Werk

Titel: PRIMÌERE SECTION

Jahr: 1837

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?129323640_0010|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

gène très-mince AB suspendue par l'extrémité A au cordon flexible OA. Si l'on fait abstraction de la résistance de l'air, le filet moyen du cordon et l'axe de la barre, parvenus à un état permanent, seront dans le plan vertical y, x, et tourneront avec lui autour de la verticale Ox, dans la position indiquée par la figure.

Le quatrième volume du recueil cité contient la solution de ce problème, où j'ai pris en considération la courbure du fil. Je me propose maintenant de reprendre la théorie de cette expérience, et d'examiner plus en détail les résultats que l'on en peut déduire dans un très-grand nombre de cas particuliers.

PREMIÈRE SECTION.

THÉORIE GÉNÉRALE.

Considérons un solide quelconque homogène symétrique par rapport au plan des x, y; et supposons que la droite AB passe par le point d'attache du corps et par son centre de gravité G. Nommons, pour abréger,

θ la vitesse angulaire du système,

a la distance entre le point d'attache A et le centre de gravité G,

ε la distance entre le centre G et le point C où la droite AB, rencontre l'axe des x,

l la longueur du cordon OA,

ω l'aire de la section transversale du cordon,

ρ sa densité,

p le poids du cordon divisé par sa longueur,

V le volume du corps suspendu,
ρ' sa densité,
P son poids,
α l'angle ACO,
β l'angle que fait avec l'axe des x, la tangente à l'extrémité inférieure du cordon,
τ la tension en un point quelconque du cordon rapportée à l'unité de surface,
T la valeur de τ au point A,
s la longueur variable de la courbe à partir du point O,
h la distance du point C à l'origine O,
$x, y,$ les coordonnées d'un point quelconque du fil OA,
$x', y',$ les coordonnées d'un point quelconque du corps solide,
ξ la différence $h - x'$,
g le coefficient de la gravité, et
π le rapport de la circonférence au diamètre du cercle.

La vitesse angulaire θ étant invariable, le système parviendra bientôt à un état d'équilibre stable. En appliquant à ce cas les principes connus de la mécanique, on obtient facilement les cinq relations suivantes dans lesquelles les intégrations indiquées doivent s'étendre à tout le volume V.

$$g\rho' V = \omega T \cos.\beta, \quad \rho'\theta^2 \int y' dV = \omega T \sin.\beta,$$

$$\rho'\theta^2 \int y' \xi dV + g\rho' \int y' dV = \omega T (\alpha + \varepsilon) \sin.(\alpha + \beta),$$

$$d\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) + g\rho ds = o, \quad d\left(\tau \frac{dy}{ds}\right) + \rho\theta^2 y ds = o.$$

Ces équations, jointes à l'expression de l'intégrale relative à la longueur donnée du cordon, serviront à la détermination des inconnues h, ε, α, β, T, et feront connaître la nature de la courbe OA, ainsi que la valeur de la tension τ.

L'équilibre stable du système peut aussi avoir lieu en supposant

que le diamètre AB est tout entier à droite de l'axe des x; ce qui rend négative la valeur de cos. α. Pour avoir les formules relatives à cette hypothèse il suffit de changer le signe de a.

Par la propriété connue du centre de gravité on a $\int y' d\mathrm{V} = \varepsilon \mathrm{V} \sin. \alpha$, et si l'on observe que $g\rho' \mathrm{V} = \mathrm{P}$, les deux premières équations nous donneront, en éliminant alternativement T et β,

$$(1) \quad \text{tang. } \beta = \frac{\varepsilon}{g} \theta^2 \sin. \alpha, \qquad (2) \quad \omega \mathrm{T} = \frac{\mathrm{P}}{\cos. \beta}.$$

Pareillement si l'on élimine les mêmes quantités de la troisième équation, on aura

$$(3) \quad \theta^2 \int y' \tfrac{5}{3} d\mathrm{V} = [ag + (a + \varepsilon) \varepsilon \theta^2 \cos. \alpha] \mathrm{V} \sin. \alpha.$$

En intégrant la quatrième équation, et en déterminant la constante arbitraire par la condition qu'au point A l'on doit avoir

$$s = l, \quad \tau = \mathrm{T}, \quad \frac{dx}{ds} = \cos. \beta,$$

on trouve

$$\tau \frac{dx}{ds} + g\rho s = \mathrm{T} \cos. \beta + g\rho l.$$

Si l'on développe les équations différentielles de la page précédente; si l'on multiplie ensuite la première par $\frac{dx}{ds}$ et la seconde par $\frac{dy}{ds}$, la somme des produits sera intégrable et donnera

$$(4) \quad \tau + g\rho x + \tfrac{1}{2} \rho \theta^2 y^2 = \mathrm{K},$$

en désignant par K la constante arbitraire.

Éliminons τ entre l'équation (4) et la précédente, nous aurons enfin,

$$(5) \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\mathrm{K} - g\rho x - \frac{1}{2} \rho \theta^2 y^2}{\mathrm{T} \cos. \beta + g\rho (l - s)}.$$

Les équations que nous venons d'obtenir successivement peuvent

être considérées comme des transformations du premier système d'équations; mais pour les rendre applicables, il reste encore deux intégrations à effectuer. L'intégration indiquée dans l'équation (3) ne dépend que des quadratures; et nous verrons plus loin que sa valeur peut s'exprimer en termes finis dans un très-grand nombre de cas. Il n'en est pas de même de l'équation (5) qu'il est impossible d'intégrer autrement que par approximation.

A cette effet nous supposerons d'abord que le poids du cordon est une très-petite fraction du poids du corps suspendu, ce qui permet de négliger les termes multipliés par g; et nous aurons cette équation beaucoup plus simple

$$\frac{ds}{dx}\,\mathrm{T}\cos.\beta = \mathrm{K} - \tfrac{1}{2}\rho\theta^2 y^2. \qquad (6)$$

On déterminera la constante arbitraire K en observant que l'on a en même temps

$$y = (a+\varepsilon)\sin.\alpha,\quad \frac{dx}{ds} = \cos.\beta,$$

ce qui donne

$$\mathrm{K} = \mathrm{T} + \tfrac{1}{2}\rho\theta^2(a+\varepsilon)^2\sin.^2\alpha.$$

Faisons, pour abréger,

$$\mu = \frac{1}{\cos.\beta} + \tfrac{1}{2}\rho\theta^2\,\frac{(a+\varepsilon)^2\sin.^2\alpha}{\mathrm{T}\cos.\beta},\quad \lambda^2 = \frac{2\mathrm{T}\cos.\beta}{\rho\theta^2},$$

l'équation (6) deviendra

$$\frac{ds}{dx} = \mu - \frac{y^2}{\lambda^2}. \qquad (7)$$

Mais on a $g\rho\omega = p$, et $\omega\mathrm{T}\cos.\beta = \mathrm{P}$ d'après l'équation (2); par conséquent

$$\lambda^2 = \frac{2g\mathrm{P}}{p\theta^2}, \qquad (8)$$

$$\mu = \frac{1}{\cos.\beta} + \left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2\sin.^2\alpha. \qquad (9)$$

En substituant dans l'équation (7) la valeur de $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, on en déduira sans difficulté

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\mu + 1 - \frac{y^2}{\lambda^2}\right)\left(\mu - 1 - \frac{y^2}{\lambda^2}\right)}.$$

L'intégration de cette dernière équation dépend des fonctions elliptiques auxquelles on la ramène aisément en posant

$$(11) \ldots\ldots \quad c^2 = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}, \quad (12) \ldots\ldots \quad y = \frac{2c\lambda \sin. \varphi}{\sqrt{2(1-c^2)}};$$

d'où

$$dy = \frac{2c\lambda \cos. \varphi}{\sqrt{2(1-c^2)}}\, d\varphi;$$

et en substituant ces valeurs dans l'équation (10) on aura

$$dx = \frac{\lambda}{2}\sqrt{2(1-c^2)}\, \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi}};$$

et par suite

$$ds + dx = \frac{2\lambda}{\sqrt{2(1-c^2)}}\, d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin.^2 \varphi.}$$

Partant

$$(13) \ldots\ldots \quad x = \frac{\lambda}{2}\sqrt{2(1-c^2)}\, \mathrm{F}(c, \varphi)$$

$$(14) \ldots\ldots \quad s + x = \frac{2\lambda}{\sqrt{2(1-c^2)}}\, \mathrm{E}(c, \varphi).$$

Si nous substituons dans l'équation (4) la valeur de K trouvée plus haut, nous aurons, en négligeant le terme multiplié par g,

$$(15) \ldots\ldots \quad \tau = \mathrm{T} + \tfrac{1}{2}\rho\theta^2 [(a+\varepsilon)^2 \sin.^2 \alpha - y^2].$$

Désignons par φ' la valeur de φ qui correspond à $y = (a+\varepsilon) \sin. \alpha$; la formule (12) nous donnera

$$(16) \ldots\ldots \quad (a+\varepsilon) \sin. \alpha = \frac{2c\lambda \sin. \varphi'}{\sqrt{2(1-c^2)}};$$

et en faisant, dans les équations (13) et (14), $x = h - (a+\varepsilon)\cos.\alpha$, $s = l$, $\varphi = \varphi'$, on aura

$$(17). \quad h = (a+\varepsilon)\cos.\alpha + \frac{\lambda}{2}\sqrt{2(1-c^2)}\ \mathrm{F}(c, \varphi')$$

$$(18). \quad l + h = (a+\varepsilon)\cos.\alpha + \frac{2\lambda}{\sqrt{2(1-c^2)}}\ \mathrm{E}(c, \varphi').$$

Si le rapport $\frac{y}{\lambda}$ est une fraction très-petite et telle que l'on puisse négliger sa quatrième puissance dans l'équation (10), on a un système de formules plus simples que les précédentes.

On trouve d'abord, en intégrant cette équation,

$$(19). \quad y = \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-1}}{\sqrt{2\mu}}\ \mathrm{sin.}\ \frac{x\sqrt{2\mu}}{\lambda};$$

et ensuite

$$(20). \quad s = \frac{\mu y}{\sqrt{\mu^2-1}}\left(1 + \frac{y^2}{3\mu(\mu^2-1)\lambda^2}\right).$$

Ces formules donnent, en y faisant $y = (a+\varepsilon)\ \mathrm{sin.}\ \alpha$,

$$(21). \quad (a+\varepsilon)\ \mathrm{sin.}\ \alpha = \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-1}}{\sqrt{2\mu}}\ \mathrm{sin.}\ (h-(a+\varepsilon)\cos.\alpha)\ \frac{\sqrt{2\mu}}{\lambda}.$$

$$(22). \quad l = \frac{\mu(a+\varepsilon)\ \mathrm{sin.}\ \alpha}{\sqrt{\mu^2-1}}\left(1 + \frac{(a+\varepsilon)^2\ \mathrm{sin.}^2\alpha}{3\mu(\mu^2-1)\lambda^2}\right).$$

En développant l'équation (21) et en négligeant les termes divisés par les puissances de λ supérieures au carré, on obtient

$$(23). \quad h - (a+\varepsilon)\cos.\alpha = \frac{(a+\varepsilon)\ \mathrm{sin.}\ \alpha}{\sqrt{\mu^2-1}}\left(1 + \frac{\mu(a+\varepsilon)^2\ \mathrm{sin.}^2\alpha}{3(\mu^2-1)\lambda^2}\right).$$

En conbinant les formules (22) et (23), on en déduit

$$h - (a+\varepsilon)\cos.\alpha = \frac{3\lambda^2 + \mu(a+\varepsilon)^2\ \mathrm{sin.}^2\alpha}{3\mu\lambda^2 + (a+\varepsilon)^2\ \mathrm{sin.}^2\alpha}\cdot l.$$

Substituons dans cette expression, ainsi que dans l'équation (22), la valeur de μ donnée par la formule (9), nous aurons, en négligeant toujours les termes divisés par λ^3,

$$(24)\ldots h = (a+\varepsilon)\cos.\alpha + \left[\cos.\beta + \tfrac{1}{3}(1-4\cos.\beta)\left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2 \sin.^2\alpha\right] l,$$

$$(25)\ldots\ldots l = (a+\varepsilon)\left[\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2 \frac{\sin.^3\alpha}{\tang.^3\beta}\right].$$

La formule (25) pouvant offrir quelque difficulté dans le cas où l'on aurait $\beta = o$, il faudra calculer directement la valeur de l, en substituant dans l'équation (22) la valeur de μ dans laquelle on fera préalablement cos. $\beta = 1$.

De cette manière, on a

$$(26)\ldots\ldots l = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left[\frac{7}{6} + \left(\frac{a+\varepsilon}{\lambda}\right)^2 \sin.^2\alpha\right].$$

En négligeant tout-à-fait les termes divisés λ^2, on obtient les formules suivantes, beaucoup plus simples mais moins exactes que les précédentes

$$y = x \tang.\beta$$
$$h = (a+\varepsilon)\cos.\alpha + l\cos.\beta$$
$$l = (a+\varepsilon)\frac{\sin.\alpha}{\sin.\beta}.$$

Dans cette hypothèse le fil est tendu en ligne droite, et la solution du problème sera donnée par ces formules combinées avec les trois premières et la 15me. On peut substituer aux deux dernières celles-ci qui en dérivent

$$(27)\ldots\ldots h\sin.\alpha = l\sin.(\alpha+\beta),\quad l\sin.\beta = (a+\varepsilon)\sin.\alpha,$$

et qui se démontrent directement au moyen du triangle rectiligne OAC.

Il résulte de toute cette analyse que, si le poids du corps suspendu est très-grand relativement au poids du cordon, ce qui est le cas de l'expérience citée, les équations (1), (2), (3), (8), (9), (11), (16), (17) et (18), établissant des relations nécessaires et suffisantes entre

les inconnues du problème et les quantités données, serviront à la complète détermination des premières. Ensuite les équations (12) et (13), et la formule (15) feront connaître la nature de la courbe OA et la tension en un point quelconque de cette courbe.

Si l'on néglige les termes divisés par λ^3, il faudra d'abord combiner les formules (24) et (25) ou (26) avec les quatre premières.

La nature de la courbe OA sera définie par l'équation (19) laquelle, étant développée, en y mettant la valeur de μ et en s'arrêtant aux termes divisés par λ^2, devient

$$(19') \quad \ldots \quad y = x \text{ tang. } \beta + \frac{1}{3\lambda^2 \sin. \beta} [3x(a+\varepsilon)^2 \sin.^2\alpha - x^3].$$

Quant à la tension en un point quelconque de la courbe, elle sera connue au moyen de la formule (15).

Enfin, si l'on néglige tous les termes divisés par λ^2, le problème pourra être résolu par les formules (1), (2), (3) et (27).

Les neuf équations que nous avons rappelées plus haut renferment plus de neuf quantités en y comprenant les quantités données; par conséquent si l'on se donnait d'avance $\beta = o$, il suffirait de laisser indéterminée l'une ou l'autre des quantités l, θ; et les formules que l'on obtiendrait dans cette hypothèse pourraient encore servir à la complète détermination des autres quantités.

On aura donc pour le cas particulier dont nous venons de parler,

$$\beta = o, \quad (1') \ \varepsilon = o, \qquad (2') \ \omega T = P,$$

$$(3') \quad \theta^2 \int y' \xi dV = agV \sin. \alpha, \qquad (8) \ \lambda^2 = \frac{2gP}{p\theta^2},$$

$$(9') \quad \mu = 1 + \frac{a^2 \sin.^2\alpha}{\lambda^2}, \qquad (11') \ c^2 = \frac{1}{1 + \frac{2\lambda^2}{a^2 \sin.^2\alpha}},$$

$$(16') \quad \varphi' = \frac{\pi}{2}, \qquad (17') \ h = a \cos. \alpha + \frac{1-c^2}{2c} a \sin. \alpha \, F'c,$$

$$(18') \quad l = \frac{a \sin. \alpha}{c} [E'c - \tfrac{1}{2}(1-c^2) F'c], \qquad (12') \ y = a \sin. \alpha \sin \varphi,$$

$$(13') \quad x = \frac{1-c^2}{2c} a \sin. \alpha \, F(c, \varphi), \qquad (15') \ \omega\tau = P + \frac{1}{2g} p\theta^2 a^2 \sin.^2\alpha \cos.^2\varphi.$$

Ces formules déduites de leurs analogues, suffisent pour démontrer la légitimité de l'hypothèse admise. Elles donnent sous une forme très-simple, la solution exacte du problème dans le cas où le centre de gravité G est situé sur l'axe de rotation.

Lorsque je me suis occupé pour la première fois de cette question (*voyez*, le 1er cahier du 4me volume de la Correspondance citée) j'ai supposé, pour simplifier le problème, que le centre de gravité G était sur l'axe de rotation, et j'ai déterminé les conditions de l'équilibre d'une barre homogène et l'équation de la courbe formée par le fil. M. Desalis, qui s'est occupé de la même question, après moi, et dont le travail est imprimé dans le cahier suivant, a supposé que le fil décrivait une surface conique, et il est parvenu aux formules analogues à celles que nous avons désignées sous les numéros (1), (2), (3) et (27). L'examen que nous avons fait nous permet de conclure que la solution du problème que fournissent ces dernières formules peut être exacte dans plusieurs cas, notamment si le fil n'est pas très-long et si la vitesse angulaire n'est pas très-grande. Il en est de même de la solution qui suppose $\beta = o$; elle sera exacte toutes les fois que les équations rapportées plus haut seront satisfaites; elle peut servir particulièrement dans certains cas où l'autre solution serait en défaut. Mais pour avoir la solution générale, il faut recourir aux formules que nous avons données en premier lieu dans l'addition à la note citée pour le cas de la barre homogène, et à celles que l'on trouve ici pour un corps symétrique quelconque.

Nous ferons remarquer avant d'aller plus loin que l'on peut aussi obtenir l'intégrale approchée de l'équation (5) dans le cas où le poids du cordon est comparable au poids du corps suspendu, si la courbe OA formée par le filet moyen, ne s'écarte pas sensiblement de l'axe des x.

En effet, mettons d'abord l'équation (5) sous cette forme

$$\frac{ds}{dx} = \frac{K' - x - \frac{1}{2}\frac{\theta^2}{g}y^2}{\gamma l + l - s},$$

en désignant par K′ une nouvelle constante arbitraire, et par γ le quotient du poids du corps divisé par celui du cordon.

Maintenant si l'on substitue dans cette équation $h - x$ à la place de $l - s$, et si l'on néglige les puissances de $\frac{dy}{dx}$ supérieures à la seconde, on aura

$$\frac{dy}{\sqrt{2(K' - \gamma l - h) - \frac{\theta^2}{g} y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{\gamma l + h - x}}.$$

Faisons, pour abréger,

$$2(K' - \gamma l - h) = k^2 \frac{\theta^2}{g},$$

et nous aurons, en intégrant,

$$y = k \sin. \frac{2\theta}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{\gamma l + h} - \sqrt{\gamma l + h - x} \right).$$

Pour déterminer la constante h nous supposerons d'abord que l'extrémité inférieure de la chaîne OA est libre, et que l'on a $\gamma = o$. On doit donc avoir au point A, $\frac{dy}{dx} = o$, $x = h$; et de là on déduit

$$h = \frac{\pi^2}{16\theta^2} g.$$

Il faut d'ailleurs, pour l'exactitude de nos résultats, que cette valeur de h soit peu différente de l et moindre que cette quantité; ce qui exige que la vitesse angulaire θ soit plus grande que

$$\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{g}{l}},$$

et diffère très-peu de cette valeur.

Supposons actuellement que la chaîne porte un poids et que son extrémité inférieure puisse glisser sans frottement le long de l'axe des x; nous aurons à la fois $y = o$, $x = h$; par conséquent

$$\frac{2\theta}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{\gamma l + h} - \sqrt{\gamma l} \right) = \pi;$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{\pi^2 g}{4\theta^2} + \frac{\pi}{\theta}\sqrt{\gamma g l},$$

$$\theta > \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sqrt{\gamma + 1} + \sqrt{\gamma}\right).$$

La valeur de l'autre constante arbitraire k se déterminera en intégrant la différentielle de l'arc depuis o jusqu'à l. Cette différentielle étant à peu près égale à

$$dx\left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}\right),$$

si l'on y substitue la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et si l'on y fait, pour abréger

$$\varphi = \frac{4\theta}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{\gamma l + h} - \sqrt{\gamma l + h - x}\right),$$

on aura

$$(23) \quad \ldots\ldots\ldots \quad l - h = \frac{\theta^2 k^2}{g}\int_o^{2\pi} \frac{\cos.^2 \tfrac{1}{2}\varphi . d\varphi}{4\theta\sqrt{\frac{\gamma l + h}{g}} - \varphi}.$$

Posons

$$\Pi = 2\theta\sqrt{\frac{\gamma l + h}{g}} = \pi + 2\theta\sqrt{\frac{\gamma l}{g}},$$

et nous obtiendrons, en substituant cette valeur dans l'équation précédente

$$k^2 = \frac{2g\,(l - h)}{\theta^2\left(\log.\frac{\Pi}{\Pi - \pi} + \int_o^{2\pi}\frac{\cos.\varphi\, d\varphi}{2\Pi - \varphi}\right)}.$$

Si le rapport $\frac{\pi}{\Pi}$ est très-petit on aura

$$\int_o^{2\pi}\frac{\cos.\varphi\, d\varphi}{2\Pi - \varphi} = \Sigma\,\frac{fn}{(2\Pi)^n},$$

la somme devant s'étendre depuis $n = 2$ jusqu'à $n = \infty$, et la fonction fn étant déterminée par l'équation

$$fn = n\,(2\Pi)^{n-1} - n\,(n-1)\,f(n-2).$$