Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln.

Von Paul du Bois-Reymond in Tübingen.

Ich hatte ursprünglich die Absicht, meiner Abhandlung: *Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln**) eine andere folgen zu lassen, welche nach einigen Richtungen hin die dortigen Forschungen weiter fortführen sollte. Dieses Vorhaben wurde mir inzwischen durch die Länge, welche jene erste Veröffentlichung annahm, verleidet, und ich habe, statt noch eine zweite Abhandlung zu schreiben, vorgezogen, Einzelnes aus der Fortsetzung meiner Untersuchungen in kurzem Auszug in jene Mittheilung während des Druckes einzuschalten (Art. 40 von „Dies Resultat" an und Schlussbetrachtungen), Anderes aber, wovon ich mir noch gewisse Ergebnisse versprach, habe ich gar nicht erwähnt. Letzteres hat meine Erwartungen getäuscht, ohne deshalb der Mittheilung ganz unwerth zu erscheinen, und Ersteres bedarf in einem Punkte einer richtigstellenden Erklärung, so dass ich es am Ende doch für angemessen halte, hiermit wenigstens einige Zusätze zu der in Rede stehenden Abhandlung zu machen.

Ueber einen Zusatz zum zweiten Hauptsatz, im Falle seine beiden Seiten divergiren.

Aus der Theorie der Fourier'schen Reihen ist bekannt, dass, wenn eine Function $f(x)$ für einen Werth x des Arguments durch eine solche Reihe darstellbar sein soll, der Limes ($h = \infty$) von:

$$\int_{-(\pi+x)}^{\pi-x} d\alpha\, f(x+\alpha)\, \frac{\sin h\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad h = \frac{2n+1}{2}, \quad n \text{ eine ganze Zahl,}$$

*) Abh. der K. Bayer. Akademie der W. II. Cl., XII. Bd., II. Abth.

endlich und bestimmt sein muss, umgekehrt aber, dass, wenn dieser Limes endlich und bestimmt ist, er stets den Werth $\pi f(x)$ hat und gleich der Summe der Fourier'schen Reihe ist. Weiter ist bekannt, dass die Untersuchung vorstehenden Integrals, falls $-\pi < x < +\pi$, auf die des folgenden:

$$\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_2} d\alpha\, f(x+\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

hinausläuft, wo α_1 und α_2 beliebig wenig von Null verschieden sind. Diesem Integral lässt sich zunächst die Form geben:

$$\int_0^{\alpha_2} d\alpha\, f(x+\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \int_0^{\alpha_1} d\alpha\, f(x-\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Bei der Willkürlichkeit von α_1 und α_2 kann man diese Grössen einander gleichsetzen, und somit handelt es sich schliesslich um die Untersuchung des Limes $h = \infty$ des Integrals:

$$\int_0^{\alpha} d\alpha\,\{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Diese Untersuchung vereinfacht sich dadurch, dass der Grenzwerth vorstehenden Integrals derselbe ist, wenn der Factor $\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ fortgelassen wird. Oder genauer:

Es sind die Grenzwerthe der Integrale:

$$(1)\quad \int_0^{\alpha} d\alpha\, f(x\pm\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\qquad \int_0^{\alpha} d\alpha\,\{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

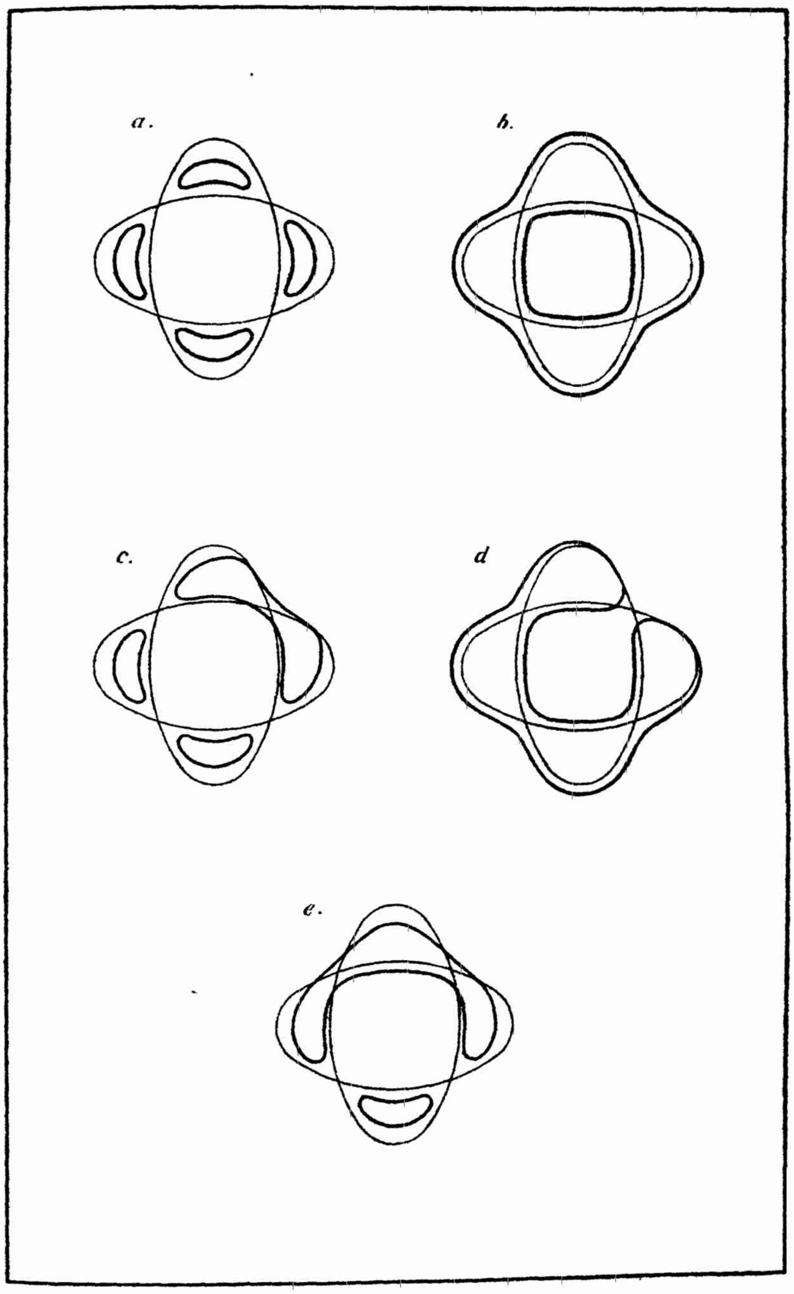
und dieser:

$$(2)\quad \int_0^{\alpha} d\alpha\, f(x\pm\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha},\qquad \int_0^{\alpha} d\alpha\,\{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

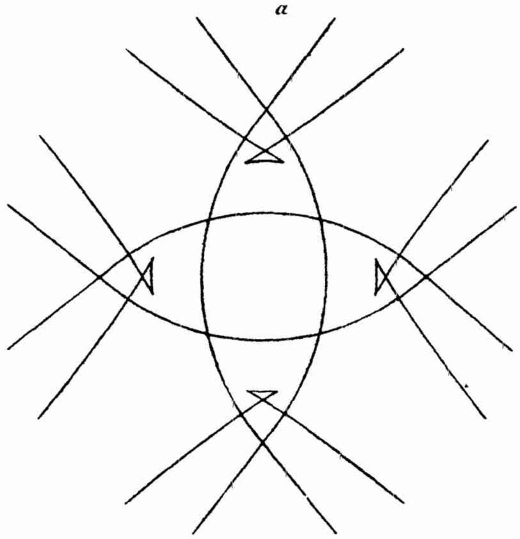
gleichzeitig endlich und bestimmt, oder sie sind es nicht. Und, wenn sie endlich und bestimmt sind, so sind die Grenzwerthe der ersteren (1) *resp. gleich denen der zweiten* (2).

Ich habe diesen Satz noch nirgends in allen Theilen bewiesen, sondern nur nach Bedürfniss besondere Fälle davon, und will das jetzt nachholen. Es handelt sich nämlich im Grunde um eine nicht überflüssige Vervollständigung des zweiten Hauptsatzes:

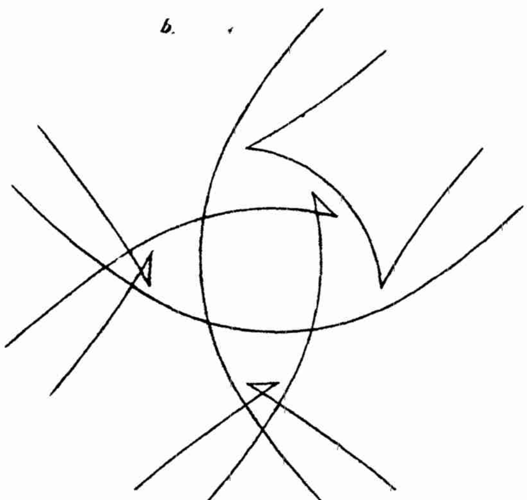
Taf. 1.



a

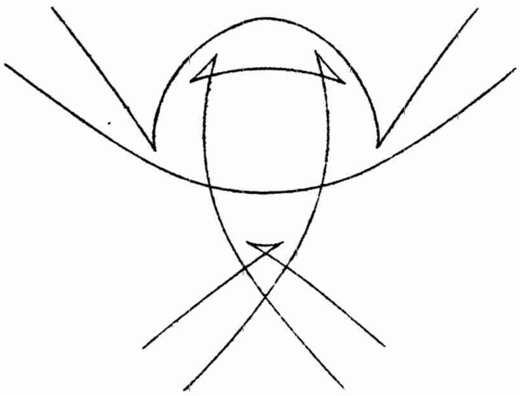


b.

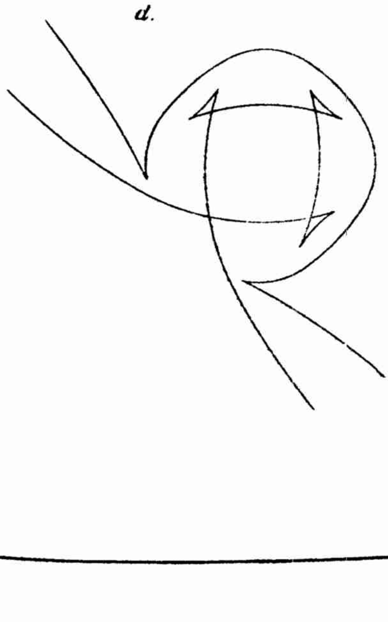


Taf. III.

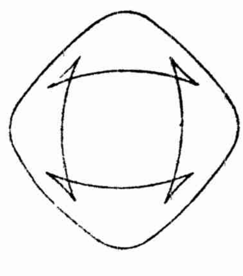
c.



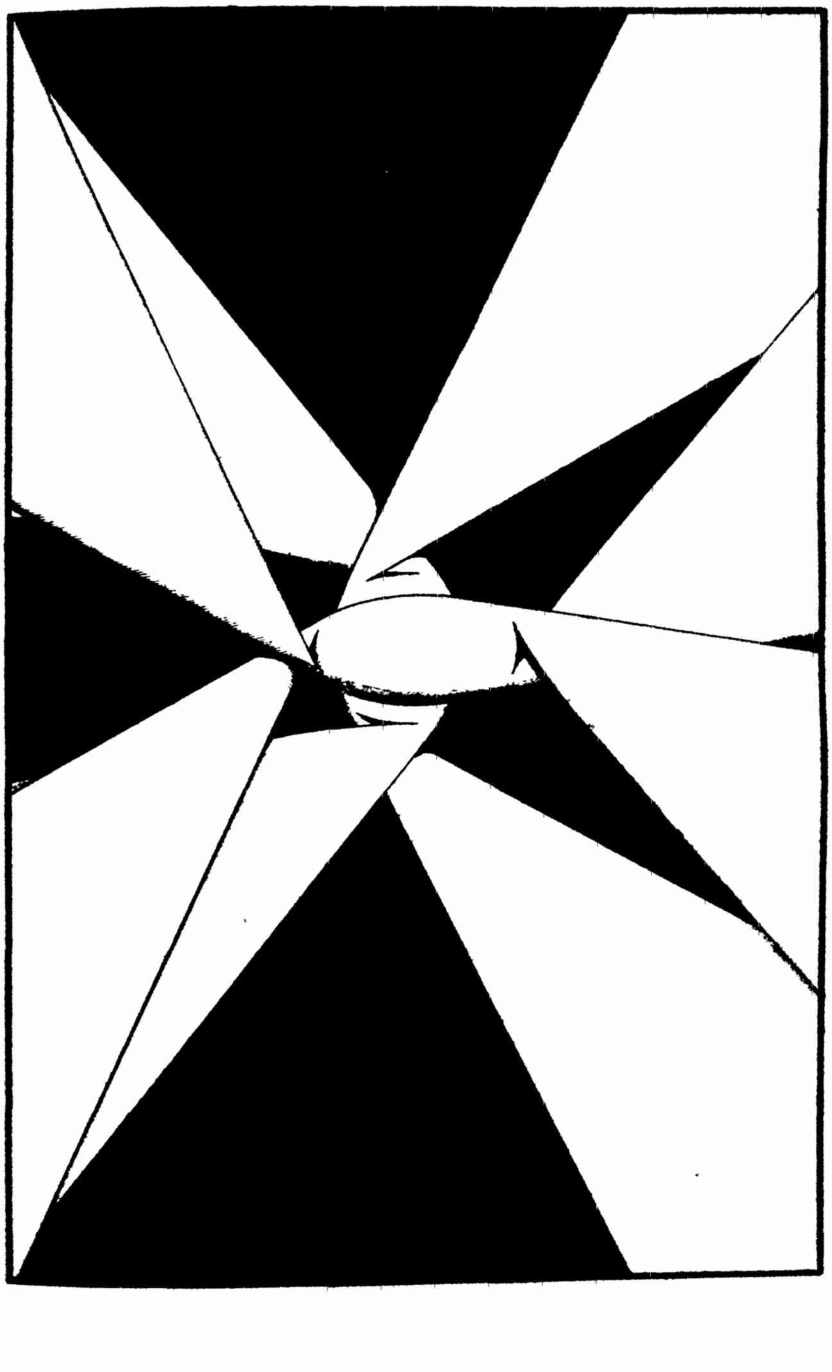
d.



e.



Taf. IV.



$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha f(\alpha)\,\varphi(\alpha,h)=f(0)\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h),$$

der von mir gründlich discutirt worden ist nur für den Fall, wo der von a unabhängige $\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h)$ endlich und bestimmt ist.

Setzt man zunächst im Anschluss an den speciellen Fall der Fourier'schen Reihe:

$$f(\alpha)=\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\quad \varphi(\alpha,h)=f(x\pm\alpha)\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\ \text{oder}\ \{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}\frac{\sin h\alpha}{\alpha},$$

so sind, wie ich gezeigt, die Grenzwerthe der Integrale (2) von a unabhängig, und, wenn sie endlich und bestimmt sind, so sind sie resp. gleich denen der Integrale (1). Aber auch die Grenzwerthe der Integrale (1) können nicht endlich und bestimmt sein, ohne denen der Integrale (2) gleich zu sein. Denn von a sind die Grenzwerthe der Integrale (1) jedenfalls unabhängig, wenn die Grenzwerthe der Integrale (2) es sind, wie mit Hülfe des ersten Hauptsatzes leicht zu zeigen. Setzt man alsdann z. B.

$$f(\alpha)=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}},\quad \varphi(\alpha,h)=f(x\pm\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

so folgt aus dem ersten Hauptsatz in der That:

$$\lim\int_0^a d\alpha f(x\pm\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}=\lim\int_0^a d\alpha f(x\pm\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Da nun die Grenzwerthe der Integrale (1) und (2) in der Beziehung stehen, dass wenn die der einen Gruppe endlich und bestimmt sind, die der anderen es ebenfalls sind, und die Grenzwerthe der Gruppen (1) und (2) dann völlig übereinstimmen, so folgt, *dass die Grenzwerthe (2) nicht divergiren können, ohne dass die Grenzwerthe (1) auch divergent wären.* Das Umgekehrte ist schon aus dem Früheren klar, da, wenn die Grenzwerthe (2) convergent sind, sie gleich den Grenzwerthen (1) sind, wenn also die Grenzwerthe (1) divergent sind, so können die Grenzwerthe (2) nicht convergent sein.

Dehnen wir diese Betrachtung auf den allgemeinen zweiten Hauptsatz aus, so hat man den Satz und Zusatz: Wenn $f(\alpha)$ den Bedingungen des zweiten Hauptsatzes genügt und $\lim\int\limits_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h)$ endlich, bestimmt und von a unabhängig ist, so hat man:

$$\lim_{h=\infty}\int\limits_0^a d\alpha\,\frac{f(\alpha)}{f(0)}\,\varphi(\alpha,h) = \lim_{h=\infty}\int\limits_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h).$$

Dies war der Satz. Weiter, wenn $\frac{1}{f(\alpha)} = f_1(\alpha)$ den Bedingungen des zweiten Hauptsatzes genügt und $\lim\int\limits_0^a d\alpha\,\frac{f(\alpha)}{f(0)}\,\varphi(\alpha,h)$ endlich, bestimmt und von a unabhängig ist, so ist:

$$\lim_{h=\infty}\int\limits_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h) = \lim_{h=\infty}\int\limits_0^a d\alpha\,\frac{f(\alpha)}{f(0)}\,\varphi(\alpha,h).$$

Daraus folgt der Zusatz:

Wenn der Limes:

$$\lim\int\limits_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h)$$

nicht endlich und bestimmt ist, und $f(\alpha)^{-1}$ die Bedingungen des zweiten Hauptsatzes erfüllt, so ist auch der Limes:

$$\lim\int\limits_0^a d\alpha f(\alpha)\,\varphi(\alpha,h)$$

nicht endlich und bestimmt.

Dieser Schluss zeigt, dass unter gewissen Bedingungen für $f(\alpha)$, diese Function unter dem Integralzeichen die Convergenz oder Divergenz des Integralgrenzwerths nicht beeinflusst.

Ich werde ein ähnliches Resultat auf directem Wege ableiten, wobei eine genauere Vorstellung von der Art der gleichzeitigen Divergenz der Grenzwerthe:

$$\lim\int\limits_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h),\quad \lim\int\limits_0^a d\alpha\, f(\alpha)\,\varphi(\alpha,h)$$

gewonnen wird.

Ich nehme zuerst an, der Limes:

$$\lim\int\limits_0^a d\alpha\,\varphi(\alpha,h)$$

sei endlich. Man hat, $f(\alpha)$ endlich vorausgesetzt:

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha,h) = f(0)\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h) + \int_0^a d\alpha f'(\alpha)\int_\alpha^a d\beta f(\beta,h).$$

Das zweite Integral rechts hat den Limes Null. Denn setzt man:

$$\int_0^a = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^a,$$

und nimmt h schon so gross an, dass, für $a \geqq \varepsilon$, $\int_\alpha^a d\beta\varphi(\beta,h)$ numerisch kleiner als die beliebig kleine Grösse μ sei, so ist:

$$\int_\varepsilon^a d\alpha f'(\alpha)\int_\alpha^a d\beta\varphi(\beta,h) = \int_\varepsilon^a d\alpha f'(\alpha)\left\{\mu + \int_\alpha^a d\beta\varphi(\beta,h)\right\} \quad \mu\big(f(a) \quad f(\varepsilon)\big),$$

und vor das Integral rechts kann man einen mittleren Werth von $f'(\alpha)$ nehmen. Hieraus folgt:

Falls $\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$ *endlich bleibt, während* h *unendlich wird, sinkt der Unterschied:*

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha,h) - f(0)\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$$

bei unbegrenzt wachsendem h *unter jede Grenze. D. i.*

$$\lim\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h) \text{ und } \lim\int_0^a d\alpha\,\frac{f(\alpha)}{f(0)}\,\varphi(\alpha,h)$$

haben, wenn $f(\alpha)$ *obige partielle Integration gestattet, dieselben Unbestimmtheitsgrenzen.*

Nehmen wir jetzt an, dass $\int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$ bei unendlich werdendem h nicht zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleibt. Wenn die Function

$$\lambda(h) = \int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h),$$

welche wir stetig annehmen wollen, mit ins Unbegrenzte wachsendem h schliesslich dauernd oder unaufhörlich wiederkehrend jede Grenze numerisch überschreitet, so lässt sich stets eine nirgend abnehmende Function $\varrho(h)$ angeben, von solcher Beschaffenheit, dass

$$\frac{\lambda(h)}{\varrho(h)}$$

zwar nicht unendlich wird, aber auch nicht *unter* jede Grenze sinkt. Denn nimmt man irgend einen Werth h_1 an, so muss es stets einen Werth $h' > h_1$ geben, der Art, dass $\lambda(h') > \lambda(h)$ für alle Werthe $h < h'$. Lassen wir h' dieselbe Rolle spielen, wie eben h_1, so erhalten wir einen Werth $h'' > h'$, für den $\lambda(h'') > \lambda(h)$ für alle Werthe $h < h''$ u. s. f. Die Werthe $\lambda(h')$, $\lambda(h'')$, etc. können wir durch eine nirgend abnehmende Function $\varrho(h)$ verbinden, die stets $\geqq \lambda(h)$ bleibt.

Da nun die Integrale

$$\int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)}, \quad \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)}$$

nach dem Obigen, wenn der Limes des zweiten unter einer endlichen Grenze bleibt, gleichzeitig nicht unter jede Grenze sinken, so werden sie, mit $\varrho(h)$ multiplicirt, gleichzeitig dauernd oder unaufhörlich wiederkehrend über jede Grenze steigen. Dies ist derselbe Satz wie oben, nur mit einer anderen Bedingung für $f(\alpha)$, die vielleicht nach gewissen Richtungen weiter, nach anderen enger ist, jedenfalls aber ihren Nutzen hat.

Die gleichzeitige Divergenz der Grenzwerthe der Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha,h), \quad \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \varphi(\alpha,h)$$

ist noch genauerer Bestimmungen fähig. Man hat die Beziehung:

$$\int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)} = \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)} + \text{einer Grösse, die für } h = \infty \text{ verschwindet.}$$

Nach der Definition sind die *grössten* Werthe, die

$$\int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)}$$

unaufhörlich wiederkehrend annimmt, einander gleich. Also werden Functionen $P(h)$ und $P_1(h)$, die den Integralen:

$$\varrho(h) \int_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)} = \int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha,h),$$

$$\varrho(h) \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \frac{\varphi(\alpha,h)}{\varrho(h)} = \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)} \varphi(\alpha,h)$$

in derselben Weise zugehören wie $\varrho(h)$ zu $\int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha,h)$, einander gleich und gleich $\varrho(h)$ sein, d. h. die unaufhörlich wiederkehrend grössten Werthe der Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, \varphi(\alpha, h), \quad \int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{f(0)}\, \varphi(\alpha, h)$$

werden gleich rasch unendlich.

Ich verfolge diese feineren Verhältnisse hier nicht weiter, weil dazu gewisse neue bei jeder Unbestimmtheit massgebende Functionen erst beschrieben werden müssten, die ich Unbestimmtheitsenveloppen nenne, und deren Theorie ich nächstens mittheilen werde.

Hinsichtlich der Fourier'schen Reihen ist unser Ergebniss also, *dass die Convergenz und Divergenz des Limes $h = \infty$ des Integrals*

$$\int_0^a d\alpha \left\{ f(x+\alpha) + f(x-\alpha) \right\} \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

über Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Reihenentwickelung ausnahmslos entscheidet. Ich werde alsbald von diesem Satze Gebrauch machen, um eine merkwürdige Art der Convergenz und eine neue Art der Divergenz der Fourier'schen Reihen zu zeigen, bedarf indessen dazu einiger Formeln über asymptotische Formen von Integralgrenzwerthen, die ich voranschicken will.

Ueber einige asymptotische Grenzwerthe von Integralen.

Wenn das Integral

$$\int e^{iz}\, \psi(z)\, dz$$

über einen den positiven Quadranten umlaufenden Weg genommen wird, so ergiebt sich die Formel:

$$\int_0^\infty e^{ix} \psi(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x} \psi(ix)\, i\, dx,$$

welche gilt, wenn $\psi(z)$ in jenem Quadranten stetig und eindeutig ist, und $r\psi(re^{i\varphi})$ mit r nicht so stark wie eine Potenz von e^r unendlich wird. In dieser Formel setze man $\psi(x) = \frac{1}{x+\gamma}$, alsdann findet man durch Zerlegung in den reellen und imaginären Theil:

$$\int_0^\gamma d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - G \cos\gamma - H \sin\gamma,$$

$$\int_\gamma^\infty d\alpha \frac{\cos \alpha}{\alpha} = \quad - G \sin\gamma + H \cos\gamma,$$

wo

$$G = \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma\alpha}\,d\alpha}{1+\alpha^2}, \quad H = \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\gamma\alpha}\,d\alpha}{1+\alpha^2},$$

und daher:

$$G = \frac{u_1}{\gamma}, \quad H = \frac{u_2}{\gamma^2},$$

wo u_1 und u_2, während γ unendlich wird, nur zunehmend den Werth Eins erhalten.

Dies liefert die asymptotischen Werthe:

$$\int_0^\gamma d\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - u_1 \frac{\cos\gamma}{\gamma} - u_2 \frac{\sin\gamma}{\gamma^2},$$

$$\int_\gamma^\infty d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} = \quad - u_1 \frac{\sin\gamma}{\gamma} + u_2 \frac{\cos\gamma}{\gamma^2},$$

wo

$$u_1 \overline{\overline{\infty}}\, u_2 \overline{\overline{\infty}}\, 1.$$

Uns genügen die asymptotischen Formen:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^\gamma d\alpha \frac{\sin\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{U}{\gamma}, \\ &\int_\delta^\infty d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} = \frac{U_1}{\gamma}, \end{aligned} \right.$$

in denen U, U_1 zwischen -1 und $+1$ schwanken, wenn γ unendlich wird.

Um den asymptotischen Werth des Integrals

$$J = \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_1\alpha \sin h_2\alpha}{\alpha}$$

zu finden, unterscheiden wir die Annahmen $h_1 \gtreqless h_2$, machen zunächst diese: $h_1 > h_2$, und setzen voraus, dass $h_1 - h_2$ mit h_1 und h_2 unendlich wird. Man findet leicht:

$$J = \int_0^\varepsilon d\alpha \frac{\sin h_1\alpha \sin h_2\alpha}{\alpha} + \tfrac{1}{2}\int_{\varepsilon(h_1-h_2)}^{\varepsilon(h_1+h_2)} d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\int_{a(h_1-h_2)}^{a(h_1+h_2)} d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha}.$$

Wir nehmen ε so klein an, dass wir das erste Integral rechts vernachlässigen können, und dass das zweite (man nimmt einen mittleren Werth von $\cos\alpha$ vor das Integral) gleich $\frac{1}{2}\log\dfrac{1+\frac{h_2}{h_1}}{1-\frac{h_2}{h_1}}$ wird. Auf das dritte wendet man die Formeln (I) an. Somit folgt:

$$\text{(II)}\quad \int_0^a d\alpha \frac{\sin\alpha h_1 \sin\alpha h_2}{\alpha} = \tfrac{1}{2}\log\frac{1+\frac{h_2}{h_1}}{1-\frac{h_2}{h_1}} + \frac{U'}{2a(h_1-h_2)} + \frac{U''}{2a(h_1+h_2)}.$$

wo, während h_1 und h_2 unendlich werden, U' und U'' zwischen den Grenzen ± 1 schwanken.

Beispielsweise folgt daraus:

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha \frac{\sin rh\alpha \sin sh\alpha}{\alpha} = \int_0^\infty d\alpha \frac{\sin r\alpha \sin s\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\log\frac{r+s}{r-s},\quad r>s.$$

Aehnlich ergiebt sich für $h_1 > h_2$ und Unendlichwerden der Differenz $h_1 - h_2$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^a d\alpha \frac{\sin h_1\alpha \cos h_2\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{U'}{2a(h_1-h_2)} + \frac{U''}{2a(h_1+h_2)}, \\ \displaystyle\int_0^a d\alpha \frac{\cos h_1\alpha \sin h_2\alpha}{\alpha} = -\frac{U_1'}{2a(h_1-h_2)} + \frac{U_1''}{2a(h_1+h_2)}, \end{cases}$$

mit den Sonderergebnissen:

$$\int_0^\infty d\alpha \frac{\sin r\alpha \cos s\alpha}{\alpha} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty d\alpha \frac{\cos r\alpha \sin s\alpha}{\alpha} = 0,$$

wo die Grössen U, wenn h_1 und h_2 unendlich werden, ebenfalls zwischen $+1$ und -1 schwanken.

Der Fall $h_1 = h_2 = h$ führt auf folgende Formeln:
Man setzt:

$$\int_0^a d\alpha \frac{\sin^2 \alpha h}{\alpha} = \int_0^\varepsilon d\ \frac{\sin^2\alpha}{\alpha} + \int_\varepsilon^{ah} d\alpha \frac{\sin^2\alpha}{\alpha},$$

und führt unter dem zweiten Integral rechts den $\cos 2\alpha$ ein. Dies giebt:

$$\int_0^a d\alpha \frac{\sin^2\alpha h}{\alpha} = \frac{1}{2}\log(ah) - \frac{1}{2}\log\varepsilon - \frac{1}{2}\int_{2\varepsilon}^{2ah} d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha} + \int_0^\varepsilon d\alpha \frac{\sin^2\alpha}{\alpha},$$

wodurch die asymptotische Form genügend festgestellt ist. Denn setzt man z. B. $\varepsilon = 1$, so bleibt das Integral $\int_{2\varepsilon}^{2ah} d\alpha \frac{\cos\alpha}{\alpha}$, wie durch Anwendung des zweiten Mittelwerthsatzes zu erkennen, numerisch kleiner als $1+\frac{1}{ah}$, das letzte Integral rechts kleiner als 1. Nimmt man also $ah>1$ an, so hat man:

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^a d\alpha \frac{\sin^2 \alpha h}{\alpha} = \frac{1}{2}\log (ah) + V,$$

wo $V^2 < 4$.

Endlich folgt daraus wegen:

$$\int_0^a d\alpha \frac{\sin h\alpha \cos h\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{2ah} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

dieser asymptotische Werth:

$$\text{(V)} \quad \int_0^a d\alpha \frac{\sin h\alpha \sin h(\alpha+c)}{\alpha} = \frac{1}{2}\cos hc \log ah + \cos hc \cdot V + \frac{\sin hc}{2}\int_0^{2ah} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha},$$

wo wieder $V^2 < 4$.

Ueber Darstellbarkeit durch Fourier'sche Reihen von Functionen, die durchweg unendlichviele Maxima haben.

Dies vorausgeschickt sei $f(x)$ eine Reihe der Form

$$f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$$

in der die $\varkappa$ eine positive convergente Zahlenreihe vorstellen. Man denke sich die Grössen h_1, h_2 etc. derart, dass $h = \frac{2n+1}{2}$ bei seinem Wachsthum ihnen successive gleich wird. Nun sei $h = h_m$, alsdann hat man:

$$\int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha)\frac{\sin \alpha h_m}{\alpha} = \pm \sum_{p=1}^{p=m-1} \varkappa_p \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_p(\alpha \pm x)\sin h_m \alpha}{\alpha}$$

$$\pm \varkappa_m \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_m(\alpha \pm x)\sin h_m \alpha}{\alpha} \pm \sum_{p=m+1}^{p=\infty} \varkappa_p \int_0^a d\alpha \frac{\sin h_p(\alpha \pm x)\sin h_m \alpha}{\alpha}.$$

Es liegt nun nahe, um eine nicht darstellbare Function $f(x)$ zu erhalten, $\varkappa_p$ und h_p so zu wählen, dass, wenn h unendlich wird, das mittlere Integral ebenfalls unendlich wird, während die Summen an seinen beiden Seiten endlich bleiben. Nach Formel (V) wird das mittlere Integral:

$$\varkappa_m \left\{\frac{1}{2}\cos h_m x \log ah_m + \text{einer Grösse, die endlich bleibt, wenn } h_m \text{ unendlich wird}\right\}.$$

Soll vorstehendes Product mit m unendlich werden, oder doch nicht verschwinden, so muss sein:

$$\varkappa_p l h_p \gtrsim 1,$$

wozu die weitere Bedingung kommt

$$\varkappa_p < \frac{\tau(p)}{p},$$

in der $\frac{\tau(p)}{p}$ die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz vorstellt (Untersuchungen etc. p. XV Anm. und p. 45). Die beiden Bedingungen:

$$\varkappa_p < \frac{\tau(p)}{p}, \quad \varkappa_p l h_p \gtrsim 1$$

reichen für die Divergenz des Limes $h = \infty$ von:

$$\int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

aus, da, wie ein Blick auf die asymptotischen Formen III lehrt, die Summe rechts vom mittleren Integral Null, die Summe links $\frac{\pi}{2} f(x)$ zur Grenze hat, weil aus $l h_p \gtrsim \frac{p}{\tau(p)}$, also $l h_p > p$ jedenfalls folgt $h_p - h_{p-1} > 1$, da dies schon aus $h_p > p$ folgen würde.

Bildet man dagegen mit $f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$ das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \{f(x+\alpha) + f(x-\alpha)\} \frac{\sin h_m \alpha}{\alpha}$$

und theilt es wie oben in drei Theile, so wird der mittlere:

$$\varkappa_m \int_0^a d\alpha \{\sin h_m(x+\alpha) + \sin h_m(x-\alpha)\} \frac{\sin h_m \alpha}{\alpha}$$

$$= \varkappa_m \cos h_m x \int_0^a d\alpha \frac{\cos h_m \alpha \sin h_m \alpha}{\alpha} = \frac{\varkappa_m}{2} \cos h_m x \int_0^{2ah_m} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

und verschwindet für $h_m = \infty$, während der erste Theil $\pi f(x)$ zur Grenze hat und der dritte ebenfalls Null.

Es folgt hieraus, dass die Function

$$f(x) = \varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$$

unter den Bedingungen $\varkappa_p < \frac{\tau(p)}{p}$, $\varkappa_p l h_p \gtrsim 1$ für die $\varkappa$ und h einen divergenten Limes:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha f(x \pm \alpha) \frac{\sin \alpha h}{\alpha}$$

und einen gegen $\pi f(x)$ convergenten Limes

$$\lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\,\{f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\}\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

ergiebt. Mithin ist die Function $f(x)$ für jeden Werth von x durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar, indem die Divergenz der Grenzwerthe von

$$\int_0^a d\alpha\, f(x+\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha},\quad \int_0^a d\alpha\, f(x-\alpha)\,\frac{\sin\alpha h}{\alpha}$$

sich aufhebt.

Aber man kann, indem man eine Function aus Strecken der Function $f(x)$ und anderer Functionen zusammensetzt, jene so herstellen, dass sie, wenngleich durchweg endlich und stetig, in beliebig vielen Punkten durch Fourier'sche Reihen nicht convergent entwickelbar ist. Es sei z. B. eine Function $\varphi(x)$ gleich $f(x_1)$ für $x < x_1$ und gleich $f(x)$ für $x \geqq x_1$. Um sie durch die Fourier'sche Formel darzustellen, bedürfte es der Untersuchung, ob dies möglich ist, und es würde sich zeigen, dass es für $x = x_1$ nicht möglich ist. Wir können sie aber durch andere darstellende Integrale ausdrücken. Es ist z. B.

$$\varphi(x) = \lim_{h=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\,\varphi(\alpha) h e^{-h^2(\alpha-x)^2},$$

also

$$\varphi(x) = \lim_{h=\infty}\left\{f(x_1)\int_{-\infty}^{x_1} d\alpha\, h\, e^{-h^2(\alpha-x)^2}+\int_{x_1}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha) h e^{-h^2(\alpha-x)^2}\right\}$$

$$= \lim_{h=\infty}\left\{f(x_1)\int_{-\infty}^{h(x_1-x)} d\alpha\, e^{-\alpha^2}+\int_{h(x_1-x)}^{\infty} d\alpha\, f\!\left(x+\frac{\alpha}{h}\right)e^{-\alpha^2}\right\}.$$

Diese Function ist also für $x = x_1$ durch Fourier'sche Reihen nicht darstellbar.

Von besonderem Interesse ist der Fall $x_1 = 0$, wo also:

$$\varphi(x) = \lim_{h=\infty}\int_{-hx}^{\infty} d\alpha\, f\!\left(x+\frac{\alpha}{h}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Fragt man nämlich nach der Function $\frac{1}{\varrho(x)}$, mit der man $f(x_1)-f(x)$ multipliciren muss, damit $\frac{f(x_1)-f(x)}{\varrho(x)}$ für $x = x_1$ weder Null noch unendlich werde, so wird $\varrho(x)$ offenbar am raschesten Null werden für

$x_1 = 0$, und wenn $\varrho(x)$ successive die $x = 0$ nächstgelegenen *Minima* von $\varkappa_1 \sin h_1 x,\ \varkappa_2 \sin h_2 x, \cdots$ verbindet, weil diese Minima von $x=0$ entfernter sind, als die einem anderen Werth x nächstgelegenen von diesem anderen Werth entfernt sind. Die $x=0$ nächstgelegenen Minima von $\varkappa_1 \sin h_1 x,\ \varkappa_2 \sin h_2 x, \cdots$ sind bestimmt durch $h_p x = \frac{3\pi}{2}$. Man hat also:

$$\varkappa_p l h_p \gtrless 1, \quad h_p x = \frac{3\pi}{2}, \quad \varrho(x) = \varkappa_p.$$

Daraus folgt:

$$\varrho(x) \gtrless \frac{1}{l\frac{1}{x}}.$$

Diese Bedingung für die Divergenz einer Function, die für $x > 0$ Null ist, für $x \gtrless 0$ gleich $f(x)$ ist, stimmt überein mit der (Untersuchungen etc. p. 86 und 87) für $\varrho(x)$ aufgestellten Bedingung.

Bemerkungen zu den vorstehenden Ergebnissen.

Ich verband einen ganz anderen Zweck mit der Untersuchung auf ihre Darstellbarkeit durch Fourier'sche Reihen einer Function:

$$F(x) = \varkappa_1 \varphi_1(x) \sin h_1 x + \varkappa_2 \varphi_2(x) \sin h_2 x + \cdots,$$

von der die eben betrachtete $f(x)$ ein specieller Fall ist. Es handelte sich für mich um die Frage: *Wenn es zweifellos durchweg endliche, stetige Functionen giebt, die in einzelnen Punkten oder sogar in Punkten, die in jedem kleinsten Intervall vorkommen, nicht darstellbar sind: giebt es wohl auch durchweg endliche und stetige Functionen, die in keinem Punkte darstellbar sind?*

Ich bin nicht so glücklich gewesen, diese Frage zu erledigen. Mit der angeführten Form $F(x)$ habe ich keine solche nirgend darstellbare Functionen zusammensetzen können. Ja eigentlich habe ich meine Bemühungen nur deshalb aufgegeben, weil mir schliesslich die *Möglichkeit* derartiger Functionen nicht mehr einleuchten wollte. Denn der Grenzwerth eines der Integrale

$$\int_0^a d\alpha f(x+\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}, \quad \int_0^a d\alpha f(x-\alpha)\,\frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

wird divergent, wenn bei dem Wachsthum von h immer genügend Zeichenwechsel von $\sin \alpha h$ durch $f(x \pm \alpha)$ aufgehoben werden, und wenn dies für eines der Integrale der Fall ist, und die hierzu erforderliche sinusartige Beschaffenheit von $f(x)$ erstreckt sich auch nur um ein Kleines an beiden Seiten von x, so wird die Divergenz des einen Integrals durch die des anderen stets aufgehoben, welchem Umstand es zu verdanken ist, dass ungemein viel mehr Functionen durch Fourier'sche Reihen darstellbar sind, als man dies bei Betrachtung nur eines jener Integrale erwarten sollte. In gesonderten Punkten kann die sinusartige Beschaffenheit von $f(x)$ unterbrochen werden, aber in allen Punkten — nun ich kann es mir eben nicht denken. Indessen täuschen dergleichen allgemeine Betrachtungen bisweilen, und so ist es auch durchaus nicht meine Absicht hier eine *Behauptung* aufzustellen, sondern nur meine Erfahrungen und Ansichten mitzutheilen.

Noch einen Punkt will ich schliesslich hier zur Sprache bringen, in Bezug auf welchen ich nachträglich meine Behauptung etwas genauer begrenzen will.

Ich habe (Untersuchungen etc. p. 86 und 87) gezeigt*), dass bei Functionen, die ausser in der beliebig kleinen Umgebung des Punktes $x=0$ nicht unendlich viele Maxima haben, die Darstellbarkeit für diesen Punkt erst aufhören kann, wenn der Function die Form $\varrho(x)\,\varphi(x)$ sich geben lässt, wo $\varrho(x) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{x}}$ und $\varphi(x)$ für $x=0$ nicht verschwindet. Dergleichen Functionen sind thatsächlich unter Umständen nicht darstellbar. Die Frage ist eben nur, ob die Darstellbarkeit nicht für kleinere Nullen von $\varrho(x)$ schon aufhört. Ich habe wiederum gezeigt, dass für $\varrho(\alpha) \precsim \tau(\alpha)$, wo

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\,l_2\frac{1}{\alpha}\cdots l_r\frac{1}{\alpha}} \succ \tau(\alpha) \succ \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}\,l_2\frac{1}{\alpha}\cdots\left(l_r\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}},\quad \mu \text{ beliebig klein,}$$

die Function *stets* darstellbar ist. Es handelt sich also um die infinitäre Lücke:

$$\frac{1}{l\frac{1}{\alpha}} \succ \varrho(\alpha) \succ \tau(\alpha).$$

Die Ausdehnung der Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrsim \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ auf Functionen, die durchweg unendlich viele Maxima haben, oder gar nach Art gewisser integrirbarer Functionen durchweg unstetig sind, ist es, welche ich nicht in befriedigender Weise ausser Zweifel zu setzen vermag. Zwar widerspricht ihr die obige Betrachtung der Function $\varkappa_1 \sin h_1 x + \varkappa_2 \sin h_2 x + \cdots$ keineswegs, da sie vielmehr dieselbe Grenze ergiebt. Der allgemeine Beweis aber, den ich nachträglich mittheilen wollte, und der auf einer idealen Zusammenschiebung der Stellen ohne Zeichenwechsel beruht, will diese Functionen, die doch lediglich Geschöpfe der Analysis sind,

---

*) Ich habe mich an dieser während des Druckes eingeschalteten Stelle etwas kurz fassen müssen, indessen wird das Gesagte wohl genügen.

einer geometrischen Anschauungsweise unterwerfen, der sie allerdings schwer sich fügen werden, die daher berechtigten Zweifeln begegnen könnte, und die mir selbst von Tag zu Tag bedenklicher wird, so dass ich vorziehe, hiermit die Bedingung $\varrho(\alpha) \gtrless \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ ausdrücklich nur für die Functionen $f(x)$, die ausser in der Umgebung von $x = 0$ nicht unendlich viele Maxima haben, oder durch trigonometrische Reihen mit unbedingt convergenten Coefficienten darstellbar sind, zu behaupten*).

Tübingen, Mai 1876.

---

*) Da die Functionen der Form $\varrho(\alpha)\psi(\alpha)$, wo $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ nicht verschwindet, und $\varrho(\alpha) \gtrless \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ ist, nachweislich für $\alpha = 0$ manchmal nicht darstellbar sind, so ist also nur zu zeigen, dass sie für $\varrho(\alpha) < \frac{1}{l\frac{1}{\alpha}}$ darstellbar sind, was darauf hinausläuft, zu beweisen, dass $\lim_{h=\infty} \int\limits_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha\, l\frac{1}{\alpha}} \sin h\alpha = 0$, falls $\varphi(0) = 0$. Es scheint aber, dass ein analytischer Beweis dieses Satzes Schwierigkeiten derselben Ordnung bietet, wie die Untersuchung des Integrals $\int\limits_0^a d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \sin h\alpha$, wiewohl man meinen könnte, wegen des Logarithmus im Nenner, in viel vortheilhafterer Lage zu sein. Jedenfalls ist durch meine Untersuchungen gegenwärtig das Interesse der Theorie von diesem Integral in jenes verlegt. Ich habe aber nicht die Absicht mich weiter damit zu beschäftigen.