Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten.

Von Georg Cantor in Halle a. d. Saale.

1.

In einer, im Borchardt'schen Journale, Bd. 84, pag. 242 herausgegebenen Abhandlung habe ich für ein sehr weitreichendes Gebiet von geometrischen und arithmetischen, sowohl continuirlichen, wie discontinuirlichen Mannichfaltigkeiten den Nachweis geführt, dass sie eindeutig und vollständig einer geraden Strecke oder einem discontinuirlichen Bestandtheile von ihr sich zuordnen lassen.

Hierdurch gewinnen die letzteren Mannichfaltigkeiten, wir nennen sie *lineare Punktmannichfaltigkeiten* oder kürzer *lineare Punktmengen*, welche also entweder eine continuirliche, endliche oder unendliche, gerade Strecke bilden oder doch mit allen ihren Punkten in einer solchen, als Theile enthalten sind, ein besonderes Interesse, und es dürfte daher nicht unwerth sein, wenn wir denselben eine Reihe von Betrachtungen widmen und zunächst im Folgenden ihre Classification untersuchen wollen. Verschiedene Gesichtspunkte und damit verbundene Classificationsprincipien führen uns dazu, die linearen Punktmengen in gewisse Gruppen zu fassen. Um mit einem dieser Gesichtspunkte zu beginnen, erinnern wir an den Begriff der *Ableitung* einer gegebenen Punktmenge P, welcher in einer Arbeit über trigonometrische Reihen (Math. Annalen, Bd. V, pag. 129) dargelegt worden ist; in dem jüngst erschienenen Werke Dini's (Fondamenti per la teorica d. funzioni d. variabili reali, Pisa, 1878) sehen wir diesen Begriff noch weiter entwickelt, indem er als Ausgangspunkt für eine Reihe bemerkenswerther Verallgemeinerungen von bekannten analytischen Sätzen genommen wird.*) Der Begriff der *Ableitung* einer gegebenen Mannichfaltigkeit ist übrigens nicht auf die linearen Mannichfaltigkeiten beschränkt, sondern gilt in gleicher Weise auch für die *ebenen*, *räumlichen* und *n-fachen* stetigen und unstetigen Mannichfaltigkeiten. Auf ihn wird, wie wir später zeigen wollen, die einfachste und zugleich vollständigste Erklärung resp. Bestimmung eines *Continuums* gegründet.

*) Man vergleiche auch: Ascoli. Nuove richerche sulla serie di Fourier, Reale Academia dei Lincei (1877—78).

Die Ableitung P' einer linearen Punktmenge P ist nämlich die Mannichfaltigkeit aller derjenigen Punkte, welche die Eigenschaft eines *Grenzpunktes* von P besitzen, wobei es nicht darauf ankommt, ob der Grenzpunkt zugleich ein Punkt von P ist oder nicht.

Da hiernach die Ableitung einer Punktmenge P wieder eine bestimmte Punktmenge P' ist, so kann auch von dieser die Ableitung gesucht werden, welche alsdann *zweite Ableitung* von P genannt und mit P'' bezeichnet wird; durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man die ν^{te} Ableitung von P, welche mit $P^{(\nu)}$ bezeichnet wird.

Hier kann es nun vorkommen, dass der Progress der Ableitungen $P', P'', \cdots$ zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkten besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so dass $P^{(n)}$ *keine* Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat; in diesem Falle sagen wir von der Punktmenge P, dass sie von der *ersten Gattung* und von der n^{ten} *Art* sei. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von P, die Reihe $P', P'', P''', \cdots P^{(\nu)}, \cdots$ *nicht* ab, so sagen wir, dass die Punktmenge P von der *zweiten Gattung* sei.

Leicht erkennt man hieraus, dass wenn P von der ersten Gattung und n^{ter} Art ist, alsdann auch $P', P'', P''' \cdots$ zur ersten Gattung gehören und dabei resp. von der $\overline{n-1}^{\text{ten}}, \overline{n-2}^{\text{ten}}, \overline{n-3}^{\text{ten}} \cdots$ Art sind, dass ferner, wenn P zur zweiten Gattung gehört, ein gleiches auch von allen ihren Ableitungen $P', P'' \cdots$ gilt. Bemerkenswerth ist ferner, dass alle Punkte von $P'', P''' \cdots$ auch immer Punkte von P' sind, während ein zu P' gehöriger Punkt nicht nothwendig auch ein solcher von P ist.

Weiter ergeben sich wichtige Charaktere einer Punktmenge P, wenn ihr Verhalten zu einem gegebenen, continuirlichen Intervall $(\alpha \cdots \beta)$, (dessen Endpunkte wir als ihm zugehörig ansehen) ins Auge gefasst wird. Hier kann es vorkommen, dass einzelne oder auch alle Punkte dieses Intervalles zugleich Punkte von P sind, oder auch dass kein Punkt von $(\alpha \cdots \beta)$ Punkt von P ist; im letzteren Fall sagen wir, dass P ganz ausserhalb des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ liegt. Liegt P theilweise oder ganz im Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$, so kann der bemerkenswerthe Fall eintreten, dass *jedes noch so kleine* in $(\alpha \cdots \beta)$ enthaltene Intervall $(\gamma \cdots \delta)$ Punkte von P enthält. In einem solchen Falle wollen wir sagen, dass P *im Intervalle* $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dicht* sei. *Beispiele* von solchen im Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dichten* Punktmengen sind: 1) Jede Punktmenge, zu welcher alle Punkte des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ als Elemente mitgehören, 2) die Punktmenge, welche aus allen denjenigen Punkten des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ besteht, deren Abscissen rationale Zahlen sind, 3) die Punktmenge, welche aus allen denjenigen Punkten des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ besteht, deren Abscissen rationale Zahlen der Form $\frac{2n+1}{2^m}$ (wo n und m ganze, rationale Zahlen) sind.

Aus dieser Erklärung des Ausdruckes „*überall-dicht in einem gegebenen Intervalle*" folgt, dass wenn eine Punktmenge in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *nicht überall-dicht* ist, ein in jenem enthaltenes Intervall $(\gamma \cdots \delta)$ *nothwendig* existiren muss, in welchem kein einziger Punkt von P liegt. Ferner lässt sich zeigen, dass wenn P im Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ überall-dicht ist, alsdann von P' nicht nur ein Gleiches gilt, sondern dass auch P' *alle Punkte* des Intervalles $(\alpha \cdots \beta)$ zu den ihren hat. Diese Eigenschaft von P' liesse sich auch zum Ausgangspunkte der Erklärung des *Ueberall-dicht-seins* in einem Intervalle nehmen, indem man sagen kann: eine Punktmenge P wird in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dicht* genannt, wenn ihre Ableitung P' alle Punkte von $(\alpha \cdots \beta)$ als Elemente enthält.

Ist P *überall-dicht* in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$, so ist P auch *überall-dicht* in jedem andern Intervalle $(\alpha' \cdots \beta')$, welches in jenem Intervalle enthalten ist.

Eine in einem Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dichte* Punktmenge P ist nothwendig von der *zweiten Gattung*; denn auch P' und daher auch P'', P''', $\cdots$ sind alsdann im Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ *überall-dicht*, dieser Progress der Ableitungen von P ist daher ein unbegrenzter, d. h. P gehört der *zweiten Gattung* an.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass eine Punktmenge P der *ersten Gattung* in irgend einem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \cdots \beta)$ sicher *nicht* überall-dicht ist, dass folglich immer innerhalb $(\alpha \cdots \beta)$ ein Intervall $(\gamma \cdots \delta)$ gefunden werden kann, welches keinen einzigen Punkt von P enthält.

Ob nun auch umgekehrt *jede* Punktmenge der *zweiten Gattung* so beschaffen ist, dass ein Intervall $(\alpha \cdots \beta)$ existirt, in welchem sie *überall-dicht* ist, diese Frage wird uns später beschäftigen.

Wir kommen nun zu einem ganz andern, nicht weniger bedeutungsvollen *Eintheilungsgrunde* für lineare Punktmannichfaltigkeiten, nämlich zu ihrer *Mächtigkeit.*

In der oben angeführten Abhandlung*) haben wir allgemein von zwei geometrischen, arithmetischen oder irgend einem andern, scharf ausgebildeten Begriffsgebiete angehörigen Mannichfaltigkeiten M und N gesagt, dass sie *gleiche Mächtigkeit* haben, wenn man im Stande ist, sie nach irgend einem bestimmten Gesetze so einander zuzuordnen, dass zu jedem Elemente von M ein Element von N und auch umgekehrt zu jedem Elemente von N ein Element von M gehört.

---

*) Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 242.

Je nachdem nun zwei Mannichfaltigkeiten von gleicher oder verschiedener Mächtigkeit sind, können sie *einer* und *derselben Classe* oder *verschiedenen Classen* zugetheilt werden. Diese allgemeinen Regeln lassen sich nun im Besondern auf die *linearen Punktmengen* anwenden und es zerfallen daher dieselben in *bestimmte Classen*; die Punktmengen einer Classe sind alle von gleicher *Mächtigkeit*, dagegen Punktmengen, welche verschiedenen Klassen zugetheilt sind, verschiedene Mächtigkeit haben.

Jede specielle Punktmenge kann als *Repräsentant* derjenigen Classe betrachtet werden, in welche sie gehört.

In *erster Linie* bietet sich hier die Classe der *in's Unendliche abzählbaren* Punktmengen dar, d. h. diejenigen Punktmengen, welche mit der natürlichen Zahlenreihe: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ gleiche Mächtigkeit haben und sich also in der Form einer einfach unendlichen Reihe, mit einem allgemeinen von ν abhängigen Gliede, vorstellen lassen. In diese Classe gehören beispielsweise alle Punktmengen *der ersten Gattung*; aber auch viele Punktmengen *der zweiten Gattung* fallen in diese Classe, wie beispielsweise: 1) die Punktmenge, welche aus allen Punkten eines Intervalles besteht, deren Abscissen *rationale* Zahlen sind*), 2) die Punktmenge, welche aus allen Punkten eines Intervalles besteht, deren Abscissen *algebraische* Zahlen sind**).

Sodann tritt uns diejenige Classe linearer Punktmengen entgegen, als deren Repräsentant wir ein beliebiges *stetiges Intervall*, z. B. die Menge aller Punkte betrachten, deren Abscissen $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind.

In diese Classe gehören beispielsweise:

1) Jedes stetige Intervall $(\alpha \ldots \beta)$.

2) Jede Punktmenge, die aus mehreren getrennten, stetigen Intervallen $(\alpha \ldots \beta)$, $(\alpha' \ldots \beta')$, $(\alpha'' \ldots \beta'') \ldots$, in endlicher oder unendlicher Anzahl besteht.

3) Jede Punktmenge, welche aus einem stetigen Intervalle dadurch hervorgeht, dass man eine *endliche* oder *abzählbar unendliche* Mannichfaltigkeit von Punkten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$ daraus entfernt***).

Ob diese beiden Classen die *einzigen* sind, in welche die linearen Punktmengen zerfallen, soll hier zunächst noch nicht untersucht werden; dagegen wollen wir den Nachweis führen, dass dieselben in *Wirklichkeit verschiedene* Classen sind; um dies zu beweisen ist zu zeigen nöthig, dass irgend zwei Repräsentanten dieser beiden Classen sich *nicht* eindeutig und vollständig einander zuordnen lassen.

Als Repräsentanten der zweiten Classe wählen wir auch hier

*) Man vergl. Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 250.

**) Man vergl. Borchardt's Journal, Bd. 77, pag. 258.

***) Man vergl. Borchardt's Journal, Bd. 84, pag. 254.

das stetige Intervall $(0 \ldots 1)$; würde diese Mannichfaltigkeit zugleich in die erste Classe gehören, so müsste eine einfach unendliche Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

existiren, die aus *allen reellen Zahlen* $\geqq 0$ und $\leqq 1$ besteht, so dass jede solche Zahl ζ an einer bestimmten Stelle in jener Reihe vorhanden wäre. Dem widerspricht aber ein sehr allgemeiner Satz, welchen wir in Borchardt's Journal, Bd. 77, pag. 260, mit aller Strenge bewiesen haben, nämlich der folgende Satz:

„*Hat man eine einfach unendliche Reihe*

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

von reellen, ungleichen Zahlen, die nach irgend einem Gesetz fortschreiten, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η (*und folglich lassen sich deren unendlich viele*) *angeben, welche nicht in jener Reihe* (*als Glied derselben*) *vorkommt.*"

In Anbetracht des grossen Interesses, welches sich an diesen Satz, nicht blos bei der gegenwärtigen Erörterung, sondern auch in vielen anderen sowohl arithmetischen, wie analytischen Beziehungen, knüpft, dürfte es nicht überflüssig sein, wenn wir die dort befolgte Beweisführung, unter Anwendung vereinfachender Modificationen, hier deutlicher entwickeln.

Unter Zugrundelegung der Reihe:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots,$$

(welcher wir das Zeichen (ω) beilegen) und eines beliebigen Intervalles $(\alpha \ldots \beta)$, wo $\alpha < \beta$ ist, soll also nun gezeigt werden, dass in diesem Intervalle eine reelle Zahl η gefunden werden kann, welche in (ω) *nicht* vorkommt.

I. Wir bemerken zunächst, dass wenn unsre Mannichfaltigkeit (ω) in dem Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *nicht überall-dicht* ist, innerhalb dieses Intervalles ein anderes $(\gamma \ldots \delta)$ vorhanden sein muss, dessen Zahlen sämmtlich nicht zu (ω) gehören; man kann alsdann für η irgend eine Zahl des Intervalls $(\gamma \ldots \delta)$ wählen, sie liegt im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ und kommt sicher in unsrer Reihe (ω) *nicht* vor. Dieser Fall bietet daher keinerlei besondere Umstände; und wir können zu dem *schwierigeren* übergehen.

II. Die Mannichfaltigkeit (ω) sei im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *überall-dicht*. In diesem Falle enthält jedes, noch so kleine in $(\alpha \ldots \beta)$ gelegene Intervall $(\gamma \ldots \delta)$ Zahlen unserer Reihe (ω). Um zu zeigen, dass *nichtsdestoweniger* Zahlen η im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ existiren, welche in (ω) nicht vorkommen, stellen wir die folgende Betrachtung an.

Da in unserer Reihe:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu \ldots$$

sicher Zahlen *innerhalb* des Intervalls $(\alpha \ldots \beta)$ vorkommen, so muss eine von diesen Zahlen den *kleinsten Index* haben, sie sei $\omega_{\varkappa_1}$, und eine andere: $\omega_{\varkappa_2}$ mit dem nächst grösseren Index behaftet sein.

Die kleinere der beiden Zahlen $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$ werde mit α', die grössere mit β' bezeichnet. (Ihre Gleichheit ist ausgeschlossen, weil wir voraussetzten, dass unsere Reihe aus lauter ungleichen Zahlen besteht.)

Es ist alsdann der Definition nach:

$$\alpha < \alpha' < \beta' < \beta,$$

ferner:

$$\varkappa_1 < \varkappa_2;$$

und ausserdem ist zu bemerken, dass alle Zahlen ω_μ unserer Reihe, für welche $\mu \leqq \varkappa_2$ *nicht* im Innern des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ liegen, wie aus der Bestimmung der Zahlen $\omega_{\varkappa_1}$, $\omega_{\varkappa_2}$ sofort erhellt. Ganz ebenso mögen $\omega_{\varkappa_3}$, $\omega_{\varkappa_4}$ die beiden mit den kleinsten Indices versehenen Zahlen unserer Reihen sein, welche in das *Innere* des Intervalls $(\alpha' \ldots \beta')$ fallen und die kleinere der Zahlen $\omega_{\varkappa_3}$, $\omega_{\varkappa_4}$ werde mit α'', die grössere mit β'' bezeichnet.

Man hat alsdann:

$$\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta',$$

$$\varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4,$$

und man erkennt, dass alle Zahlen ω_μ unserer Reihe, für welche $\mu \leqq \varkappa_4$ *nicht* in das *Innere* des Intervalls $(\alpha'' \ldots \beta'')$ fallen.

Nachdem man unter Befolgung des gleichen Gesetzes zu einem Intervall $(\alpha^{(\nu-1)}, \ldots \beta^{(\nu-1)})$ gelangt ist, ergiebt sich das folgende Intervall dadurch aus demselben, dass man die beiden ersten (d. h. mit niedrigsten Indices versehenen) Zahlen unserer Reihe (ω) aufstellt (sie seien $\omega_{\varkappa_{2\nu-1}}$ und $\omega_{\varkappa_{2\nu}}$), welche in das *Innere* von $(\alpha^{(\nu-1)} \ldots \beta^{(\nu-1)})$ fallen; die kleinere dieser beiden Zahlen wird mit $\alpha^{(\nu)}$, die grössere mit $\beta^{(\nu)}$ bezeichnet.

Das Intervall $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ liegt alsdann im *Innern* aller vorangegangenen Intervalle und hat zu unserer Reihe (ω) die *eigenthümliche* Beziehung, dass alle Zahlen ω_μ, für welche $\mu \overline{\overline{<}} \varkappa_{2\nu}$, *sicher nicht in seinem Innern* liegen. Da offenbar:

$$\varkappa_1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \ldots, \; \varkappa_{2\nu-2} < \varkappa_{2\nu-1} < \varkappa_{2\nu}, \; \ldots$$

und diese Zahlen, als Indices, *ganze* Zahlen sind, so ist:

$$\varkappa_{2\nu} \overline{\overline{>}} 2\nu,$$

und daher:

$$\nu < \varkappa_{2\nu};$$

wir können daher, und dies ist für das Folgende ausreichend, gewiss sagen:

Dass, wenn ν eine beliebige ganze Zahl ist, die Grösse ω_ν ausserhalb des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ liegt.

Da die Zahlen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots, \alpha^{(\nu)}, \ldots$ ihrer Grösse nach fortwährend wachsen, dabei jedoch im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eingeschlossen sind, so haben sie, nach einem bekannten Fundamentalsatze der Grössenlehre, eine Grenze, die wir mit A bezeichnen, so dass:

$$A = \operatorname{Lim} \alpha^{(\nu)} \text{ für } \nu = \infty.$$

Ein Gleiches gilt für die Zahlen $\beta', \beta'', \beta''', \ldots, \beta^{(\nu)}, \cdots$, welche fortwährend abnehmen und dabei ebenfalls im Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ liegen; wir nennen ihre Grenze B, so dass:

$$B = \operatorname{Lim} \beta^{(\nu)} \text{ für } \nu = \infty.$$

Man hat offenbar:

$$\alpha^{(\nu)} < A \leqq B < \beta^{(\nu)}.$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass der Fall $A < B$ hier *nicht* vorkommen kann; da sonst jede Zahl ω_ν unserer Reihe *ausserhalb* des Intervalles $(A \ldots B)$ liegen würde, indem ω_ν ausserhalb des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$ gelegen ist; unsere Reihe (ω) wäre im Intervall $(\alpha \ldots \beta)$ *nicht überalldicht*, gegen die Voraussetzung.

Es bleibt daher nur der Fall $A = B$ übrig und es zeigt sich nun, dass die Zahl:

$$\eta = A = B$$

in unserer Reihe (ω) *nicht* vorkommt.

Denn, würde sie ein Glied unserer Reihe sein, etwa das ν^{te}, so hätte man: $\eta = \omega_\nu$.

Die letztere Gleichung ist aber für keinen Werth von ν möglich, weil η im *Innern* des Intervalls $(\alpha^{(\nu)} \ldots \beta^{(\nu)})$, ω_ν aber *ausserhalb* desselben liegt.

Halle a. d. S., im Januar 1879. (Fortsetzung folgt.)