2$,
$\mathfrak{G}_7$ „ „ $c_1 g_2^2 g_3$,
$\mathfrak{G}_8$ „ „ $c_1 g_2^4 + c_2 g_2 g_3^2$,
$\mathfrak{G}_9$ „ „ $c_1 g_2^3 g_3 + c_2 g_3^3$,
. . . .

Um auch noch diese Zahlencoefficienten $c_1, c_2, \ldots$ zu finden, beachte man, dass die Summe

$$f_\infty^{2\alpha} + f_0^{2\alpha} + f_1^{2\alpha} + \cdots + f_{n-1}^{2\alpha},$$

welche mit s_α bezeichnet werden möge, dieselbe Form hat wie $\mathfrak{g}_\alpha$. Den Zähler von s_α kann man aber leicht nach Potenzen von h entwickeln, indem man die Reihen

$$
(143)\begin{cases}
\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})=1-h^2-h^4+h^{10}+h^{14}-h^{24}-\cdots \\
\qquad\qquad = h^{-\frac{1}{12}}\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\lambda}h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}, \\
\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{2\alpha}=H_0(2\alpha)-H_1(2\alpha)h^2+H_2(2\alpha)h^4-H_3(2\alpha)h^6+\cdots
\end{cases}
$$

benutzt. Wie man die Grössen $H_\varkappa(2\alpha)$ *einzeln* berechnen kann, ist in Abh. 3 gezeigt worden.

Man kann aber auch s_α als Function von g_2 und g_3 betrachten und den Zähler nach Potenzen von h^2 entwickeln durch Anwendung der Reihen

$$
(144)\begin{cases}
g_2=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^4\left[\frac{1}{12}+20(h^2+9h^4+28h^6+73h^8+126h^{10}+\cdots)\right], \\
g_3=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^6\left[\frac{1}{126}-\frac{7}{3}(h^2+33h^4+244h^6+1057h^8+3126h^{10}+\cdots)\right].
\end{cases}
$$

Durch Vergleichung dieser beiden Entwickelungen findet man leicht die unbestimmten Coefficienten, welche in $\mathfrak{g}_\alpha$ oder in s_α auftreten. Natürlich braucht man bei dieser Reihenentwickelung nur so viele Glieder zu berücksichtigen, als unbestimmte Coefficienten in s_α enthalten sind, d. h. man braucht nur $\varkappa$ Glieder, wenn α_2 die Form $6\varkappa+1$ hat, und $\varkappa+1$ Glieder, wenn α_2 eine der Formen $6\varkappa$, $6\varkappa+2$, $6\varkappa+3$, $6\varkappa+4$, $6\varkappa+5$ hat.

Kennt man die Grössen s_α, so findet man mit Hülfe der Newton'schen Formeln auch die Grössen $\mathfrak{g}_\alpha$.

Im Uebrigen sei hier auf § 5 in Abh. 1 verwiesen.

§ 19.

Beispiele für $n = 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Definition der L-Gleichung.

Das soeben angedeutete Verfahren wurde bereits in Abhandlung 1 dazu verwendet, um die f-Gleichungen für $n = 5, 7, 11, 13, 17, 19$ wirklich zu bilden. In Abhandlung 3 wurde dann noch eine Umformung der f-Gleichung vorgenommen, die aus den Substitutionen

$$L = Q^{n-1}f, \qquad \gamma_2 = \frac{g_2}{Q^8}, \qquad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}$$

hervorgeht. Dabei ist

$$Q = \Delta^{\frac{1}{24}} = \left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}) = Q(\omega, \omega')$$

eindeutig definirt. Die Gleichung für L, welche man hierdurch erhält, möge *L-Gleichung* genannt werden. Sie lässt sich einfacher schreiben als die f-Gleichung, weil die Coefficienten *ganze rationale* Functionen von γ_2 und γ_3 sind, während in der f-Gleichung Potenzen von Δ als Nenner auftreten.

In Abhandlung 3 wurde die L-Gleichung für $n = 23$ angegeben und in der vorliegenden Mittheilung möge noch die L-Gleichung für $n = 29$ hinzugefügt werden; der Vollständigkeit wegen sollen hier die L-Gleichungen für alle Primzahlen von der Form $6l \pm 1$ bis $n = 29$ Platz finden.

Man erhält für $n = 5$

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0; \tag{145}$$

für $n = 7$

$$L^{16} + 14L^{12} + 63L^8 + 70L^4 + 216\gamma_3 L^2 - 7 = 0; \tag{146}$$

für $n = 11$

$$\begin{cases} L^{24} + 11(-90L^{12} + 40.12\gamma_2 L^8 + 15.216\gamma_3 L^6 + 2.144\gamma_2^2 L^4) \\ \quad + 12\gamma_2 . 216\gamma_3 L^2 - 11 = 0; \end{cases} \tag{147}$$

für $n = 13$

$$\begin{cases} L^{28} + 13(2L^{26} + 25L^{24} + 196L^{22} + 1064L^{20} + 4180L^{18} \\ \qquad + 12086L^{16} + 25660L^{14} + 39182L^{12} + 41140L^{10} \\ \qquad + 27272L^8 + 9604L^6 + 1165L^4) \\ \quad + (746 - 1728\gamma_2^3)L^2 + 13 = 0; \end{cases} \tag{148}$$

für $n = 17$

$$\begin{cases} L^{36} + 17[10L^{30} + 2.12\gamma_2 L^{26} + 751L^{24} + 184.12\gamma_2 L^{20} \\ \qquad + 25740L^{18} + 17.144\gamma_2^2 L^{16} + 8780.12\gamma_2 L^{14} \\ \qquad + 323903L^{12} - 1474.144\gamma_2^2 L^{10} + 99128.12\gamma_2 L^8 \\ \qquad + (-592310 + 20.1728\gamma_2^3)L^6 + 481.144\gamma_2^2 L^4] \\ \quad + (994 - 1728\gamma_2^3)12\gamma_2 L^2 + 17 = 0; \end{cases} \tag{149}$$

für $n = 19$

$$\begin{cases} L^{40} + 19[-4L^{36} + 138L^{32} - 2926L^{28} - 2.216\gamma_3 L^{26} + 41035L^{24} \\ \qquad + 237.216\gamma_3 L^{22} - 359820L^{20} - 7410.216\gamma_3 L^{18} \\ \qquad + 1743935L^{16} + 85414.216\gamma_3 L^{14} \\ \qquad + (-4798430 + 13.216^2\gamma_3^2)L^{12} - 317802.216\gamma_3 L^{10} \\ \qquad + (16921266 + 306.216^2\gamma_3^2)L^8 + 148629.216\gamma_3 L^6 \\ \qquad + (422140 + 185.216^2\gamma_3^2)L^4] \\ \quad + (1474 + 216^2\gamma_3^2)216\gamma_3 L^2 - 19 = 0; \end{cases} \tag{150}$$

für $n = 23$

$$
(151)\quad \left\{\begin{aligned}
&L^{48} + 23[684\,L^{36} - 208.12\gamma_2 L^{32} + 138.216\gamma_3 L^{30} + 76.12^2\gamma_2^2 L^{28}\\
&\qquad\qquad - 2.12\gamma_2.216\gamma_3 L^{26} + 3\,826\,738\,L^{24}\\
&\qquad\qquad - 2631\,456.12\gamma_2 L^{20} + 3\,151\,332.216\gamma_3 L^{18}\\
&\qquad\qquad + 5454\,584.12^2\gamma_2^2 L^{16} + 2\,732\,604.12\gamma_2.216\gamma_3 L^{14}\\
&\qquad\qquad + (643\,643.12^3\gamma_2^3 - 3\,224\,219\,652)L^{12}\\
&\qquad\qquad + 81\,332.12^2\gamma_2^2.216\gamma_3 L^{10}\\
&\qquad\qquad + (5814.12^4\gamma_2^4 + 343\,305\,200.12\gamma_2)L^8\\
&\qquad\qquad + (235.12^3\gamma_2^3.216\gamma_3 - 20\,169\,438.216\gamma_3)L^6\\
&\qquad\qquad + (5.12^5\gamma_2^5 + 123\,292.12^2\gamma_2^2)L^4]\\
&\quad + (12^4\gamma_2^4.216\gamma_3 - 502.12\gamma_2.216\gamma_3)L^2 - 23 = 0;
\end{aligned}\right.
$$

für $n = 29$

$$
(152)\quad \left\{\begin{aligned}
&L^{60} + 29[-14\,L^{54} - 7.12\gamma_2 L^{50} + 2941\,L^{48} + 3752.12\gamma_2 L^{44}\\
&\qquad - 430\,920\,L^{42} + 549.12^2\gamma_2^2 L^{40} - 746\,900.12\gamma_2 L^{38}\\
&\qquad + 39\,119\,722\,L^{36} - 293\,314.12^2\gamma_2^2 L^{34} + 88\,455\,352.12\gamma_2 L^{32}\\
&\qquad + (-18\,009.12^3\gamma_2^3 - 2\,125\,900\,852)L^{30}\\
&\qquad + 63\,392\,927.12^2\gamma_2^2 L^{28} + (2.12^4\gamma_2^4 - 6\,278\,577\,146.12\gamma_2)L^{26}\\
&\qquad + (6\,163\,164.12^3\gamma_2^3 + 65\,739\,634\,658)L^{24}\\
&\qquad - 4\,804\,765\,196.12^2\gamma_2^2 L^{22}\\
&\qquad + (182\,139.12^4\gamma_2^4 + 112\,526\,262\,488.12\gamma_2)L^{20}\\
&\qquad + (-464\,606\,062.12^3\gamma_2^3 + 2\,343\,582\,470\,520)L^{18}\\
&\qquad + (110.12^5\gamma_2^5 + 93\,035\,050\,963.12^2\gamma_2^2)L^{16}\\
&\qquad + (30\,009\,954.12^4\gamma_2^4 + 2\,992\,511\,028\,940.12\gamma_2)L^{14}\\
&\qquad + (11\,381\,036\,076.12^3\gamma_2^3 + 42\,359\,297\,252\,609)L^{12}\\
&\qquad + (-125\,917.12^5\gamma_2^5 + 355\,288\,039\,406.12^2\gamma_2^2)L^{10}\\
&\qquad + (51\,644\,991.12^4\gamma_2^4 + 1791\,596\,244\,808.12\gamma_2)L^8\\
&\qquad + (126.12^6\gamma_2^6 - 417\,739\,329.12^3\gamma_2^3 + 1\,466\,253\,058\,066)L^6\\
&\qquad + (8470.12^5\gamma_2^5 + 29\,673\,801.12^2\gamma_2^2)L^4]\\
&\quad + (-12^7\gamma_2^7 + 1738.12^4\gamma_2^4 - 403\,643.12\gamma_2)L^2 + 29 = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Man kann die Richtigkeit dieser Gleichungen dadurch prüfen, dass man für die absoluten Invarianten γ_2 und γ_3 solche Werthe annimmt, bei denen complexe Multiplication stattfindet. Dann zerfällt die L-Gleichung, wie bei einer anderen Gelegenheit gezeigt werden soll, in Factoren. Ist z. B. $\gamma_3 = 0$ und $n = 4l + 1$, so lässt sich von der linken Seite der L-Gleichung ein quadratischer Factor $L^4 + aL^2 + b$ absondern, dessen Coefficienten a und b ohne weitläufige Rechnung bestimmt werden können. Der andere Factor $4l^{\text{ten}}$ Grades ist ein vollständiges Quadrat. Ist $\gamma_2 = 0$ und $n = 6l + 1$, so lässt sich gleichfalls von der linken Seite der L-Gleichung ein solcher quadratischer Factor $L^4 + aL^2 + b$ absondern. Der andere Factor $6l^{\text{ten}}$ Grades ist ein vollständiger Cubus. Aehnliches findet bei anderen *singulären* Invarianten statt.

Dieser Umstand liefert nicht nur eine nützliche Controle, sondern er dient auch dazu, die langwierigen Rechnungen wesentlich abzukürzen.

Eine eingehendere Untersuchung dieser interessanten Beziehungen, welche bei Herstellung der Gleichungen (145) bis (152) bereits vortreffliche Dienste geleistet haben, bleibt einer späteren Abhandlung vorbehalten.

§ 20.

Berechnung der Grössen G_1, G_2, G_3 für $n = 5$ und $n = 7$.

Für $n = 5$ wird nach den Auseinandersetzungen in § 4

$$(153) \qquad \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\varpi}{5}, \varpi'\right) = e^{G_1 u^2} \sigma^5 u (\wp^2 u - G_1 \wp u + G_2),$$

wobei man nach den in § 9 gegebenen Methoden G_1 und G_2 leicht als Functionen von f darstellen kann; man braucht nur die Gleichungen (66) und (67) oder die Gleichungen (76) anzuwenden. Die Rechnung selbst bietet, nachdem die L-Gleichung bekannt ist, keine theoretischen Schwierigkeiten mehr; und zwar findet man

$$(154) \qquad \begin{cases} 18 g_3 G_1 = -\, g_2 \Delta f^4 + \Delta f^2 - 2 g_2^2 - 7 g_2 f^{-2} + 5 f^{-4}, \\ 12 G_2 = \Delta f^4 + g_2 + 7 f^{-2}. \end{cases}$$

Für $n = 7$ wird in ähnlicher Weise

$$(155) \qquad \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\varpi}{7}, \varpi'\right) = e^{G_1 u^2} \sigma^7 u (\wp^3 u - G_1 \wp^2 u + G_2 \wp u - G_3),$$

wobei

$$(156) \qquad \begin{cases} 12 g_2 G_1 = \Delta^3 f^{10} + 13 \Delta^2 f^6 + 47 \Delta f^2 - 54 g_3 + 14 f^{-2}, \\ 12 g_2^2 G_2 = -\, 3 g_3 \Delta^3 f^{10} - 39 g_3 \Delta^2 f^6 - \Delta^2 f^4 - 159 g_3 \Delta f^2 \\ \qquad\qquad - 6\Delta + 81 g_3^2 - 132 g_3 f^{-2} + 7 f^{-4}, \\ 144 G_3 = \Delta^3 f^{10} + 13 \Delta^2 f^6 + 59 \Delta f^2 - 18 g_3 + 74 f^{-2}. \end{cases}$$

§ 21.

Berechnung der Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ und $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$ der transformirten Function für $n = 5$ und für $n = 7$.

Die Werthe der Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ der transformirten Function sind nach den Gleichungen (77a) und (78a)

$$\bar{g}_2 = n^2 g_2 + \frac{4}{3} n^2 f^2 D^2 (f^{-2}), \qquad \bar{g}_3 = \frac{n}{18} f^8 D (f^{-8} \bar{g}_2).$$

Ist $n = 5$, so wird

$$\Delta^2 f^{12} + 10\Delta f^6 - 12 g_2 f^2 + 5 = 0,$$

also

$$D(f) = \frac{18 g_3}{\Delta^2 f^9 + 5\Delta f^3 - 2 g_2 f^{-1}}$$

$$= \frac{1}{30 g_3}(\Delta^2 f^9 + g_2 \Delta f^5 + 9\Delta f^3 + 2 g_2^2 f - 5 g_2 f^{-1}),$$

$$D(f^{-2}) = \frac{-1}{15 g_3}(\Delta^2 f^6 + g_2 \Delta f^2 + 9\Delta + 2 g_2^2 f^{-2} - 5 g_2 f^{-4}),$$

$$D^2(f^{-2}) = \frac{1}{25}(15\Delta f^2 - 18 g_2 f^{-2} + 195 f^{-4}).$$

Dies giebt

(157) $\bar{g}_2 - g_2 = 20(\Delta f^4 + 13 f^{-2})$ und $L^8 \bar{\gamma}_2 - \gamma_2 = 20(L^4 + 13 L^{-2})$.

Setzt man der Kürze wegen

$$F_1 = \Delta^2 f^{10} + 5\Delta f^4 - 2 g_2,$$

so folgt hieraus

$$F_1 D(f^{-8}\bar{g}_2) = -18 g_3 (85\Delta f^{-4} - 2 g_2 f^{-8} + 2605 f^{-10}),$$

oder

(158) $$\begin{cases} F_1(\bar{g}_3 - g_3) = -420 g_3 (\Delta f^4 + 31 f^{-2}), \\ L^{12}\bar{\gamma}_3 - \gamma_3 = \dfrac{-420\gamma_3 (L^4 + 31 L^{-2})}{L^{10} + 5L^4 - 2\gamma_2}. \end{cases}$$

Für $n = 7$ ist die f-Gleichung

$$\Delta^4 f^{16} + 14\Delta^3 f^{12} + 63\Delta^2 f^8 + 70\Delta f^4 + 216 g_3 f^2 - 7 = 0.$$

Hier sei

$$28 F_1 = 8\Delta^4 f^{14} + 84\Delta^3 f^{10} + 252\Delta^2 f^6 + 140\Delta f^2 + 216 g_3$$

$$= -28(\Delta^3 f^{10} + 9\Delta^2 f^6 + 15\Delta f^2 + 54 g_3 - 2 f^{-2}),$$

dann wird

$$D(f^{-2}) = \frac{54 g_2^2}{7 F_1 f^2} = \frac{1}{14 g_2}(\Delta^3 f^8 + 13\Delta^2 f^4 + 47\Delta - 54 g_3 f^{-2} + 14 f^{-4}),$$

$$D^2(f^{-2}) = \frac{27 g_2}{49 F_1}(3\Delta^3 f^8 + 37\Delta^2 f^4 + 105\Delta + 72 g_3 f^{-2} + 14 f^{-4}).$$

Daraus folgt

$$\bar{g}_2 - 49 g_2 = \frac{12 g_2}{F_1}(9\Delta^3 f^{10} + 111\Delta^2 f^6 + 315\Delta f^2 + 216 g_3 + 42 f^{-2}),$$

$$48 g_2 = \frac{12 g_2}{F_1}(-4\Delta^3 f^{10} - 36\Delta^2 f^6 - 60\Delta f^2 - 216 g_3 + 8 f^{-2}),$$

also

(159) $\bar{g}_2 - g_2 = \dfrac{60 g_2}{F_1}(\Delta^3 f^{10} + 15\Delta^2 f^6 + 51\Delta f^2 + 10 f^{-2}).$

Hieraus ergiebt sich dann nach einigen Zwischenrechnungen

(160) $3(\bar{g}_3 - g_3) = 7(\Delta^3 f^{10} + 43\Delta^2 f^6 + 467\Delta f^2 + 1634 f^{-2})$.

In dem Falle, wo die L-Gleichung die Grösse γ_2 nur in der ersten Potenz, die Grösse γ_3 aber gar nicht enthält, wie das bei $n = 5$ eintritt, kann man $\bar{\gamma}_2$ noch einfacher berechnen. Es ist nämlich z. B. für $n = 5$

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0. \tag{161}$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist

$$L_\infty^2 = \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)}{Q^2(\omega, \omega')}$$

und $\bar{\gamma}_2$ sei die absolute Invariante der ihr entsprechenden transformirten Function. Wendet man auf diese nochmals eine Transformation 5ten Grades an, so erhält man die Gleichung

$$\bar{L}^{12} + 10\bar{L}^6 - 12\bar{\gamma}_2 \bar{L}^2 + 5 = 0, \tag{161a}$$

welche nach Gleichung (137) unter anderen auch die Wurzel

$$\bar{L}_0^2 = \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{5}, \frac{\omega'}{5}\right)}{Q^2\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)}$$

hat. Nun wird aber ganz allgemein

$$Q\left(\frac{\omega}{n}, \frac{\omega'}{n}\right) = \left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{12}} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - h^{2\nu}) = \sqrt{n}\, Q(\omega, \omega'),$$

folglich wird hier

$$\bar{L}_0^2 = \frac{5}{L_\infty^2}.$$

In ähnlicher Weise findet man zu jeder Wurzel L^2 der Gleichung (161) eine zugehörige Wurzel $\bar{L}^2$ der Gleichung (161a), so dass

$$L^2 \bar{L}^2 = 5$$

wird. Durch diese Beziehung geht die Gleichung (161a) über in

$$15625 + 1250L^6 - 60\bar{\gamma}_2 L^{10} + 5L^{12} = 0,$$

oder in Uebereinstimmung mit Gleichung (157) in

$$L^8 \bar{\gamma}_2 - \gamma_2 = 20(L^4 + 13L^{-2}).$$

In dem Falle, wo die L-Gleichung die Grösse γ_3 nur in der ersten Potenz, die Grösse γ_2 aber gar nicht enthält, wie das bei $n = 7$ eintritt, kann man $\bar{\gamma}_3$ einfacher berechnen. Es ist z. B. für $n = 7$

$$L^{16} + 14L^{12} + 63L^8 + 70L^4 + 216\gamma_3 L^2 - 7 = 0, \tag{162}$$

und zu jeder Wurzel L^2 dieser Gleichung gibt es eine Wurzel $\bar{L}^2$ der Gleichung

(162a) $\bar{L}^{16} + 14\bar{L}^{12} + 63\bar{L}^{8} + 70\bar{L}^{4} + 216\bar{\gamma}_3\bar{L}^{2} - 7 = 0,$

so dass

$$L^2\bar{L}^2 = -7$$

wird. Dies giebt dann die Gleichung

$$7^8 + 14 \cdot 7^6 L^4 + 63 \cdot 7^4 L^8 + 70 \cdot 7^2 L^{12} - 216\bar{\gamma}_3 \cdot 7 L^{14} - 7 L^{16} = 0,$$

oder in Uebereinstimmung mit Gleichung (160)

$$3(\bar{\gamma}_3 L^{12} - \gamma_3) = 7(L^{10} + 43 L^6 + 467 L^2 + 1634 L^{-2}).$$

Abschnitt V.

Theorie der f-Gleichung, wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 1$ ist.

§ 22.

Wiederholte Transformation.

Sind a und b zwei Primzahlen, und hat

$$n = ab$$

die Form $6l \pm 1$, so werde zunächst eine Transformation a^{ten} Grades ausgeführt, wenn $a \geqq b$ ist. Die zugehörige L-Gleichung hat dann die Wurzeln

$$L_\infty^2 = L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right) = \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)}{Q^2(\omega, \omega')},$$

$$L_r^2 = L^2\left(\omega, \frac{24r\omega + \omega'}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \frac{Q^2\left(\omega, \frac{24r\omega + \omega'}{a}\right)}{Q^2(\omega, \omega')},$$

wo $r = 0, 1, 2, \ldots a - 1$ zu setzen ist.*) Wählt man nun eine dieser Wurzeln heraus, bezeichnet die primitiven Perioden der zugehörigen transformirten Function $\bar{\wp} u$ mit $2\bar{\omega}$, $2\bar{\omega}'$, berechnet nach § 10 die zugehörigen Invarianten $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ oder $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$ und führt eine zweite Transformation, aber vom b^{ten} Grade aus, so sind

$$\bar{L}^2\left(\frac{\bar{\omega}}{b}, \bar{\omega}'\right) = \frac{Q^2\left(\frac{\bar{\omega}}{b}, \bar{\omega}'\right)}{Q^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')},$$

$$\bar{L}^2\left(\bar{\omega}, \frac{24s\bar{\omega} + \bar{\omega}'}{b}\right) = (-1)^{\frac{b-1}{2}} \frac{Q^2\left(\bar{\omega}, \frac{24s\bar{\omega} + \bar{\omega}'}{b}\right)}{Q^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')},$$

wo $s = 0, 1, 2, \cdots b - 1$ ist, die $b + 1$ Wurzeln der neuen L-Gleichung, bei der aber die Coefficienten *ganze rationale* Functionen von $\bar{\gamma}_2$, $\bar{\gamma}_3$ sind.

---

*) $L^2\left(\omega, \frac{24r\omega + \omega'}{a}\right)$ sei gleichbedeutend mit $L^2\left(\frac{24r\omega + \omega'}{a}, -\omega\right)$.

Es werden dann

$$
(163)\left\{\begin{aligned}
&L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \omega'\right)\overline{L}^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right) &&= \frac{Q^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
& &&= L^2\left(\frac{\omega}{ab},\ \omega'\right), \\
&L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \omega'\right)\overline{L}^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right) &&= (-1)^{\frac{b-1}{2}}\frac{Q^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
& &&= L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24s\omega+a\omega'}{ab}\right), \\
&L^2\left(\omega,\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right)\overline{L}^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right) &&= (-1)^{\frac{a-1}{2}}\frac{Q^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
& &&= L^2\left(\frac{\omega}{b},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right), \\
&L^2\left(\omega,\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right)\overline{L}^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right) &&= (-1)^{\frac{a+b-2}{2}}\frac{Q^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right)}{Q^2(\omega,\ \omega')} \\
& &&= L^2\left(\omega,\ \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{ab}\right)
\end{aligned}\right.
$$

sämmtlich zur Transformation ab^{ten} Grades gehören; nur in dem Falle, wo $a = b$ ist, giebt

$$
L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{\omega'}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} a \quad \text{und} \quad L^2\left(\frac{\omega}{a},\ \frac{24r\omega+\omega'}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} a
$$

keine eigentliche Transformation vom Grade a^2, sondern die ganzzahlige Multiplication mit a. Diese $a+1$ Grössen L^2 sind dann also auszunehmen, so dass die Anzahl der von einander verschiedenen Grössen L^2 bei der Transformation ab^{ten} Grades gleich

$$(a+1)\,(b+1)$$

wird, wenn $a > b$ ist, und gleich

$$a(a+1),$$

wenn $a = b$ ist.

Diese Zahlen $(a+1)(b+1)$ oder $a(a+1)$ geben auch den Grad der Gleichung an, welcher die zur Transformation ab^{ten} Grades gehörigen Grössen L^2 genügen. Die wirkliche Bildung der L-Gleichung kann hier nämlich in folgender Weise ausgeführt werden.

Es sei $S_\alpha(\overline{\omega},\ \overline{\omega}')$ definirt durch die Gleichung

$$
S_\alpha(\overline{\omega},\ \overline{\omega}') = L^{2\alpha}(\overline{\omega},\ \overline{\omega}')\left[\overline{L}^{2\alpha}\left(\frac{\overline{\omega}}{b},\overline{\omega}'\right) + \sum_{s=0}^{b-1}\overline{L}^{2\alpha}\left(\overline{\omega},\ \frac{24s\overline{\omega}+\overline{\omega}'}{b}\right)\right];
$$

dann wird
$$S(\bar{\omega}, \bar{\omega}') = L^{2\alpha}(\bar{\omega}, \bar{\omega}')\, G(\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3).$$
Dabei ist $G(\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3)$ eine *ganze rationale* Function der Invarianten $\bar{\gamma}_2$ und $\bar{\gamma}_3$, welche zu $\wp(u \mid \bar{\omega}, \bar{\omega}')$ gehören. Da aber $\bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_3$ rationale Functionen von $L^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ sind, so ist $S_\alpha(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ eine rationale Function von $L^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$ und γ_2, γ_3. Bildet man jetzt
$$\Sigma_\alpha = \Sigma S_\alpha(\bar{\omega}, \bar{\omega}'),$$
wo sich die Summe auf alle $a+1$ Werthepaare von $\bar{\omega}, \bar{\omega}'$ bezieht, so erhält man eine symmetrische Function der $a+1$ Grössen $L^2(\bar{\omega}, \bar{\omega}')$, also eine rationale Function von γ_2 und γ_3.

Andererseits geht aber aus der Bildung von Σ_α hervor, dass Σ_α die Summe der α^{ten} Potenzen der $(a+1)(b+1)$ Grössen L^2 ist, welche zur Transformation ab^{ten} Grades gehören.

Diese $(a+1)(b+1)$ Grössen L^2 genügen also einer Gleichung $(a+1)(b+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten mit Hülfe der Newton'schen Formeln jetzt ohne Schwierigkeit gefunden werden können.

Natürlich kann man zu dieser Gleichung auch dadurch gelangen, dass man aus der Gleichung $(a+1)^{\text{ten}}$ Grades für $L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)$ und aus der Gleichung $(b+1)^{\text{ten}}$ Grades für
$$\bar{L}\left(\frac{\omega}{ab}, \omega'\right) = \frac{L^2\left(\frac{\omega}{ab}, \omega'\right)}{L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)}$$
die Grösse $L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)$ eliminirt, nachdem man für $\bar{\gamma}_2$ und $\bar{\gamma}_3$ ihre Werthe als rationale Functionen von $L^2\left(\frac{\omega}{a}, \omega'\right)$ eingesetzt hat.

In dem Falle, wo $a = b$ ist, sondert sich der Factor $(L^2 \pm a)^{a+1}$ ab, so dass für L^2 nur eine Gleichung von $a(a+1)^{\text{ten}}$ Grade übrig bleibt.

Das beschriebene Verfahren kann man beliebig fortsetzen und dadurch die Transformation für jeden zusammengesetzten Transformationsgrad auf den Fall zurückführen, wo dieser Grad eine Primzahl ist.

Man findet dadurch auch unmittelbar, dass bei einer Transformation n^{ten} Grades, wo
$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$
und $a, b, c, \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen von der Form $6l \pm 1$ sind, die Anzahl der möglichen Transformationen gleich
$$T(n) = n\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)\ldots$$
ist, und dass diese Zahl auch den Grad der zugehörigen L-Gleichung angiebt. (Man vergleiche hiermit die Auseinandersetzungen in § 5.)

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass auch hier die L-Gleichung nur der Kürze wegen statt der f-Gleichung benutzt ist, in welche sie durch die Substitutionen

$$L = Q^{n-1} f, \qquad \gamma_2 = \frac{g_2}{Q^8}, \qquad \gamma_3 = \frac{g_3}{Q^{12}}$$

übergeht.

§ 23.

Reduction der f-Gleichung, wenn n ein Quadrat von der Form $6l + 1$ ist.

Die f-Gleichung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die L-Gleichung reducirt sich wesentlich, wenn n ein Quadrat von der Form $6l + 1$ ist. Es lässt sich dann nämlich zeigen, dass nicht nur f^2, sondern schon f selbst die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades ist, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Es sei zunächst n gleich a^2 und $a = 2\tau + 1$ eine Primzahl; ferner sei g in Bezug auf den Modul n eine primitive Wurzel, so dass

$$(164) \qquad \begin{cases} g^{2\tau} \equiv +1 \pmod{a}, & g^{\tau} \equiv -1 \pmod{a}, \\ g^{2a\tau} \equiv +1 \pmod{n}, & g^{a\tau} \equiv -1 \pmod{n} \end{cases}$$

wird. Bildet man jetzt den Ausdruck

$$y = \prod_{\beta=0}^{a\tau-1} \frac{\wp\left(\frac{2g^{\beta}\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4g^{\beta}\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^{\beta}\varpi}{n}\right)} \prod_{\gamma=0}^{\tau-1} \frac{\wp\left(\frac{2g^{\gamma}\varpi}{a}\right) - \wp\left(\frac{4g^{\gamma}\varpi}{a}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^{\gamma}\varpi}{a}\right)},$$

so wird nach Gleichung (47) y gleich $\pm f$, denn die Grössen $\wp\left(\frac{2g^{\beta}\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4g^{\beta}\varpi}{n}\right)$ sind identisch mit den Grössen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)$, bei denen α den Factor a nicht enthält, während die Grössen $\wp\left(\frac{2g^{\gamma}\varpi}{a}\right) - \wp\left(\frac{4g^{\gamma}\varpi}{a}\right)$ mit den übrigen Differenzen $\wp\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right) - \wp\left(\frac{4\alpha\varpi}{n}\right)$ übereinstimmen. Ebenso sind, abgesehen vom Vorzeichen, $\wp'\left(\frac{2g^{\gamma}\varpi}{a}\right)$ und $\wp'\left(\frac{2g^{\beta}\varpi}{n}\right)$ mit den Grössen $\wp'\left(\frac{2\alpha\varpi}{n}\right)$ identisch, je nachdem α durch a theilbar ist oder nicht.

Da nun $\wp(2u)$, $\wp(gu)$, $\wp(au)$, $\frac{\wp'(gu)}{\wp' u}$ rationale Functionen von $\wp u$ sind, und da im Nenner von y die Anzahl der Factoren gleich $a\tau + \tau$ gleich $(a + 1)\tau$ gleich $2\tau(\tau + 1)$ immer *gerade* ist, so ist y sicher eine *rationale* Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)$, also

$$y = F\left(\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)\right).$$

Ausserdem wird aber wegen der Congruenzen (164)

$$\frac{\wp\left(\frac{2g^{a\tau}\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4g^{a\tau}\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^{a\tau}\varpi}{n}\right)}=-\frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right)-\wp\left(\frac{4\varpi}{n}\right)}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{n}\right)},$$

$$\frac{\wp\left(\frac{2g^{\tau}\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4g^{\tau}\varpi}{a}\right)}{\wp'\left(\frac{2g^{\tau}\varpi}{a}\right)}=-\frac{\wp\left(\frac{2\varpi}{a}\right)-\wp\left(\frac{4\varpi}{a}\right)}{\wp'\left(\frac{2\varpi}{a}\right)}.$$

Es ändert sich daher y gar nicht, wenn man $\frac{2\varpi}{n}$ mit $\frac{2g\varpi}{n}$ vertauscht, d. h. y, und deshalb auch f, ist eine cyklische Function von

$$\wp\left(\frac{2\varpi}{n}\right),\quad \wp\left(\frac{2g\varpi}{n}\right),\quad \wp\left(\frac{2g^2\varpi}{n}\right),\quad \dots \wp\left(\frac{2g^{a\tau-1}\varpi}{n}\right).$$

Damit ist bewiesen, dass in diesem Falle nicht nur f^2, sondern schon f *selbst* einer Gleichung genügt, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Man kann diesen Satz auch so fassen: Ist $n=a^2$ und a eine Primzahl von der Form $6l+1$, so genügt nicht nur L^2, sondern schon L *selbst* einer Gleichung $a(a+1)^{\text{ten}}$ Grades, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von γ_2 und γ_3 sind.

Diesen Satz kann man noch in dem Sinne verallgemeinern, dass n auch das Quadrat einer beliebig zusammengesetzten Zahl von der Form $6l+1$ sein darf; nur ist dann der Grad der betreffenden Gleichung $T(n)$. Ist z. B.

$$n=a^2b^2,$$

so kann man zuerst eine Transformation vom Grade a^2 und dann eine Transformation vom Grade b^2 vornehmen. Dadurch erhält man zuerst eine Gleichung $a(a+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen

$$L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega\right),\quad \gamma_2,\quad \gamma_3;$$

sodann eine Gleichung $b(b+1)^{\text{ten}}$ Grades zwischen

$$\overline{L}\left(\frac{\omega}{n},\omega'\right)=\frac{L\left(\frac{\omega}{n},\omega'\right)}{L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega'\right)},\quad \overline{\gamma_2},\quad \overline{\gamma_3},$$

wo $\overline{\gamma_2}$, $\overline{\gamma_3}$ noch rationale Functionen von $L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega'\right)$, γ_2, γ_3 sind. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $L\left(\frac{\omega}{a^2},\omega'\right)$, so erhält man eine Gleichung $a(a+1)\,b(b+1)^{\text{ten}}$ Grades für $L\left(\frac{\omega}{n},\omega'\right)$, wenn

$a > b$ ist. Dagegen reducirt sich der Grad der Gleichung auf $a^3(a+1)$, wenn $a = b$ ist.

In ähnlicher Weise findet man durch wiederholte Transformation den Satz, auch wenn

$$n = a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma} \ldots$$

und von der Form $6l + 1$ ist.

§ 24.

Die $a(a+1)$ Wurzeln der f-Gleichung, wenn n das Quadrat einer Primzahl ist und die Form $6l + 1$ hat.

Beschränken wir uns jetzt auf den Fall, wo n das Quadrat einer Primzahl a ist und die Form $6l + 1$ hat; so lassen sich die Wurzeln der f-Gleichung sehr leicht angeben, wenn man von den Untersuchungen in Abschnitt III Gebrauch macht.

Setzt man nämlich

$$(166)\quad f_\infty = f\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right) = \frac{Q\left(\frac{\omega}{n}, \omega'\right)}{Q^n(\omega, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} a \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - h^{2n\nu}}{(1 - h^{2\nu})^n},$$

so wird f_∞ nach den Angaben des vorigen Paragraphen eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\omega}{n}\right)$, welche in $f_{r,s}$ übergeht, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden

$$48(r + as)\omega + 2\omega', \quad -2\omega$$

vertauscht, wobei r und s die Werthe $0, 1, 2, \ldots a-1$, (also $r + as$ die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$) durchlaufen. Dies giebt die n Wurzeln

$$(167)\qquad f_{r,s} = \frac{Q\left(\frac{24(r+as)\omega + \omega'}{n}, -\omega\right)}{Q^n[24(r+as)\omega + \omega', -\omega]}.$$

Nun ist aber nach Tabelle (134a)

$$\varrho\begin{pmatrix} p, & 1 \\ p', & q' \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}(p+q'-3)},$$

also

$$\varrho\begin{pmatrix} 24(r+as), & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{4}} \quad \text{und} \quad \varrho\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = e^{-\frac{\pi i}{4}};$$

folglich wird

$$Q[24(r+as)\omega + \omega', -\omega] = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q(\omega, \omega'),$$

$$Q\left(\frac{24(r+as)\omega + \omega'}{n}, -\omega\right) = e^{-\frac{\pi i}{4}} Q\left(\omega, \frac{24(r+as)\omega + \omega'}{n}\right).$$

Da nun ausserdem $n - 1 = a^2 - 1$ sicher durch 8 theilbar ist, so wird

$$(168)\; f_{r,s} = \frac{Q\left(\omega, \frac{24(r+as)\omega+\omega'}{n}\right)}{Q^n(\omega, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} h^{\frac{-n^2+1}{12n}} \varepsilon^{r+as} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24(r+as)\nu}}{(1-h^{2\nu})^n},$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist. Die noch übrigen $a - 1$ Wurzeln $f_1, f_2, \ldots f_{a-1}$ der f-Gleichung erhält man aus f_∞, indem man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden

$$(169) \qquad 2\varpi = 48t\omega + 2a\omega', \qquad 2\varpi' = 2p'\omega + 2q'\omega'$$

vertauscht. Dabei durchläuft t die Werthe $1, 2, \ldots a - 1$, während die ganzen Zahlen p' und q' für jeden Werth von t aus der diophantischen Gleichung

$$(170) \qquad 24tq' - ap' = +1$$

bestimmt werden. Dadurch erhält man

$$(171) \qquad f_t = \frac{Q\left(\frac{24t\omega + a\omega'}{n}, p'\omega + q'\omega'\right)}{Q^n(24t\omega + a\omega', p'\omega + q'\omega')}.$$

Jetzt ist aber

$$Q(24t\omega + a\omega', p'\omega + q'\omega') = \varrho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix} Q(\omega, \omega'),$$

$$Q\left(\frac{24t\omega + a\omega'}{n}, p'\omega + q'\omega'\right) = \varrho\begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & aq'\end{pmatrix} Q\left(\frac{\omega}{a}, \frac{24t\omega + a\omega'}{n}\right).$$

Dies giebt

$$(172) \qquad f_t = e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \left[\varrho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}\right]^{-n} \frac{Q\left(\frac{\omega}{a}, \frac{24t\omega + a\omega'}{n}\right)}{Q^n(\omega, \omega')},$$

oder, wenn man der Kürze wegen den Factor $\varrho\begin{pmatrix}24t, & a\\ p', & q'\end{pmatrix}$ mit ϱ bezeichnet,

$$(173) \qquad f_t = e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{a}\, h^{\frac{-n+1}{12}} \varepsilon^{at} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{2\nu}\varepsilon^{24at\nu}}{(1-h^{2\nu})^n}.$$

Diese Darstellung der Wurzeln hat den Vorzug, dass sie sämmtlich denselben Nenner haben, und dass sich die Zähler nach Potenzen von h entwickeln lassen. Da man nun die Coefficienten der f-Gleichung ihrer Form nach genau angeben kann, so ist es durch Ausführung dieser Entwickelungen mit Hülfe der Newton'schen Formeln möglich, die f-Gleichung selbst vollständig herzustellen. Wenn auch die wiederholte Transformation schneller zum Ziele führt, so liegt in diesem Umstande doch eine werthvolle Methode, die Richtigkeit der gefundenen Resultate zu prüfen.

§ 25.

Die Transformation 25ten Grades.

Die Untersuchungen der vorhergehenden Paragraphen sollen zunächst auf den Fall $n = 25$ angewendet werden. Nach Gleichung (166) ist die erste Wurzel der f-Gleichung hier

$$(174)\qquad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{25},\, \omega'\right)}{Q^{25}(\omega,\, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{12} 5 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{50\nu}}{(1-h^{2\nu})^{25}};$$

weitere 25 Wurzeln liefert die Gleichung (168), nämlich

$$(175)\qquad f_{r,s} = \frac{Q\left(\omega,\, \frac{24(r+5s)\omega+\omega'}{25}\right)}{Q^{25}(\omega,\, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{12} h^{-\frac{52}{25}} \varepsilon^{r+5s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{\frac{2\nu}{25}} \varepsilon^{24(r+5s)\nu}}{(1-h^{2\nu})^{25}}.$$

Die vier noch übrigen Wurzeln sind nach Gleichung (173) zu bilden, wobei zuerst der Factor ϱ zu bestimmen ist. Nach Tabelle (134a) wird

$$\text{für } t = 1 \quad \varrho\begin{pmatrix}24, & 5\\ 19, & 4\end{pmatrix} = e^{\frac{5\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-9\pi i} = -1,$$

$$\text{,,}\quad t = 2 \quad \varrho\begin{pmatrix}48, & 5\\ 19, & 2\end{pmatrix} = e^{\frac{7\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-14\pi i} = +1,$$

$$\text{,,}\quad t = 3 \quad \varrho\begin{pmatrix}72, & 5\\ 43, & 3\end{pmatrix} = e^{\frac{12\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-24\pi i} = +1,$$

$$\text{,,}\quad t = 4 \quad \varrho\begin{pmatrix}96, & 5\\ 19, & 1\end{pmatrix} = e^{\frac{14\pi i}{12}}, \quad e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)} \varrho^{-n} = e^{-29\pi i} = -1.$$

Bezeichnet man also der Kürze wegen $Q(\omega, \omega')$ mit Q, so wird

$$(176)\quad \begin{cases} Q^{25} f_1 = -Q\left(\frac{\omega}{5},\, \frac{5\omega'+24\omega}{25}\right) = -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^5 \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu} \varepsilon^{120\nu}), \\ Q^{25} f_2 = +Q\left(\frac{\omega}{5},\, \frac{5\omega'+48\omega}{25}\right) = +\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{10} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu} \varepsilon^{240\nu}), \\ Q^{25} f_3 = +Q\left(\frac{\omega}{5},\, \frac{5\omega'+72\omega}{25}\right) = +\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{15} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu} \varepsilon^{360\nu}), \\ Q^{25} f_4 = -Q\left(\frac{\omega}{5},\, \frac{5\omega'+96\omega}{25}\right) = -\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{5}\, h^{\frac{1}{12}} \varepsilon^{20} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu} \varepsilon^{480\nu}). \end{cases}$$

Die L-Gleichung für $n = 25$ findet man übrigens am schnellsten wohl in folgender Weise. Es sei

$$L = Q^{24} f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{25}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad x = \frac{Q\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad \bar{x} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{25}, \omega'\right)}{Q\left(\frac{\omega}{5}, \omega'\right)} = \frac{L}{x}.$$

Dann ist nach Gleichung (145)

$$(177) \qquad x^{12} + 10x^6 - 12\gamma_2 x^2 + 5 = 0,$$

und wenn man die Transformation wiederholt,

$$\bar{x}^{12} + 10\bar{x}^6 - 12\bar{\gamma}_2\bar{x}^2 + 5 = 0,$$

oder

$$(178) \qquad L^{12} + 10x^6 L^6 - 12\bar{\gamma}_2 x^{10} L^2 + 5x^{12} = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (157)

$$\bar{\gamma}_2 x^{10} = 20x^6 + \gamma_2 x^2 + 260,$$

so dass Gleichung (178) übergeht in

$$(178\text{a}) \qquad L^{12} + 10x^6 L^6 - 12(20x^6 + \gamma_2 x^2 + 260) L^2 + 5x^{12} = 0.$$

Jetzt lässt sich aber die linke Seite dieser Gleichung in die Factoren

$$L^2 - 5, \quad L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L - x^6,$$
$$L^5 - 5L^4 + 15L^3 - 25L^2 + 25L + x^6$$

zerlegen. Durch die Entwickelung nach Potenzen von h kann man hierbei noch zeigen, dass von diesen drei Factoren nur der mittelste verschwindet, folglich wird

$$(179) \qquad x^6 = L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L.$$

Setzt man diesen Werth von x^6 in die Gleichung (177) oder in die daraus hervorgehende Gleichung

$$(177\text{a}) \qquad \begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 &= (x^{12} + 10x^6 + 5)^3 \\ &: (x^{12} + 22x^6 + 125)(x^{12} + 4x^6 - 1)^2 : x^6 \end{aligned}$$

ein, so wird in Uebereinstimmung mit der von Herrn Gierster angegebenen Formel

$$(180) \left\{ \begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = {} & (L^{10} + 10L^9 + 55L^8 + 200L^7 + 525L^6 \\ & + 1010L^5 + 1425L^4 + 1400L^3 + 875L^2 + 250L + 5)^3 \\ & : (L^2 + 2L + 5)(L^{14} + 14L^{13} + 104L^{12} + 520L^{11} + 1925L^{10} \\ & + 5504L^9 + 12411L^8 + 22\text{[illegible]}76L^7 + 33760L^5 \\ & + 26999L^4 + 14696L^3 + 4616L^2 + 490L - 5)^2 \\ & : (L^5 + 5L^4 + 15L^3 + 25L^2 + 25L), \end{aligned} \right.$$

oder

$$(181)\quad \left\{\begin{aligned} & L^{30}+5[6L^{29}+93L^{28}+980L^{27}+7830L^{26}+50256L^{25}\\ &\qquad +268400L^{24}+1220700L^{23}+4804125L^{22}\\ &\qquad +16546750L^{21}+50280063L^{20}+135548760L^{19}\\ &\qquad +325391355L^{18}+696975750L^{17}\\ &\qquad +1332883725L^{16}+2274011260L^{15}\\ &\qquad +3453611025L^{14}+4651924950L^{13}\\ &\qquad +5527353375L^{12}+5749995000L^{11}\\ &\qquad +5184120315L^{10}+3995803150L^{9}\\ &\qquad +2584554825L^{8}+1367125500L^{7}\\ &\qquad +569806000L^{6}]\\ &\qquad +(884232000-12^3\gamma_2^{\,3})L^5\\ &\qquad +(186153750-5\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L^4\\ &\qquad +(22292500-15\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L^3\\ &\qquad +(1003125-25\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L^2\\ &\qquad +(18750-25\cdot 12^3\gamma_2^{\,3})L+125=0. \end{aligned}\right.$$

Wesentlich einfacher werden diese Gleichungen, wenn man $L+1=M$ als Veränderliche einführt. Dadurch geht nämlich Gleichung (179) über in

$$(179\text{a})\qquad x^6 = M^5+5M^3+5M-11,$$

und daraus folgt

$$(180\text{a})\quad \left\{\begin{aligned} & 1728\gamma_2^{\,3}:(216\gamma_3)^2:1 = (M^{10}+10M^8+35M^6-12M^5+50M^4\\ &\qquad\qquad -60M^3+25M^2-60M+16)^3\\ &\qquad :(M^2+4)(M^4+3M^2+1)^2(M^{10}+10M^8\\ &\qquad\qquad +35M^6-18M^5+50M^4-90M^3\\ &\qquad\qquad +25M^2-90M+76)^2\\ &\qquad :(M^5+5M^3+5M-11). \end{aligned}\right.$$

§ 26.

Die Transformation 49^{ten} Grades.

Für $n=49$ ist

$$(182)\qquad f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{49},\,\omega'\right)}{Q^{49}(\omega,\,\omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{24} 7 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{98\nu}}{(1-h^{2\nu})^{49}};$$

dann liefert die Gleichung (168) weiter die 49 Wurzeln

$$(183)\quad f_{r,s} = \frac{Q\left(\omega,\,\frac{24(r+7s)\omega+\omega'}{49}\right)}{Q^{49}(\omega,\,\omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{24} h^{-\frac{200}{49}} \varepsilon^{r+7s} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{\frac{2\nu}{49}}\varepsilon^{24(r+7s)\nu}}{(1-h^{2\nu})^{49}}.$$

Die sechs noch übrigen Wurzeln sind nach Gleichung (173) zu bilden, und zwar wird nach Tabelle (134a)

$$
\begin{array}{llll}
\text{für } t=1 & \varrho\begin{pmatrix}24,7\\17,5\end{pmatrix}=e^{\frac{\pi i}{6}}, & e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{11\pi i}{2}}=+i, \\
\text{„ } t=2 & \varrho\begin{pmatrix}48,7\\41,6\end{pmatrix}=e^{\frac{3\pi i}{4}}, & e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{67\pi i}{2}}=+i, \\
\text{„ } t=3 & \varrho\begin{pmatrix}72,7\\41,4\end{pmatrix}=e^{\frac{7\pi i}{12}}, & e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{53\pi i}{2}}=-i, \\
\text{„ } t=4 & \varrho\begin{pmatrix}96,7\\41,3\end{pmatrix}=e^{\pi i}, & e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{95\pi i}{2}}=+i, \\
\text{„ } t=5 & \varrho\begin{pmatrix}120,7\\17,1\end{pmatrix}=e^{\frac{5\pi i}{6}}, & e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{81\pi i}{2}}=-i, \\
\text{„ } t=6 & \varrho\begin{pmatrix}144,7\\41,2\end{pmatrix}=e^{\frac{17\pi i}{12}}, & e^{\frac{\pi i}{12}(aq'-3)}\varrho^{-n}=e^{-\frac{137\pi i}{2}}=-i.
\end{array}
$$

Daraus folgt

$$
(184)\left\{
\begin{aligned}
Q^{49}f_1 &= +i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{24\omega+7\omega'}{49}\right) = +i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\varepsilon^{7}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{168\nu}),\\
Q^{49}f_2 &= +i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{48\omega+7\omega'}{49}\right) = +i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\varepsilon^{14}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{336\nu}),\\
Q^{49}f_3 &= -i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{72\omega+7\omega'}{49}\right) = -i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\varepsilon^{21}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{504\nu}),\\
Q^{49}f_4 &= +i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{96\omega+7\omega'}{49}\right) = +i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\varepsilon^{28}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{672\nu}),\\
Q^{49}f_5 &= -i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{120\omega+7\omega'}{49}\right) = -i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\varepsilon^{35}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{840\nu}),\\
Q^{49}f_6 &= -i\,Q\left(\frac{\omega}{7},\ \frac{144\omega+7\omega'}{49}\right) = -i\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{7}\,h^{\frac{1}{12}}\varepsilon^{42}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{1008\nu}).
\end{aligned}\right.
$$

Mit Hülfe der Newton'schen Formeln könnte man jetzt die L-Gleichung bilden. Es soll aber lieber die wiederholte Transformation benutzt werden. Es sei

$$L = Q^{48} f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{49}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad x = \frac{Q\left(\frac{\omega}{7}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad \bar{x} = \frac{Q\left(\frac{\omega}{49}, \omega'\right)}{Q\left(\frac{\omega}{7}, \omega'\right)} = \frac{L}{x},$$

dann ist nach Gleichung (146)

$$(185)\qquad x^{16} + 14x^{12} + 63x^8 + 70x^4 + 216\gamma_3 x^2 - 7 = 0,$$

und wenn man die Transformation wiederholt,

$$\bar{x}^{16} + 14\bar{x}^{12} + 63\bar{x}^8 + 70\bar{x}^4 + 216\bar{\gamma}_3\bar{x}^2 - 7 = 0,$$

oder

$$(186)\quad L^{16} + 14x^4L^{12} + 63x^8L^8 + 70x^{12}L^4 + 216\bar{\gamma}_3x^{14}L^2 - 7x^{16} = 0.$$

Nun ist aber nach Gleichung (160)

$$3\bar{\gamma}_3 x^{14} = 7(x^{12} + 43x^8 + 467x^4 + 1634) + 3\gamma_3 x^2,$$

so dass Gleichung (186) übergeht in

$$(186\text{a})\quad \begin{aligned} &L^{16} + 14x^4L^{12} + 63x^8L^8 + 70x^{12}L^4 \\ &+ 504(x^{12} + 43x^8 + 467x^4 + 1634)L^2 + 216\gamma_3x^2L^2 - 7x^{16} = 0. \end{aligned}$$

Jetzt lässt sich aber die linke Seite dieser Gleichung in die Factoren

$$\begin{aligned} L^2 + 7,\quad & L^7 + 7L^6 + 21L^5 + 49L^4 + 7(x^4 + 21)L^3 + 7(5x^4 + 49)L^2 \\ & \qquad + 49(x^4 + 7)L - x^8, \\ & L^7 - 7L^6 + 21L^5 - 49L^4 + 7(x^4 + 21)L^3 - 7(5x^4 + 49)L^2 \\ & \qquad + 49(x^4 + 7)L + x^8 \end{aligned}$$

zerlegen. Die Entwickelung nach Potenzen von h zeigt, dass von diesen drei Factoren nur der zweite verschwinden kann. Man erhält also die Gleichung

$$(187)\quad \begin{aligned} &L^7 + 7L^6 + 21L^5 + 49L^4 + 147L^3 + 343L^2 + 343L \\ &\qquad + 7(L^3 + 5L^2 + 7L)x^4 - x^8 = 0. \end{aligned}$$

Um die Elimination von x zu vereinfachen, bringt man die Gleichung (185) auf die Form

$$(185\text{a})\quad \begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = {} & (x^8 + 13x^4 + 49)(x^8 + 5x^4 + 1)^3 \\ & : (x^{16} + 14x^{12} + 63x^8 + 70x^4 - 7)^2 : x^4. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (187) und (185a) die Grösse x^4, so erhält man die L-Gleichung für $n = 49$.

Auch hier tritt eine wesentliche Vereinfachung ein, wenn man $L + 1 = M$ als Veränderliche einführt. Dadurch geht nämlich die Gleichung (187) über in

$$(187\text{a})\quad \begin{aligned} &M^7 + 14M^4 + 56M^3 + 70M^2 - 28M - 113 \\ &\qquad + 7(M^3 + 2M^2 - 3)x^4 - x^8 = 0. \end{aligned}$$

Abschnitt VI.

Theorie der f-Gleichung, wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l + 2$ ist.

§ 27.

Die Transformation zweiten Grades.

Wenn n die Factoren 2 oder 3 besitzt, so modificiren sich die in den beiden vorhergehenden Paragraphen für $n = 6l + 1$ angegebenen Beziehungen in dem Sinne, dass erst eine höhere Potenz von f die Wurzel einer Gleichung $T(n)^{\text{ten}}$ Grades wird, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind.

Schon für $n = 2$ wird nicht mehr die Hülfsgrösse f^2, sondern erst f^8 die Wurzel einer Gleichung 3^{ten} Grades von der verlangten Eigenschaft. Um in diesem Falle die f-Gleichung zu bilden, kann man das folgende Verfahren einschlagen.

Nach Gleichung (32) wird für $n = 2$

$$f_\infty^2 = -\sigma_{1,0} = e^{-\frac{\eta\omega}{2}} \sigma\omega,$$

oder, wenn man Gleichung (1) auf Seite 25 der Formelsammlung des Herrn Schwarz benutzt,

$$f_\infty^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}},$$

also

$$f_\infty^8 = \frac{Q^8\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)}{Q^{16}(\omega, \omega')} = \frac{1}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = \frac{4(e_2 - e_3)}{Q^{12}}, \tag{188}$$

da

$$Q^{12} = Q^{12}(\omega, \omega') = 4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)$$

ist. Ferner wird

$$4(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 12 e_1^2 - g_2 = 12 \wp\omega - g_2,$$

folglich ist f_∞^8 eine rationale Function von $\wp\omega$, die in f_r^8 übergeht, wenn man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $6r\omega + 2\omega'$; -2ω vertauscht, wobei r die Werthe 0 und 1 hat. Daraus folgt

$$\tag{189} \begin{cases} f_0^8 = \dfrac{Q^8\left(\frac{\omega'}{2}, -\omega\right)}{Q^{16}(\omega', -\omega)} = \dfrac{Q^8\left(\omega, \frac{\omega'}{2}\right)}{Q^{16}(\omega, \omega')} = \dfrac{1}{(e_3 - e_2)(e_3 - e_1)} = \dfrac{4(e_1 - e_2)}{Q^{12}}, \\[2ex] f_1^8 = \dfrac{Q^8\left(\frac{3\omega + \omega'}{2}, -\omega\right)}{Q^{16}(3\omega + \omega', -\omega)} = \dfrac{Q^8\left(\omega, \frac{3\omega + \omega'}{2}\right)}{Q^{16}(\omega, \omega')} = \dfrac{1}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)} = \dfrac{-4(e_1 - e_3)}{Q^{12}} \end{cases}$$

Die f-Gleichung wird daher für $n = 2$

(190) $\Delta f^{24} - 12 g_2 f^8 + 16 = 0$ oder $L^{24} - 12\gamma_2 L^8 + 16 = 0.$

Ferner wird nach Gleichung (14b), (15b) und (17b)

$$(191)\quad \begin{cases} \bar{\wp} u = \wp\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = \wp u + \wp(u - \omega) - \wp\omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \wp u + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp u - e_1}, \\ \bar{\sigma} u = \sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega}{2}, \omega'\right) = e^{\frac{1}{2} e_1 u^2} \sigma_1 u \sigma u. \end{cases}$$

Dabei ist, wie aus den Gleichungen (188) und (74) folgt,

$$(192)\quad (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = f_\infty^{-8}, \quad e_1 = \frac{-12 g_3}{\Delta f_\infty^{16} - 4 g_2} = B_1.$$

Da B_2 und B_3 in diesem Falle gleich Null sind, so findet man aus den Gleichungen (77) und (78) ohne Weiteres

$$\bar{g}_2 = 60 e_1^2 - 4 g_2, \qquad \bar{g}_3 = 14 g_2 e_1 + 22 g_3,$$

oder, wenn man den Werth von e_1 einsetzt,

$$(194)\quad \begin{cases} \bar{g}_2 - g_2 = 20 f_\infty^{-8}, \quad \bar{g}_3 - g_3 = \frac{-336 g_3 f_\infty^{-8}}{\Delta f_\infty^{16} - 4 g_2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{7}{18 g_3}(-g_2 \Delta f_\infty^8 - 2\Delta + 8 g_2^2 f_\infty^{-8}). \end{cases}$$

§ 28.

Die f-Gleichung, wenn n eine zusammengesetzte Zahl von der Form $6l \pm 2$ ist.

Hat n die Form $6l \pm 2$, so gelten ähnliche Schlüsse, wie in § 22; da hier aber bei der wiederholten Transformation auch die Transformation zweiten Grades verwendet werden muss, so ist es hier von vornherein zu erwarten, dass nicht f^2, sondern im Allgemeinen erst f^8 die Wurzel einer Gleichung vom Grade $T(n)$ wird, deren Coefficienten rationale Functionen von g_2 und g_3 sind. Dieser Umstand macht es zweifelhaft, ob bei geradem n die Grösse f überhaupt als Hülfsgrösse zweckmässig zu verwenden ist; denn die Rechnungen werden nicht einfach genug.

Eine weitergehende Untersuchung, welche einer späteren Abhandlung vorbehalten bleibt, zeigt, dass für $n = 2$ und für $n = 4$ die Grösse f selbst noch als die einfachste Hülfsgrösse zu betrachten ist, dass man aber für $n = 8, 10, 14, 16, \ldots$ andere Hülfsgrössen einführen muss, durch welche sich $B_1, B_2, \ldots$ und die Invarianten $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ der transformirten Function rational ausdrücken lassen.

Wenn also in dem folgenden Paragraphen ausser der Transformation 4^{ten} Grades auch noch die vom 8^{ten} Grade gegeben wird, so soll dabei ausdrücklich hervorgehoben werden, dass dem Verfasser bereits eine *weit* einfachere Methode für die Transformation 8^{ten} Grades bekannt ist. Man wird vielmehr aus dem hier folgenden Beispiel, das zu einer L-Gleichung vom 96^{ten} Grade für $n=8$ führt, erkennen, wie wünschenswerth in den hier besprochenen Fällen die Einführung einer zweckmässigeren Hülfsgrösse ist.

§ 29.

Die L-Gleichungen für $n = 4$ und $n = 8$.

Es sei

$$L^8\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right) = x, \quad L^8\left(\frac{\omega}{4}, \omega'\right) = y, \quad L^8\left(\frac{\omega}{8}, \omega'\right) = z,$$

dann ist nach Gleichung (190)

$$x^3 - 12\gamma_2 x + 16 = 0, \quad \text{oder} \quad 12\gamma_2 x = x^3 + 16.$$

Führt man jetzt noch eine zweite Transformation zweiten Grades aus, so wird

$$\bar{x} = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \bar{x}^3 - 12\bar{\gamma}_2\bar{x} + 16 = 0,$$

oder

$$y^3 - 12\bar{\gamma}_2 x^2 y + 16x^3 = 0.$$

Nun wird aber nach Gleichung (194)

$$\bar{\gamma}_2 x^2 = \gamma_2 x + 20,$$

also

$$y^3 - 12(\gamma_2 x + 20)y + 16x^3 = (y-16)(y^2 + 16y - 12\gamma_2 x + 16) = 0.$$

Dies giebt

$$12\gamma_2 x = y^2 + 16y + 16, \quad \text{oder} \quad x^3 = y^2 + 16y, \tag{195}$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen x eliminirt,

$$\begin{aligned} y^6 + 48y^5 + 816y^4 + 5632y^3 + (13056 - 1728\gamma_2^3)\,y^2 \\ + (12288 - 16.1728\gamma_2^3)y + 4096 = 0, \end{aligned} \tag{196}$$

oder

$$\begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (y^2 + 16y + 16)^3 : (y^3 + 24y^2 + 120y - 64)^2 \\ : (y^2 + 16y). \end{aligned} \tag{196a}$$

Noch einfacher lässt sich diese Gleichung schreiben, wenn man $y + 8 = \eta$ als Veränderliche einführt; es wird dann

$$1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (\eta^2 - 48)^3 : (\eta^3 - 72\eta)^2 : (\eta^2 - 64). \tag{196b}$$

Dies ist die L-Gleichung für $n = 4$.

Führt man jetzt nochmals eine Transformation zweiten Grades aus und setzt

$$\frac{z}{x} = \frac{Q^8\left(\frac{\omega}{8}, \omega'\right)}{Q^8\left(\frac{\omega}{2}, \omega'\right)} = \bar{\bar{y}},$$

so erhält man in Analogie zu den Gleichungen (195)

$$(197) \qquad \bar{x}^3 = \bar{y}^2 + 16\bar{y}, \quad \text{oder} \quad y^3 = xz^2 + 16x^2z,$$

und wenn man mit Hülfe der Gleichungen (195) x eliminirt,

$$(198) \quad 3\gamma_2(y^2 + 16y + 16)z^2 + 4(y^2 + 16y + 16)^2 z - 36\gamma_2^2 y^3 = 0.$$

Eliminirt man schliesslich noch y aus den bereits aufgestellten Gleichungen und setzt $z = L^8$, so erhält man für die Transformation 8ten Grades die L-Gleichung

$$(199) \begin{cases} L^{96} - 2^7.15\gamma_2 L^{80} - 2^{12}.71 L^{72} - 2^8.35505\gamma_2^2 L^{64} \\ \quad + (2^{19}.495\gamma_2 + 2^{14}.81\gamma_2^4) L^{56} \\ \quad + (2^{16}.190311 + 2^{14}.1115829\gamma_2^3) L^{48} \\ \quad + (2^{23}.175095\gamma_2^2 + 2^{19}.8505\gamma_2^5) L^{40} \\ \quad + (2^{18}.116635995\gamma_2 - 2^{16}.43565769\gamma_2^4 - 2^{14}.2187\gamma_2^7) L^{32} \\ \quad + (2^{25}.4498517 - 2^{24}.3597399\gamma_2^3 + 2^{21}.559143\gamma_2^6) L^{24} \\ \quad + (2^{24}.3505815\gamma_2^2 + 2^{22}.5998455\gamma_2^5 - 2^{24}.6561\gamma_2^8) L^{16} \\ \quad + (-2^{32}.75\gamma_2 + 2^{28}.8829\gamma_2^4 - 2^{30}.2187\gamma_2^7) L^8 + 2^{28} = 0. \end{cases}$$

Abschnitt VII.

Theorie der f-Gleichung, wenn n durch die Zahl 3 theilbar ist.

§ 30.

Die Transformation dritten Grades.

Auch bei der Transformation dritten Grades ist nicht mehr f^2, sondern erst f^6 eine rationale Function von $\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)$ und deshalb die Wurzel einer algebraischen Gleichung vierten Grades.

Es ist nämlich nach Gleichung (46)

$$\wp'\left(\frac{2\varpi}{3}\right) = -f^{-3}.$$

Bezeichnet man also der Kürze wegen $\wp\left(\frac{2\varpi}{3}\right)$ mit $\wp$, so wird

$$(200) \qquad f^{-6} = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Nun folgt aber aus Gleichung (1)

$$\frac{4\sigma(3u)}{\sigma^9 u} = \begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u \\ \wp'' u & \wp''' u \end{vmatrix};$$

und da $\sigma(3u)$ verschwindet, wenn $u = \frac{2\varpi}{3}$ ist, so ist $\wp$ eine Wurzel der Gleichung

(201) $$\wp' \wp''' - \wp''^2 = 12\wp^4 - 6g_2\wp^2 - 12g_3\wp - \tfrac{1}{4}g_2{}^2 = 0,$$

welche in Bezug auf $\wp$ vom vierten Grade ist. Man kann daher die f-Gleichung für $n = 3$ finden, indem man $\wp$ aus den Gleichungen (200) und (201) eliminirt.

Eine kürzere Methode besteht darin, dass man die verschiedenen Wurzeln der f-Gleichung und ihre Entwickelung nach Potenzen von h berücksichtigt. Dadurch kann man sehr leicht die unbestimmten Zahlencoefficienten der f-Gleichung berechnen. Aus

(202) $$f_\infty^6 = \frac{Q^6\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)}{Q^{18}(\omega, \omega')}$$

erhält man dabei durch Vertauschung der primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $16r\omega + 2\omega'$, -2ω die 3 anderen Wurzeln

(203) $$f_r^6 = \frac{Q^6\left(\frac{8r\omega + \omega'}{3}, -\omega'\right)}{Q^{18}(8r\omega + \omega', -\omega')} = -\frac{Q^6\left(\omega, \frac{8r\omega + \omega'}{3}\right)}{Q^{18}(\omega, \omega')},$$

(vgl. die Tabelle (134 a))

wobei r die Werthe 0, 1, 2 hat. Da man jetzt auch weiss, dass die f-Gleichung die Form

$$\Delta^2 f^{24} + a\Delta f^{12} + bg_3 f^6 - 27 = 0$$

haben muss, so findet man durch Entwickelung der Wurzeln nach Potenzen von h und durch Anwendung der Newton'schen Formeln

$$a = 18, \qquad b = 216.$$

Die f-Gleichung für $n = 3$ ist daher

(204) $$\Delta^2 f^{24} + 18\Delta f^{12} + 216 g_3 f^6 - 27 = 0.$$

Jetzt wird nach Gleichung (14a)

(205) $$\begin{cases} \bar{\wp} u = \wp u + \wp\left(u - \frac{2\varpi}{3}\right) + \wp\left(u + \frac{2\varpi}{4}\right) - 2G_1, \\ \bar{\sigma} u = e^{G_1 u^2} \sigma^3 u(\wp u - G_1). \end{cases}$$

Man braucht also nur noch die Grössen G_1, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$ auszurechnen.

Setzt man der Kürze wegen

$$F_1 = \Delta^2 f^{18} + 9\Delta f^6 + 54 g_3 = -9(\Delta f^6 + 18 g_3 - 3f^{-6}),$$

so wird nach Gleichung (66)

$$G_1 = \frac{9g_2^2}{F_1} = \frac{1}{12g_2}(\Delta f^6 - 18g_3 + 9f^{-6}), \tag{206}$$

Da hier G_2 und G_3 gleich 0 sind, so folgt unmittelbar aus den Gleichungen (77) und (78)

$$\begin{cases} \bar{g}_2 = -120B_2 + 60B_1^2 - 9g_2 = 120G_1^2 - 9g_2, \\ \bar{g}_3 = 420B_3 - 420B_1B_2 + 140B_1^3 - 21\bar{g}_2B_1 - 27g_3 \\ \quad = 280G_1^3 - 42g_2G_1 - 27g_3, \end{cases} \tag{207}$$

oder

$$F_1(\bar{g}_2 - g_2) = 180g_2(\Delta f^6 + 3f^{-6}), \quad \bar{g}_3 - g_3 = \frac{7}{3}(\Delta f^6 + 39f^{-6}). \tag{207a}$$

§ 31.

Theorie der f-Gleichung, wenn n die Form $6l+3$ hat.

Auch für $n = 6l+3$ gelten ähnliche Schlüsse wie in § 22; da aber hier bei der wiederholten Transformation auch die Transformation dritten Grades verwendet werden muss, so wird *im Allgemeinen* erst f^6 die Wurzel einer Gleichung vom Grade $T(n)$ mit rationalen Coefficienten sein. Man wird also wiederum darauf hingewiesen, noch andere Hülfsgrössen in die Transformationstheorie einzuführen, um einfachere Gleichungen zu erhalten.

Eine Reduction tritt aber auch bei Benutzung der Grösse f ein, wenn $n = 6l+3$ ein vollständiges Quadrat ist; dann wird nämlich schon f^3 einer Gleichung vom Grade $T(n)$ mit rationalen Coefficienten genügen.

Der Nachweis dieses interessanten Satzes ist nur für $n = 9$ nöthig, weil der Satz für alle Quadrate von der Form $6l+1$ schon in § 24 bewiesen ist, wo gezeigt wurde, dass sogar schon f die angegebene Eigenschaft besitzt. Durch wiederholte Transformation ergiebt sich daher auch die Richtigkeit des Satzes für alle Quadratzahlen von der Form $9^\alpha(6l+1)$, sobald der Satz für $n = 9$ bewiesen ist. Dieser Beweis kann leicht, wie folgt, geführt werden.

Es wird nach Gleichung (46) für $n = 9$

$$\begin{aligned} f^{-3} &= \wp'\left(\frac{2\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{6\varpi}{9}\right) \\ &= \wp'\left(\frac{4\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{16\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{12\varpi}{9}\right) \\ &= \wp'\left(\frac{8\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{16\varpi}{9}\right)\wp'\left(\frac{32\varpi}{9}\right)\cdot\wp'\left(\frac{24\varpi}{9}\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f^3 eine *cyklische Function* der Grössen $\wp\left(\frac{2\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{4\varpi}{9}\right)$, $\wp\left(\frac{8\varpi}{9}\right)$ ist, so dass also nach Satz V in § 3 f^3 die Wurzel einer Gleichung 12^ten^ Grades mit rationalen Coefficienten sein muss.

§ 32.

Die f-Gleichung für $n = 9$.

Nach den Angaben des soeben bewiesenen Satzes ist es jetzt leicht, die f-Gleichung für $n = 9$ zu bilden. Zunächst ist

$$f_\infty = \frac{Q\left(\frac{\omega}{9},\, \omega'\right)}{Q^9(\omega,\, \omega')} = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 3 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{18\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}. \tag{208}$$

Indem man die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $16(r+3s)\omega + 2\omega'$, -2ω vertauscht und die Tabelle (134a) passend verwendet, erhält man hieraus

$$\left\{\begin{aligned} f_{r,s} &= \frac{Q\left(\frac{8(r+3s)\omega+\omega'}{9},\, -\omega\right)}{Q^9(8(r+3s)\omega+\omega',\, -\omega)} = \frac{Q\left(\omega,\, \frac{8(r+3s)\omega+\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega,\, \omega')} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 h^{-\frac{20}{27}} \varepsilon^{\frac{r+3s}{3}} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{\frac{2\nu}{9}} \varepsilon^{8(r+3s)\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}. \end{aligned}\right. \tag{209}$$

Dabei haben r und s die Werthe 0, 1, 2, so dass $f_{r,s}$ im Ganzen 9 Werthe hat. Um die beiden noch fehlenden Werthe von f zu bestimmen, vertausche man in Gleichung (208) die primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit den äquivalenten Perioden $16t\omega + 6\omega'$, $10\omega + 2(3-t)\omega'$, wo t die Werthe 1 und 2 hat. Nun ist nach Tabelle (134a)

$$\text{für } t = 1 \quad \varrho\begin{pmatrix} 8, 3 \\ 5, 2 \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{12}}, \qquad \text{für } t = 2 \quad \varrho\begin{pmatrix} 16, 3 \\ 5, 1 \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi i}{6}},$$

folglich wird

$$f_1 = \frac{Q\left(\frac{8\omega+3\omega'}{9},\, 5\omega+2\omega'\right)}{Q^9(8\omega+3\omega',\, 5\omega+2\omega')} = \varrho\begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 6 \end{pmatrix} e^{-\frac{9\pi i}{12}} \frac{Q\left(\frac{\omega}{3},\, \frac{8\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega,\, \omega')},$$

$$f_2 = \frac{Q\left(\frac{16\omega+3\omega'}{9},\, 5\omega+\omega'\right)}{Q^9(16\omega+3\omega',\, 5\omega+\omega')} = \varrho\begin{pmatrix} 0, 1 \\ -1, 3 \end{pmatrix} e^{-\frac{9\pi i}{6}} \frac{Q\left(\frac{\omega}{3},\, \frac{16\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega,\, \omega')},$$

oder

$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= -i\, \frac{Q\left(\frac{\omega}{3},\, \frac{8\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega,\, \omega')} = -i\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 \sqrt{3}\, h^{-\frac{2}{3}} \varepsilon \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{2\nu} \varepsilon^{24\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}, \\ f_2 &= +i\, \frac{Q\left(\frac{\omega}{3},\, \frac{16\omega+3\omega'}{9}\right)}{Q^9(\omega,\, \omega')} = +i\left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 \sqrt{3}\, h^{-\frac{2}{3}} \varepsilon^2 \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-h^{2\nu} \varepsilon^{48\nu}}{(1-h^{2\nu})^9}. \end{aligned}\right. \tag{210}$$

Mit Hülfe dieser Entwickelungen und durch Anwendung der Newton'schen Formeln kann man jetzt die einzelnen Coefficienten der f-Gleichung bilden. Einfacher kommt man jedoch auch hier durch wiederholte Transformation zum Ziele. Der Kürze wegen soll nicht die f-Gleichung, sondern die L-Gleichung gebildet werden. Es sei also

$$x = \frac{Q^3\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)}{Q^3(\omega, \omega')}, \quad L^3 = \frac{Q^3\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right)}{Q^3(\omega, \omega')}, \quad \bar{x} = \frac{Q^3\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right)}{Q^3\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)} = \frac{L^3}{x},$$

dann wird nach Gleichung (204)

$$x^8 + 18x^4 + 216\gamma_3 x^2 - 27 = 0, \tag{211}$$

und wenn man noch eine zweite Transformation dritten Grades ausführt,

$$\bar{x}^8 + 18\bar{x}^4 + 216\bar{\gamma}_3\bar{x}^2 - 27 = 0,$$

oder

$$L^{24} + 18x^4 L^{12} + 216\bar{\gamma}_3 x^6 L^6 - 27x^8 = 0. \tag{212}$$

Nach Gleichung (207a) wird aber

$$3\bar{\gamma}_3 x^6 = 7x^4 + 3\gamma_3 x^2 + 273,$$

so dass Gleichung (212) übergeht in

$$L^{24} + 18x^4 L^{12} + 72\,(7x^4 + 3\gamma_3 x^2 + 273)\,L^6 - 27x^8 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung zerfällt nun in die Factoren

$$L^6 + 27, \quad L^9 + 9L^6 + 27L^3 - x^4, \quad L^9 - 9L^6 + 27L^3 + x^4.$$

Die Entwickelung nach Potenzen von h zeigt, dass nur der mittelste dieser Factoren verschwindet, es wird also

$$x^4 = L^9 + 9L^6 + 27L^3 = (L^3 + 3)^3 - 27. \tag{213}$$

Wenn man diesen Werth von x^4 in die Gleichung (211) oder in die daraus hergeleitete Gleichung

$$1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = (x^4 + 27)(x^4 + 3)^3 : (x^8 + 18x^4 - 27)^2 : x^4 \tag{211a}$$

einsetzt, so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} 1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 &= (L^3 + 3)^3 (L^9 + 9L^6 + 27L^3 + 3)^3 \\ &: (L^{18} + 18L^{15} + 135L^{12} + 504L^9 + 891L^6 + 486L^3 - 27)^2 \\ &: (L^9 + 9L^6 + 27L^3). \end{aligned}\right. \tag{214}$$

Setzt man $L^3 + 3 = M$, so geht diese Gleichung über in

$$1728\gamma_2^3 : (216\gamma_3)^2 : 1 = M^3(M^3 - 24)^3 : (M^6 - 36M^3 + 216)^2 : (M^3 - 27). \tag{214a}$$

Von Interesse ist hierbei die Bedeutung der Ausdrücke L^3 und $L^6 + 9L^3 + 27$. Nach Gleichung (30) ist nämlich

$$(215)\begin{cases} x^4 = L^{12}\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right) = Q^{24} f^{12}\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right) = Q^{24} e^{-\frac{8\eta\omega}{3}} \sigma^{12}\left(\frac{2\omega}{3}\right); \\ L^3 = L^3\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right) = Q^{24} f^3\left(\frac{\omega}{9}, \omega'\right) \\ \quad = Q^{24} e^{-\frac{20\eta\omega}{9}} \sigma^3\left(\frac{2\omega}{9}\right) \sigma^3\left(\frac{4\omega}{9}\right) \sigma^3\left(\frac{8\omega}{9}\right) \cdot \sigma^3\left(\frac{2\omega}{3}\right), \end{cases}$$

folglich wird nach Gleichung (213)

$$(216) \qquad \frac{x^4}{L^3} = L^6 + 9L^3 + 27 = \frac{e^{-\frac{4\eta\omega}{9}} \sigma^3\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{2\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{4\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{8\omega}{9}\right)}.$$

Ferner ist

$$\prod_{\alpha=0}^{\alpha=2}\left[\wp\left(\frac{2^\alpha\, 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha . 6\omega}{9}\right)\right] = -\frac{e^{\frac{4\eta\omega}{3}}}{\sigma^6\left(\frac{2\omega}{3}\right)},$$

$$\prod_{\alpha=0}^{\alpha=2}\left[\wp\left(\frac{2^\alpha . 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha . 4\omega}{9}\right)\right] = -\frac{e^{\frac{8\eta\omega}{9}} \sigma^3\left(\frac{2\omega}{3}\right)}{\sigma^3\left(\frac{2\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{4\omega}{9}\right)\sigma^3\left(\frac{8\omega}{9}\right)};$$

deshalb wird

$$(217)\begin{cases} L^3 = \dfrac{Q^{24}}{\prod\limits_{\alpha=0}^{\alpha=2}\left[\wp\left(\frac{2^\alpha . 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha . 6\omega}{9}\right)\right]\left[\wp\left(\frac{2^\alpha . 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha . 4\omega}{9}\right)\right]}, \\ L^6 + 9L^3 + 27 = \prod\limits_{\alpha=0}^{\alpha=2} \dfrac{\wp\left(\frac{2^\alpha . 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha . 4\omega}{9}\right)}{\wp\left(\frac{2^\alpha . 2\omega}{9}\right) - \wp\left(\frac{2^\alpha . 6\omega}{9}\right)}. \end{cases}$$

§ 33.

Theorie der f-Gleichung, wenn n die Form $6l$ hat.

Die Transformation 6^{ten} Grades kann dadurch ausgeführt werden, dass man die Transformation 3^{ten} Grades mit der Transformation 2^{ten} Grades combinirt. Setzt man also

$$x = \frac{Q\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')}, \quad y = \frac{Q\left(\frac{\omega}{6}, \omega'\right)}{Q\left(\frac{\omega}{3}, \omega'\right)}, \quad L = \frac{Q\left(\frac{\omega}{6}, \omega'\right)}{Q(\omega, \omega')} = xy,$$

so wird nach den Gleichungen (190) und (204)

$$(218) \quad x^{24} + 18x^{12} + 216\gamma_3 x^6 - 27 = 0, \quad y^{24} - 12\sqrt{\gamma_2}\, y^8 + 16 = 0,$$

wobei nach Gleichung (207a)

$$\overline{\gamma^2} = \frac{\gamma_2(-37x^{10} + 54\gamma_3 x^4 - 129x^{-2})}{3(x^{18} + 18\gamma_3 x^{12} - 3x^6)}$$

wird. Dieser Werth ist in die Gleichung

$$L^{24} - 12\overline{\gamma_2} x^{16} L^8 + 16x^{24} = 0$$

einzusetzen und dann x zu eliminiren. Dadurch erhält man eine Gleichung 12^{ten} Grades für L^{24}. Es hat aber keinen Zweck, diese Gleichung wirklich zu bilden, weil sie nicht einfach genug wird. Im Gegentheil zeigt sich auch hier wieder die Nothwendigkeit, andere Hülfsgrössen neben f in die Transformationstheorie einzuführen.

Die Schwierigkeiten, welche schon bei der Transformation 6^{ten} Grades auftreten, kehren natürlich in erhöhtem Masse bei der Transformation $6p^{\text{ten}}$ Grades wieder.

Diese Schwierigkeiten lassen sich aber, wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, beseitigen durch die Benutzung von Ausdrücken, welche ähnlich gebildet sind wie die Grösse f, und deren Eigenschaften deshalb auch mit den hier entwickelten Untersuchungen in naher Beziehung stehen. Die eingehendere Behandlung dieses Gegenstandes muss aber einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Hannover, im April 1885.*)

---

*) Die Citate, welche sich auf die Abhandlung: „*Ueber die elliptischen Normalcurven von der n^{ten} Ordnung und zugehörige Modulfunctionen n^{ter} Stufe*" von Herrn Klein beziehen, sind während des Druckes hinzugefügt.